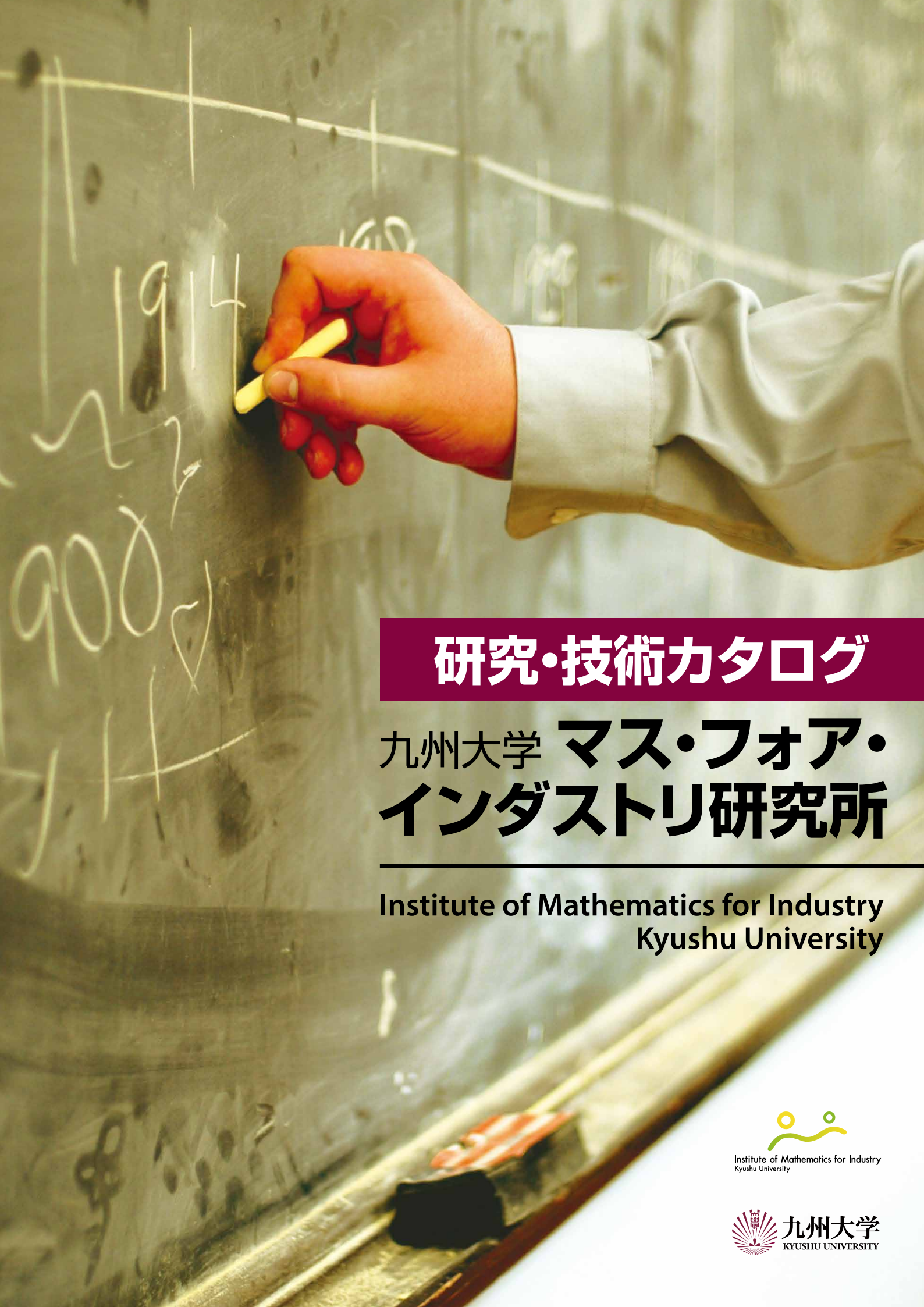


# 研究・技術カタログ

# 九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所

## Institute of Mathematics for Industry Kyushu University

Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

九州大学
KYUSHU UNIVERSITY

# 目　次

# 離散最適化とその応用


## 神山　直之

**学位: 博士（工学）（京都大学）**
**専門分野: 離散最適化、グラフ理論、計算量理論**


私の専門分野は離散最適化の理論的研究です。加えて、離散最適化と関係の深いグラフ理論や計算量理論の研究も行っています。これらの分野は数学と計算機科学の落ち合うところに位置し、互いに深く絡み合っています。これらの分野が含む問題は非常に多岐に渡るのですが、私は離散的な凸性である劣モジュラ性や、双対性を基本とする多面体的手法などを通じて、統一的な理解を深めることを目標としています。以下では、私が興味を持っている問題と併せて、これらの分野の簡単な説明をさせていただきます。

まず離散最適化ですが、そもそも最適化とは幾つかの解の候補から、目的関数を最大化もしくは最小化する解を求める問題です。離散最適化の研究においては、その中でも解の候補が離散的（つまりばらばら）な性質を持つ問題を扱います。これらの問題に対して、解の集合がどのような性質を満たすならば、全ての解の候補を調べずに効率的に最適解を見つけることができるかを明らかにし、実際にその解を求める方法（アルゴリズムと呼ばれます）を構築することが大きな目標となります。この分野に対して、私は二つの集合間の良い割り当てを求める安定マッチング問題や（図1参照）、ものの流れを数理モデル化したネットワークフロー、そして離散最適化における抽象的な枠組みである劣モジュラ関数やマトロイドに関係する最適化問題などの研究を行っています。

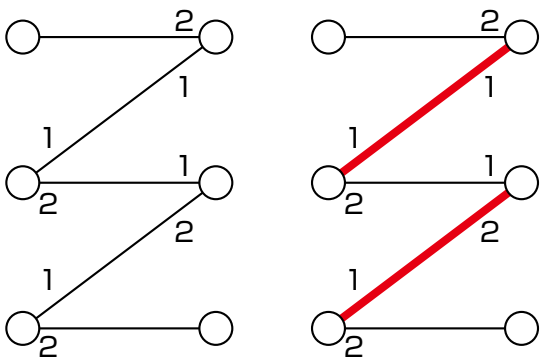



図1：（左）安定マッチング問題の例。左と右の点間の良い割り当てを求める。付記されている数字は相手に対する選好順序。（右）割り当ての例。

続いては、グラフ理論です。グラフとは点とそれらをつなぐ辺で構成されるもので、幾何学的な位置関係ではなく、位相的にどのように接続しているかのみに注目したものです（図2参照）。直観的には、道路等のネットワークを数学的に表わしたものだと思っていただければよいでしょう。そして、グラフ理論とは様々なグラフの持つ特性を一般的に明らかにする学問です。例えば、どのようなグラフならば高い頑健性を持っているかを考えたりします。このグラフ理論においては、私は古典的な問題である有向木の詰込問題における最大最小定理や（図2参照）、グラフ上の最適化問題である辺支配集合問題などの研究を行っています。

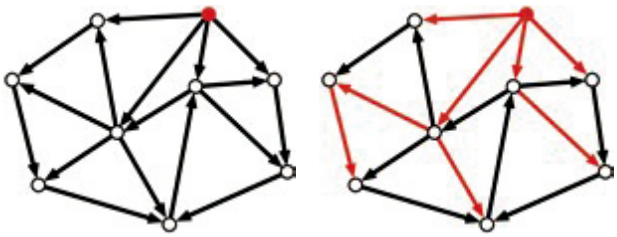
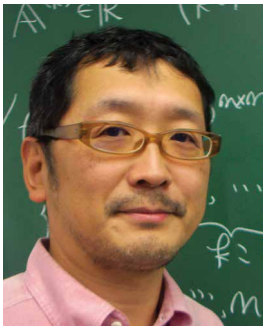


図2：（左）有向グラフ。（右）有向木。赤い点を根とし木のように広がる部分グラフ。

最後に計算量理論です。上記の二つの分野がどちらかといえば「できる」ことを研究する学問だったのに対し、この分野は「できない」ことを研究する分野です。具体的には、計算機における「計算」を数学的に定義しその能力の限界を研究するものです。この分野においては、クレイ数学研究所の発表したミレニアム懸賞問題の一つである「P対NP問題」が象徴的な問題だといえるでしょう。一見、最適化と計算量理論の分野は相反するものに見えますが、実はそうではなく近年計算量理論の研究においても最適化の手法が使用されるようになってきています。私はこの計算量理論の研究において、離散最適化の分野で用いられている手法、例えば多面体的アプローチ等をどのように活用することができるかを明らかにすることに興味があります。

また、これらの分野の研究は、現実社会の問題を数理モデル化し解決するオペレーションズ･リサーチと呼ばれる分野と非常に相性が非常に良く、私自身も交通や都市計画、そしてソーシャルネットワーク等の現実的な問題から生じる問題に対して得られた理論的成果を応用することに興味があります。



# 数値シミュレーションによる現象の理解

## 田上　大助

**学位: 博士(数理学)(九州大学)**
**専門分野: 数値解析、計算力学**

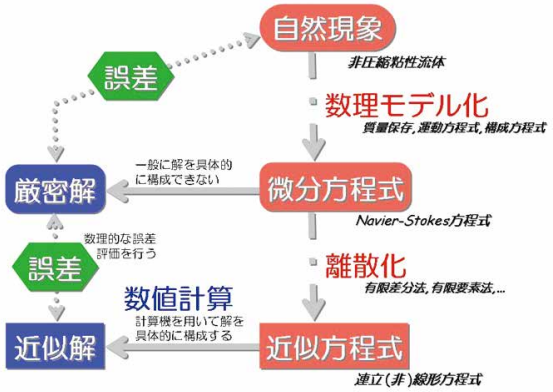



図1.数値シミュレーションの概念図。斜体文字は非圧縮粘性流れの場合の対応する例。

水の流れや熱の伝達など、自然界や産業界で見られる様々な現象を、計算機を用いた数値シミュレーションによって理解することに興味を持っている。数値シミュレーションでは、まず現象を物理法則に基づいて微分方程式で記述する"数理モデル化"を行い、次に微分方程式を計算機で扱うことのできる近似方程式に置き換える"離散化"を行い、最後に近似方程式の解法を計算機に実装し目的とする現象を再現する"数値計算"を行う(図1参照)。我々は、提案する"離散化"手法が本来の現象に対する"精度の良い"離散化になっているか、実用に耐えうる"効率の良い"離散化になっているか、を数理的に検討する研究に取り組んでいる。また様々な問題に対して、提案する"離散化"手法に基づいた"数値実験"を実際に行い、自然現象の理解や工業製品の設計へ応用することにも取り組んでいる。

我々が取り組んでいる研究の一つに、ガラス溶融炉内部におけるガラス原料の流動や熱伝達の数値シミュレーションがある(図2参照)。ガラス溶融炉内部にある高温(約1,500℃)のガラス原料は非圧縮粘性流体と見なせることから、溶融炉内部における現象は温度依存係数を持つ熱対流方程式によって数理モデル化できる。我々は時間方向に後退Euler法を、空間方向に混合型適合有限要素法を用いて得られる近似方程式の解に対する最適な誤差評価を導いた。またこの成果を発展させ、ガラス溶融炉の最適設計を行う際の指標の1つである炉全体の熱収支計算に対して整合流束法に基づく離散化手法を提案し、熱収支計算に対する最適な誤差評価を導いた。我々の誤差評価は、境界積分で定義される物理量を直接計算するよりも整合流束法を用いて領域積分に置き換えて計算した方が高精度である、という事実の数理的正当化に対応している。このように数理的正当化した離散化手法に基づく数値シミュレーションを用いて、製品品質の維持とエネルギー消費の抑制を両立したガラス溶融炉の最適設計について検討を試みている。

その他に我々が取り組んでいる研究の一つとして、変圧器内部の渦電流に代表される磁場の数値シミュレーションがある(図3参照)。複雑な形状を持った領域や変化の著しい現象の数値シミュレーションを精度良く行うためには、自由度数が$10^7$(あるいはそれ以上)の近似方程式を効率良く扱うことがしばしば要求される。我々は静磁場問題に対して、既知量である電流密度の補正を考慮した混合型定式化による数理モデルを導入した。この数理モデルに対して反復型領域分割法に基づく近似方程式を提案し、さらに混合型定式化の際に現れるLagrange乗数の性質を利用した簡略化を行った。提案した手法は、必要となる行列ベクトル積演算を部分領域ごとに独立な静磁場問題を解くことに帰着できるため、計算効率向上のために用いられる並列計算に適しているという利点がある。以上のことから、提案した手法に現れるある反復計算の収束特性が改善され、計算効率が向上した。これにより、従来は解くことのできなかった大自由度モデルの解析に成功した。このように効率化した離散化手法に基づく数値シミュレーションを用いて、磁場の振る舞いをより精度良く把握することを通して、変圧器の最適設計についての検討を試みている。

さらに我々は、粘弾性流れ問題、移動境界流れ問題、光波の干渉・散乱問題などの数値シミュレーションにも関心を広げて研究を続けている。これにより、数理的正当化がなされた数値シミュレーションがより多くの現象に対して可能になると期待できる。

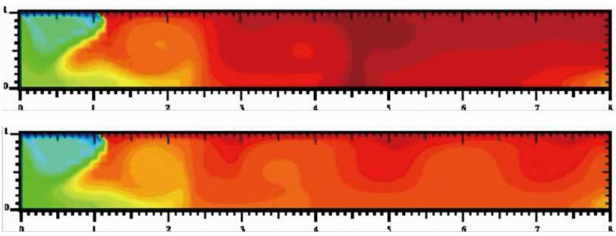


図2.あるガラス溶融炉内部における熱対流問題の数値シミュレーションによって得られた、ある時刻におけるガラス原料の温度分布。上図は炉に電極を挿入した場合、下図は炉に電極を挿入しない場合である。電極を挿入し電流を流すことで発生するJoule熱が対流の駆動力となるため、温度分布に違いが生じていることが分かる。

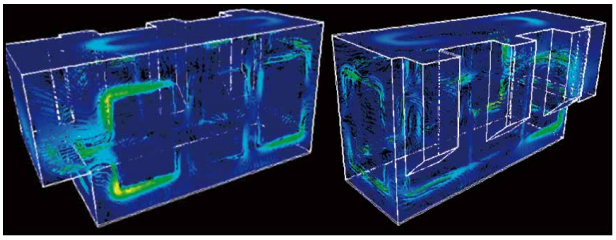


図3.ある変圧器内部における時間調和な渦電流問題の数値シミュレーションによって得られた、渦電流の流線。2つの図は、変圧器に対して互いに異なる側にある視点から鳥瞰した場合である。変圧器の壁面内部に設置された磁気シールド(水色や黄緑色の流線で囲まれた青い長方形部分)を囲むように渦電流が生じていることが分かる。

## Modeling, Optimization, and Control of Energy and Other Complex Systems


# Hoa Dinh NGUYEN

学位: PhD (Information Science and Technology) (The University of Tokyo)


**専門分野:** Modeling, optimization and control toward low-carbon and autonomous energy, transportation and other interconnected, complex systems. Particular focuses are on renewables and distributed energy resources, smart grid, intelligent transportation, multi-agent systems, graph theory, artificial intelligence, and decentralized optimization.

My research theme is Modeling, Optimization, and Control of Energy and Other Complex Systems. An illustration of such complex systems is depicted in Fig. 1.

The ultimate goals of this research are: (i) low-carbon, decentralized, resilient, autonomous, and comfortable energy systems; and (ii) harmonization of interconnected and complex systems. To achieve that, the following studies will be conducted. First, mathematical models will be built for representing the multi-scale, complicated dynamics and behaviors in energy systems, as well as other systems in engineering and nature. Then mathematical frameworks will be developed based on the derived models for optimizing and controlling such complex systems, given specific system objectives.

A variety of branches in mathematics will be employed in this research, for example dynamical systems and their stability theories, linear and nonlinear optimization, graph theory, control theory, multi-agent system, and artificial intelligence.

Particular applications include smart grid, smart cities, renewable and distributed energy systems, network systems, wireless power transfer, intelligent and decarbonized transportation systems, bio systems for clean energy production and carbon capture.

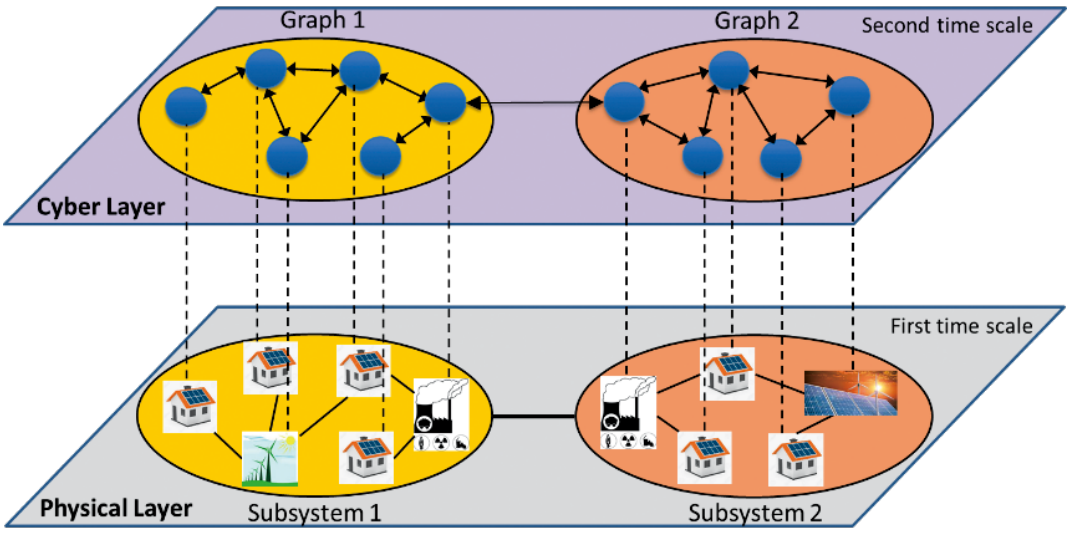



Figure 1. Illustration for power systems decision and control over different time scales.

# 離散微分幾何・可積分系

## 梶原　健司

**学位: 博士（工学）（東京大学）**
**専門分野: 離散微分幾何、可積分系、パンルヴェ系、離散・超離散系**

ソリトンと呼ばれる、粒子性をあわせ持つ非線形波動の研究に端を発する「可積分系」の研究を軸に研究活動を行っています。数理的には、ソリトンを記述する基礎方程式（ソリトン方程式）は非線形偏微分方程式であるにもかかわらず厳密に解けるという、奇跡的な性質を持っています。その奇跡の背後には「無限自由度の対称性をもつ無限次元の空間」の数理があり、その数理を共有する函数方程式の族を「可積分系」と呼びます。背後の数理を深く理解することによって、可積分系は多くの分野への応用が可能です。以下、私が関わっている3つの例を挙げます。

**1. 離散化と超離散化**：ソリトン方程式の可積分性を保存したまま独立変数を離散化して差分方程式を構成したり、従属変数まで離散化してセルオートマトンを構成する方法（「超離散化」）が構築されています。図1上は典型的なソリトンの相互作用を表し、左からやってきた大きく速いソリトンが小さく遅いソリトンを追い抜いています。一方、図1下はソリトンを記述するセルオートマトンです。1次元の箱の列と玉があるとし、各時刻で左から玉を右の最も近い空箱に移し、全ての玉を移動したら時刻を1進めます。この単純なモデルがソリトンを記述し、超離散化の手続きで偏微分方程式と直接の対応がつきます。離散化・超離散化の理論は数値解析や交通流など広範な分野に応用され、大きな成功を収めており、私が展開する他分野、特に幾何に関係する分野との連携活動のバックボーンを成しています（離散微分幾何）。最近では超離散化の適用範囲が可積分ではない反応拡散系にも拡大され、性質のよい反応拡散セルオートマトンモデルが構成できるようになっています。さらに、超離散系の背後の構造が最近急速に発達している「トロピカル幾何学」でよく記述されることが判明し、純粋数学の発達も促しています。

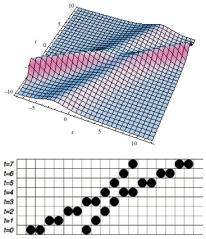


図1：ソリトンとセルオートマトンモデル

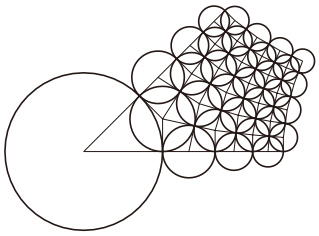


図2：離散冪函数とサークルパターン

**2. 離散パンルヴェ方程式と楕円曲線**：離散パンルヴェ方程式と呼ばれる可積分な2階常差分方程式の族は、数理物理学や特殊函数論で重要な役割を果たし、背後に極めて豊富な構造があります。その解はよく知られたベッセル函数や超幾何函数などの特殊函数の一般化と見なすことができます。これらの頂上に$E_8^{(1)}$型の対称性を持つ「楕円パンルヴェ方程式」があり、特殊解として楕円テータ函数で表示される「楕円超幾何函数」が現れます。この函数は超幾何型特殊函数の頂上に位置するものと考えられています。離散微分幾何における応用の一つとして、ある種の複素正則函数の離散化をパンルヴェ・離散パンルヴェ方程式が記述します。図2は冪函数$Z^{1/2}$の離散化で、グリッドはサークルパターンで特徴付けられます。

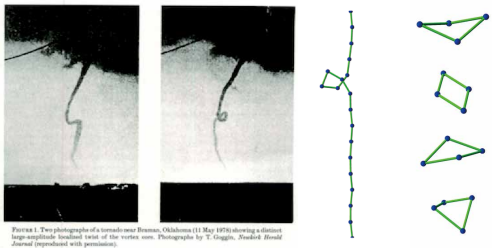


図3：竜巻に見られる渦糸（左）、渦糸のループと渦輪の離散モデルによる計算結果（右）

**3. 離散可積分微分幾何と幾何学的形状生成**：空間中の曲線・曲面やその変形を記述する基礎方程式としてさまざまな可積分系が現れることが知られています。さらに最近、離散可積分系と整合する曲線・曲面論の構築が進み、私は幾何学的形状生成、特に何らかの意味で「よい」曲線・曲面の生成の研究を工業意匠設計や建築の専門家と協力して進めています。図3は天然の渦糸である竜巻と、その離散モデルの計算結果。背後の構造を保存しているので、コストの低い計算で高品質な結果が得られます。図5（左）は工業意匠設計において、美的要素をもつ形状要素として日本で提唱された「対数型美的曲線」と呼ばれる平面曲線の族で、日本刀や蝶の羽など、私たちが「美しい」と思う形状から抽出されました（図4）。最近、私たちは可積分幾何の立場から全く新しい理論的枠組みを提唱し、それを用いて構造を保存した、高速生成可能で高品質な離散化や（図6）、空間曲線への一般化を構築しました（図5（右））。この理論を曲面に拡張し、得られた美的要素をもつ曲線・曲面の族を幾何学的形状要素として実装し、意匠設計での標準化を目指して研究を進めます。これらの形状は「美しさ」という人間の感覚の要素を取り込んだ数理モデルとしても重要な例です：**よい方程式は、よい形状を生成する。**

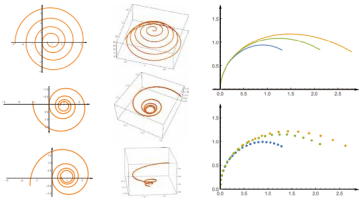


図4：日本刀や蝶に見られる「美しい曲線」　図5：対数型美的曲線とその空間曲線版　図6：対数型美的曲線とその離散化

# 流体力学、特に渦運動とその応用


## 福本　康秀

**学位: 理学博士（東京大学）**
**専門分野: 流体力学、電磁流体力学、トポロジカル流体力学**


流体運動を象るのは渦と波である。飛行機の背後に長くのびる2本の筋状の雲、浴槽の排水口の上に立つ気泡の柱などのパターンは渦構造の典型例である。渦は無限自由度力学系で、大小様々なスケールのモードが非線形的に相互作用しながら自律的に特定の配位に発達、あるいはカオス·乱流状態に至る。この過程で、渦は、運動量や物質を「輸送する」、「混ぜる」といった機能を獲得する。空気砲が特定の空気塊を遠くまで搬送することはお馴染であるが、心臓ポンプによる血流の駆動をはじめ生命体は様々な形で渦輪を利用している。さらに、翼端渦の形成と安定性が、航空機の安全航行、風力発電の効率向上から飛翔ロボットの設計にまでかかわることに代表されるように、渦の非線形ダイナミックスはエネルギーや地球環境問題から先端テクノロジー分野にわたる今日的課題解決の鍵を握る。

渦運動の数理解析が主たるテーマである。特に、3次元渦運動の理論において世界に先行する結果をもつ。平成6年には、渦糸の3次元運動に関する論文に対して、若手を対象とする日本流体力学会竜門賞の第1回受賞者に選ばれた。最近、レイノルズ数の大·小両極限で、実験とよく合う「渦輪」の進行速度の公式を導出することに成功した。また、「曲率不安定性」という渦輪の新しい不安定機構を発見した。以降、無限自由度ハミルトン力学系の視点から、渦の点·連続スペクトル、渦の非線形運動を計算する新しいラグランジュ的アプローチの開発を進めている。

流体運動の偏微分方程式による解析を創始したのは18世紀のオイラーであるが、渦運動の概念はヘルムホルツの論文（1858）まで1世紀待つ。ヘルムホルツは、粘性がないとき、「渦線が流体に凍結して運ばれる」ことを示した。このことはとりもなおさず渦線の絡み目型·結び目型が時間的に変化しないことを意味する。ヘルムホルツの法則のトポロジー的意味を汲み出しその応用をはかるというのが、Arnold（'66）に始まる20世紀後半の流体力学の1つの流れである。しかし、現状は、2次元流に留まる。流体粒子の変位を基本変数とするラグランジュ的記述によってはじめて、トポロジカル不変量を厳密に保ちながら渦運動を扱うことができ、分子運動から、固体、流体、弾性体、プラズマの運動までを貫く共通の土壌を与えてくれる。ラグランジュ的記述のもつ高い拡張性を活かして、波と平均流の3次元相互作用を計算する新しい数学的枠組みの構築、その回転·成層効果の取り込み、電磁流体力学への拡張を進めている。最近では、燃焼火炎面のダイナミックスなど圧縮性流体における渦運動に取り組んでいる。2013年3月には、福岡で、議長として渦運動に関するIUTAMシンポジウムを開催した。2015年1月より、国際学術誌Fluid Dynamics Research誌（IOPP）のEditor-in-Chiefを務めている。

文部科学省グローバルCOEプログラム「マス·フォア·インダストリ教育研究拠点」（九州大学数理学府、拠点リーダー若山正人、2008～2012年度）拠点サブリーダーを務めた。2008年度から始まったマス·フォア·インダストリ·フォーラム（FMfI）や2010年度開始のスタディ·グループ（SGW：企業の未解決問題に数学研究者·大学院生が短期間集中的に取り組むが合宿）の運営に参画し、マス·フォア·インダストリ研究所（IMI、2011年度～）の立ち上げ、IMIの共同利用·共同研究拠点認定（2013年度～）に関わった。また、IMIが幹事拠点として受託した文部科学省委託事業「数学アドバンストイノベーションプラットフォーム」（AIMaP、2017～2021年度）の運営に携わり、全国12の有力数学·数理科学研究機関の協力を得て、数学と諸科学分野·産業技術との連携を推進する様々な取り組みを進めている。目下、社会科学や人文科学への産業数学フロンティアの拡大に努めている。

博士後期課程を含む大学院生の指導に力を注ぎ、外国人留学生の受け入れも積極的に行っている。5名以上の指導学生を国内企業に長期研究インターンシップ（3カ月以上）に派遣した。研究者レベルでの国際交流も盛んに行っている。日本学術振興会特定国派遣研究者（長期）に採用され、1996年に10か月間、ケンブリッジ大学を訪問し、Moffatt教授と渦輪の運動に関する共同研究を行った。帰国後、有力外国人研究者の訪問が絶えることなく、最前線の情報を直接交換している。2001年以降、日本学術振興会招へい研究者（短期）として外国人を10名以上受け入れた。2016年には、代表として、ニュージーランドの産業数学グループとSGWの相互乗り入れを行い、また、FMfIのアジア太平洋産業数学コンソーシアム（APCMfI）加盟機関による海外開催（2016年～）を進めている。こうした活動の積み重ねの結果、創始者Moffatt教授や第一人者Ricca教授（Milan 大）を中心とする「トポロジカル流体力学」、そして、ラ·トローブ大学などAPCMfIや欧米の指導的研究者と「産業数学」の世界的ネットワークを築き上げるに至った。このネットワークを若手研究者の交流や育成に役立てていきたい。

# 理論計算機科学とその応用

## 溝口　佳寛

**学位: 博士(理学)(九州大学)**
**専門分野: 計算機科学**

グラフ構造は、複雑な状況を直観的に説明するための基本的な道具として計算機が生まれる前からその構造についての研究や応用が行なわれていました。計算機誕生後は、計算機の内部表現(データ構造)としてプログラム中でグラフが利用されるばかりか、グラフそのものを変換して計算を行なう新しい計算システムなども考案され、従来の静的なグラフ構造の研究(グラフ理論)だけではなく、グラフを操作することに対する性質の変化を究明する研究(グラフ変換理論)が特に重要になっています。また、グラフ変換操作を既存の電子計算機上で実現することを前提にするのではなく、ある種の基本的グラフ変換操作がハードウェア的に実現された計算機を想定してのアルゴリズム構築の視点も必要です。特に近年は、分子計算や量子計算等の自然計算の枠組みでの計算機の立案･設計についても研究が進められており、グラフ変換による計算の基礎理論の必要性が高まっています。

計算機による数式処理は数式を木構造で表現しパターンに適合した部分木を書き換えることにより式の計算や変形を行います。数式中の同一の項を共有するグラフ構造で式を表現しグラフ変換を行うことで計算効率を上げることが可能になります(図1)。そこでは、グラフ構造のパターン照合アルゴリズムや式の意味を変えないグラフ表現方法が重要になります。

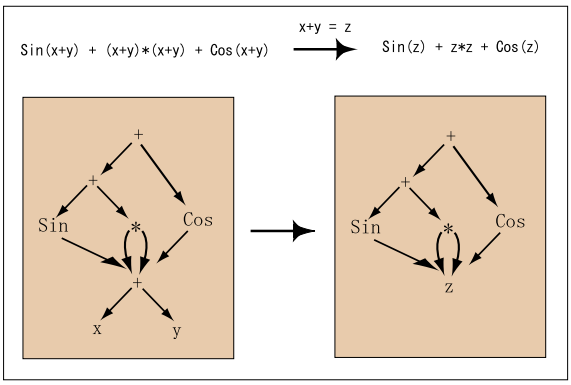



図1.項を共有し、グラフ変換で効率良く計算を行う。

グラフ変換は変換計算領域に重複がない限り同時並列計算が可能です。交通網等における最短経路の計算、情報通信ネットワークにおけるネットワーク信頼度の計算、電気回路におけるインピーダンスの計算などには、グラフ変換を利用した計算アルゴリズムが開発されています。変換を利用した計算は変換規則の適用場所や適用順序により計算過程が分岐するため、いつも同じ計算結果が得られるとは限りません(図2)。その計算の分岐が必ず合流することを理論的に証明すること、あるいは、同等の計算を行う必ず合流する変換規則群を導くことが重要になります。

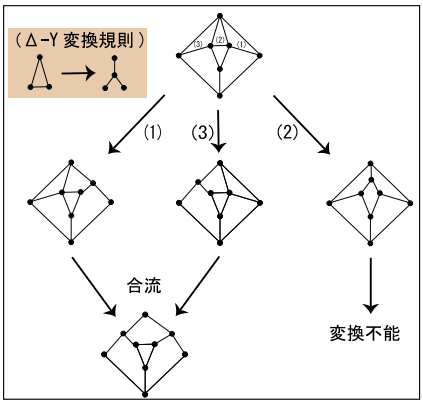



図2. 変換規則の適用場所による計算の分岐と合流。

直線状に並んだ頂点をつないだグラフの変形による計算は非線形の物理現象のモデルとして応用されているセルオートマトンによる計算と深く関わりがあります(図3)。セルオートマトンの計算機構を直接実現する素子の可能性として、遺伝子等のDNA鎖を用いた分子計算による実現が考えられています。グラフ変換系やセルオートマトンの計算可能性、計算万能性、計算等価性の判定などの理論は、実現される計算機の能力の有効性を評価します。

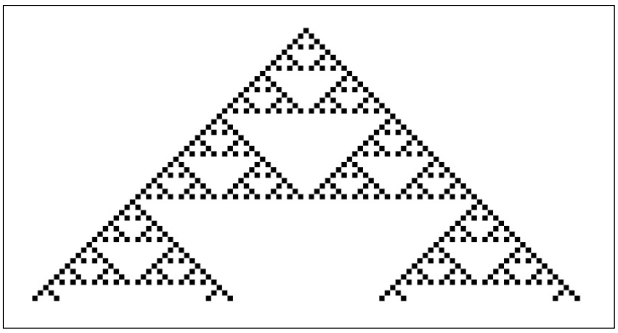


図3. セルオートマトンによるフラクタル図形生成例

グラフ変換の同時並列計算の定式化や計算の合流性の証明には、離散数学、二項関係による関係計算理論、そして、圏論などの代数的手法が必要となります。また、計算能力の評価については、オートマトンや言語理論、計算量の理論、そして、数理論理学が必要となります。理論計算機科学は、現在の電子計算機を効率良く利用するための、データ構造やアルゴリズムの理論だけでなく、新しい計算機構の立案･設計を支援するための理論でもあります。

現在の情報化社会を支える電子計算機の利用技術革新や次世代の新しい計算機構開発を支えるための数学、理論計算機科学の研究を行います。

# 生物に学ぶ適応ネットワーク理論

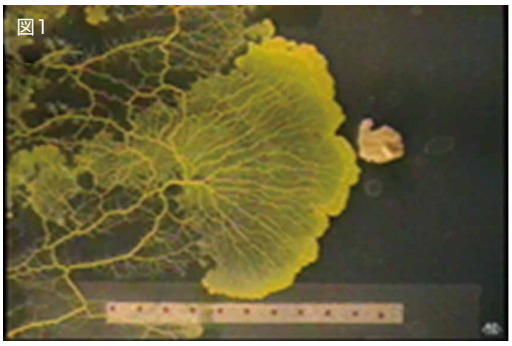

## 手老　篤史

**学位: 博士(理学)(北海道大学)**
**専門分野: 数理モデリング、適応ネットワーク理論**


生物は長く過酷な生存競争を生き延びてきただけあって、生命現象の内には巧みで洗練された技術が多くあります。私の研究ではこのような生命現象を数式で書き表すことによって生命の持つ技術を理解·抽出し、工学·工業的な応用へと繋げる事を目標としています。

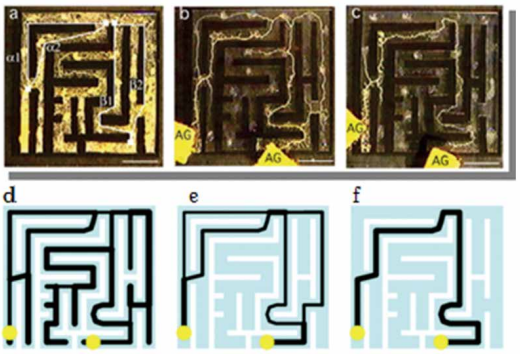
鉄道網や蟻の列、血管網に葉脈など、輸送に関する様々なネットワークがあります。これらは全て使われている経路が発達し、使われて無い経路は縮退していく性質があります。このようなものを適応ネットワークと呼びます。これらの適応ネットワークの形状は状況に応じて最終的な形状が(毛細血管や大動脈のように)大きく異なります。このような適応ネットワークの形成を理解することが本テーマの目的です。

図1



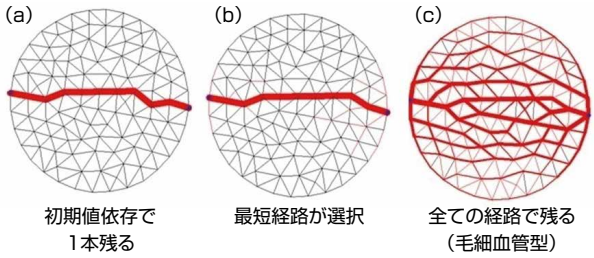
私がこの研究に用いた生物は真正粘菌変形体という生き物です(図1)。粘菌は単細胞生物ですが、体内に栄養等を輸送する適応ネットワークを持っています。また、内部に核をたくさん持った集団的な性質も持った生き物です。例えばナイフで幾つかに切断すればそのそれぞれが別個体として生存できるし、反対にくっつけてしまえば1つの個体として生活することができます。粘菌はこのように切ったり貼ったりが自由にできることから適応ネットワークを理解するのに優れた素材になっています。この粘菌が作る輸送ネットワークは迷路を解き、最適なネットワークを求めるという実験が共同研究者の中垣俊之教授(はこだて未来大学)により行われました(図2a-c)。しかし脳が無く自分の周りの情報しか持たない粘菌がどのようにして大域的な情報が必要なネットワーク問題を解くことができたのでしょうか。

図2




私はこの現象を数式で表すことによりこの現象を再現しました(図2d-f)。その結果、この最短経路解が求まるパラメータを境界にしてネットワークの形が大きく変わることがわかりました。適応ネットワークの成長率が太い経路ほど強かった場合、図3aにあるように経路は1本だけ残ります。これは初期状態で太い管が成長しやすく、その後、より一層成長しやすくなっていくからである。反対に太い経路ほど維持コストが高ければ太い管は細い管に血流を奪われてしまい、全ての経路が残ります(図3c)。このように粘菌が迷路を解くという研究の私の数理モデルはこの2つのネットワーク形成の境界を与えているのです。このためネットワークトポロジーが変化する場合には必ず図3bの状況を通過するので、適応ネットワークの組み換えを知るには図3(a-c)のパラメータに注目すれば良いのです。

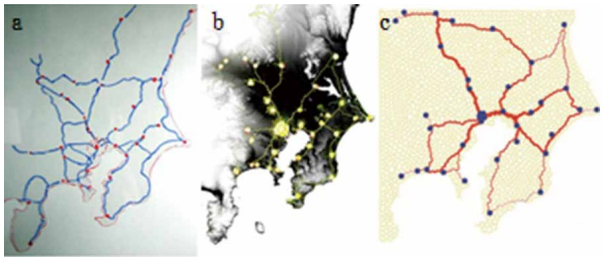
図3




このようにして適応ネットワークの共通法則が得られたため、それを一般の鉄道網に応用しました(図4a-c)。これからはさまざまな適応ネットワークに対してこの共通法則を応用し、工学·実用的な結果へと繋げていくことを目標とします。

また、他にも生物の多様なリズムを用いた行動制御や生物の自発的な形態形成についての研究も行っております。

図4



# 「厳密な数値計算」による新しい数学の視点

## 松江　要

**学位: 博士(理学)(京都大学)**
**専門分野: 力学系、数値解析、トポロジー**

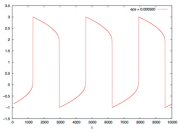
自然現象をはじめとした様々な事象を説明するために数学の議論が幅広く応用されていますが、実際の応用を考えるとき、抽象的な数学の議論を適用しきれない問題も数多くあります。

例えば、微分方程式(1)は適切な仮定のもとで、$\varepsilon$=0における特殊な解の近くに「充分小さな$\varepsilon$」に対して真の解を構成することができます。これは「特異摂動法」によるものですが、この理論は「どれくらいの$\varepsilon$に対して解の記述を議論できるか」を答えてはくれません。他方、(1)の形をした具体的な系の数値計算を試みた時、具体的な$\varepsilon$を用いて解の計算をすることができますが、観察される現象は数学の議論にある「充分小さな$\varepsilon$」の範疇にあるのか不明瞭です。このように、数学の議論にはどの程度の大きさのパラメータに対して主張が適用できるのかを答えてくれないものがあり、数値計算等を絡めた具体的な系への応用に不可避のギャップが生じます。

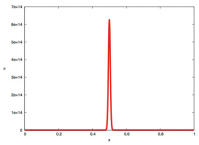
また、特殊な構造を持つ解であることが数値計算では厳密に確認できない現象も存在します。微分方程式の爆発解が例として挙げられます。有限時間で無限大に発散していく解ですが、数値計算では「無限大」を扱う事ができないため、しかるべき状況下である閾値を超えた数値解を爆発解として扱う事がほとんどです。しかし、それは本当に爆発解なのでしょうか?無限大を扱えない通常の数値計算では答えられない問いです。数学の議論では爆発解などの特別な構造を前提として議論することも多くあるため、前提が不明瞭なままでの数学を用いた推論は誤った結果を導きかねません(図1)。

図1.

(1)
$$x' = f(x, y, \epsilon)$$
$$y' = \epsilon g(x, y, \epsilon)$$



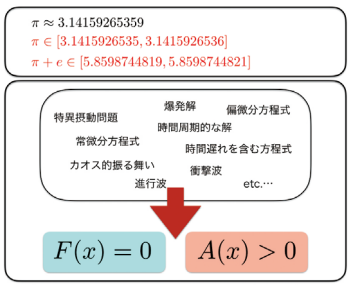
(2)



(1) 特異摂動問題に分類される微分方程式と、ある系で$\varepsilon$=0.005とした時の数値計算例。特異摂動法では「充分小さい$\varepsilon$」に対して、解の構造を議論できる。$\varepsilon$=0.005は特異摂動法の適用の範疇に入るほど「充分小さい」だろうか?
(2) ある微分方程式の解の数値計算例。有限時間で値が発散していく様子が見られるが、これは「爆発解」とみなしていいものだろうか?

上記のような数学と数値計算の間の不可避のギャップを埋める方法の一つとして、「精度保証付き数値計算」が近年活発に研究されています。数の代わりに「区間」を基本単位として、区間同士の演算(四則演算や関数演算など)によりあらゆる計算を組み立てる一体系の応用です。これは数値計算などで生じる数値誤差(打ち切り誤差や丸め誤差)を区間の中に包み込むことで、「真の値を含む区間」の計算を実現できるため、数学的に厳密な計算を計算機で実行することができます。線型代数や非線型方程式の解法に始まり、現在は微分方程式や力学系の解の存在へ多くの応用があります。微分方程式などへの応用で鍵となるアイデアは「計算すれば主張を証明できる条件まで問題を還元し、残った問題を精度保証付き数値計算する」というもので、多くの場合は計算の前に「方程式の零点探索」あるいは「不等式判定」まで問題を還元します(図2)。

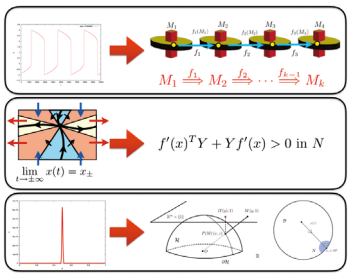
図2. 精度保証付き数値計算の考え方。




上：すべての数を区間表示し、演算も区間同士で行う。区間の中に真の値を常に含む計算を行うという意味で数学的に厳密な計算が計算機でも可能となる。下：応用の際は、あらゆる問題を還元したのち、残された問題に精度保証付き数値計算を適用する。多くの問題は零点を求める問題(左)、あるいは不等式判定(右)に帰着される。

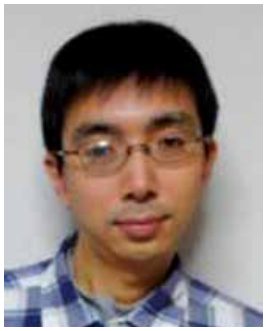
私は近年「特異性を有する系」、特に先述の特異摂動問題や爆発解、不連続性を有する衝撃波などの存在の計算機援用証明法の構築に取り組んでいます。これらは全く性質の異なる対象であり、数学でも数値計算でも考察が容易でない対象ですが、簡単な問題の場合に幾何学的特異摂動論、空間のコンパクト化と特異点解消、方程式の縮約などの数学理論をフルに応用することで、covering relation と呼ばれるトポロジーの関係式と行列の正値性判定まで問題を落とすことに成功しました(図3)。それにより、「充分小さい値を含む具体的な$\varepsilon$」に対する(1)の解、爆発解や不連続な解の「厳密な数値計算」という、一見相反する議論を同時に実現させることができます。

図3. 精度保証付き数値計算の力学系への応用。




上：「解軌道」をcovering relationという零点探索問題を伴うグラフで表現する。中：「漸近挙動」を行列の正値性判定に帰着させる。下：相空間をコンパクトな多様体に埋め込むコンパクト化。「無限大」を埋め込まれた多様体の境界と対応させ、特異点解消を経由して爆発解を境界へ向かう時間大域解と対応させる。これらの道具により、特異摂動解、爆発解を"厳密に数値計算できる"。

精度保証付き数値計算は数学の議論を具体的な問題の数値計算に持ち込み、応用の可能性を大きく高める可能性を秘めています。一方、その方法論は「計算する問題の還元」が鍵となっており、それを自然な形で実現するために、考察する対象の「根源」を問う姿勢が求められます。よって数値計算を伴う分野ですが数学的考察が多くを占め、数値計算を通した新たな数学の構築につながる分野でもあると考えています。



# 最適化を基本とした研究･教育活動を目指して


## 脇　隼人

**学位: 博士（理学）（東京工業大学）**
**専門分野: 最適化理論、連続最適化**


自然界のみならず、社会活動や日常生活においても、「最適化」が現れるので学ぶ価値のある研究分野といえよう。最適化の中でも、連続量を扱う最適化を連続最適化と呼び、私は主に連続最適化を対象として研究や教育を行っている。例えば、大学一年生の微分積分学で習う「ラグランジュの未定乗数法」は連続最適化で議論される手法の一つである。以下では、私が携わった研究･教育および産学連携について簡単に紹介する。

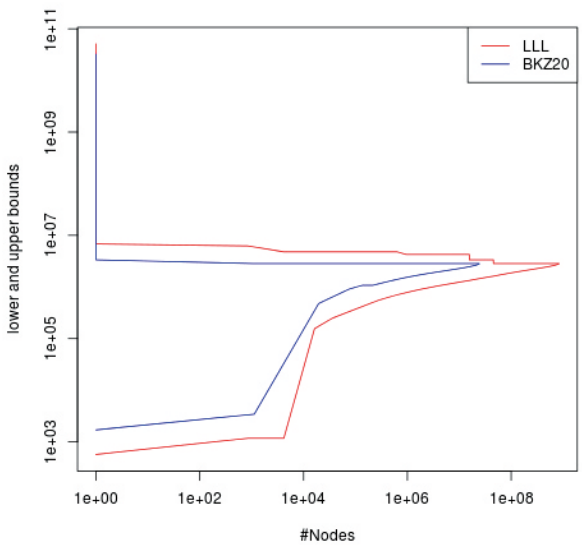
これまで凸最適化、特に、行列変数を持つ半正定値計画問題と呼ばれる最適化問題を中心に研究をしてきたが、IMIに来るまでは、半正定値計画問題を使って別の最適化問題を解くアルゴリズムを提案･実装する研究に取り組んでいた。現在は、もう少し半正定値計画問題に関して理論寄りの研究にシフトしている。具体的には、制御理論で現れる最適化問題に対して、得られる半正定値計画問題をテーマに研究を行っている。この半正定値計画問題はしばしば悪条件になることがあるのだが、それがシステム論の言葉で記述できることに気づき、それ以来このテーマに取り組んできる。調べてみると双対問題が興味深い数学的構造を有しており、幾つか論文を書いている。「最適化理論の深化よりも、他の研究分野でどうやってうまく最適化理論を使うか」、ということを考えることが性に合っているようだ。

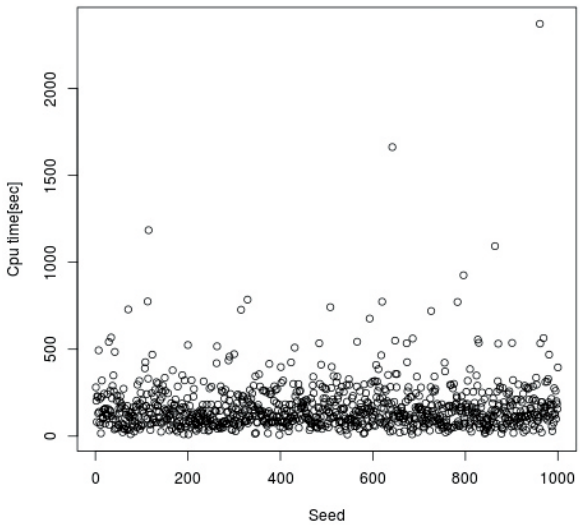
学生指導においては「分野の縮小再生産はしない」と考えていて、できるだけ自分の守備範囲の外の最適化について研究してもらっている。例えば、整数計画問題の応用およびそのためのアルゴリズムの開発などがそれにあたる。幸い、学生が優秀なためこちらがいろいろと教わって論文を一緒に書いている。

理学部数学科では最適化を教える講義がないが、大学院では用意されている。こちらもできるだけ幅広くテーマを選んでいて、最適化理論の基本を重点的に教えている。

これまで、IMIのシステムを利用して、自動車業界、製造業、行政などと幾つかのテーマで研究費をもらって共同研究を行った。いわゆる産学連携である。私の方針としては、学生に補助はしてもらうができるだけ一緒に手を動かすようにしている。学生を安価な労働力と捉えられないようにするためだ。

このように取り組んでいると、産学連携についてはいつも難しさを感じている。その一因は、「論文を書いて自分たちの獲得した知を後世に残す」という共通認識を持てないところにある。我々にとっては当たり前の思想であるが、相手側は必ずしもそうではない。産学連携を通じて産業界･教員および学生が論文を書き、その学生が学位を取り、学術界･産業界で活躍してもらうのが産学連携の理想だと考えている。この理想に同意してもらえる相手と優先的に共同研究を実施しようと思っている。



# 計算理論と整数論の間

## 浦本　武雄

**学位: 博士(理学)(京都大学)**
**専門分野: 理論計算機科学**

私の主要な研究領域は、広義には理論計算機科学です。その関連で最近は特に代数的言語理論と古典類体論の融合領域の研究に取り組んでいます。

### (1) 代数的言語理論

代数的言語理論は形式言語理論の一領域で、歴史的には言語(=有限文字列集合)の計算階層分類の関連で1960年代から発展してきたものです。例えば我々は素朴に言えば「2進数11011110110101が素数であるか」を判定するのが難しいと感じ、一方で「11011110110101の中に含まれる0の個数は3の倍数か」を判定するのは容易であると感じますが、それは何故でしょうか? 形式言語理論(或は計算複雑性理論)ではこのような「有限文字列の性質を判定する問題の難しさ」に正確な(Turing機械の実行ステップ数などによる)定義・指標を与え、その難しさの階層を分類することを一つの主要な関心としています。

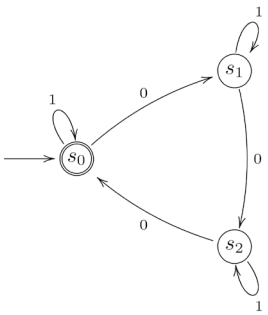



図1：バイナリ列に含まれる0の個数が3の倍数かを判定する有限オートマトン

代数的言語理論はこのような言語の研究の中でも、代数的な手法を援用することを特徴としています。特に有限オートマトンによって受理される言語である正規言語に限定して言えば、有限半群論の手法を援用した美しい分類理論(Eilenberg理論)が知られており、私の研究もこの正規言語の分類理論に関わります。

Eilenberg理論の内容を端的に言い表す良い例は、正規言語の論理的表現に関する問題で、1965年にSchützenbergerが証明した定理です。正規言語は一般にBüchiのMonadic Second-order Logic (MSO)という論理体系の論理式で表現できることが知られていましたが、MSOのうち一階の量化子のみを使う部分体系(FO)で表現できる正規表現を特徴づける問題が1960年あたりに興味を持たれていました。Schützenbergerはこの特徴付けを、有限半群論の手法を用いて与え、それがEilenberg理論の出発点となります。Schützenberger以降も正規言語に関する組合せ的・数理論理学的決定問題が、有限半群論の問題に帰着させて解決できる場合のあることが発見されました。その方法を体系化したものがEilenberg理論です。現在では以下の図のように正規言語の様々な階層は、有限半群(モノイド)の階層と自然に対応することがわかっています(双対性)：

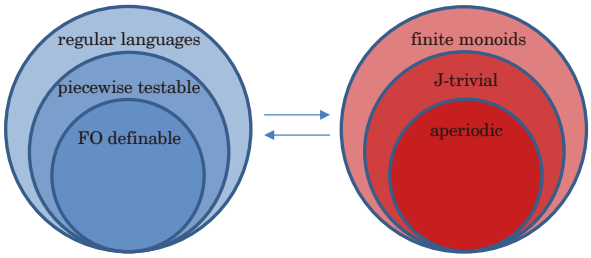



図2：正規言語と有限モノイドの階層の対応(双対性)

### (2) Galois理論・古典類体論との遭遇

Schützenbergerの定理は、技術的には次のように主張します：「正規言語LがFOで定義できるための必要十分条件は、Lから構成される有限統語的モノイドM(L)が非自明な部分群を含まないこと(= aperiodic)である。」簡単にいうと、正規言語がFOの論理式という特定の表現形式で記述できるための必要十分条件を、それに対応する有限モノイドM(L)の純半群論的性質で特徴づけられるということです。

この現象は代数学においてGaloisが示した次の主張と似ていないでしょうか：「多項式f(z)の根が四則演算とベキ根で表されるための必要十分条件は、f(z)の最小分解体Kのガロア群Gal(K/Q)が可解であることである。」実際、この類似はただの類似ではなく、圏論と呼ばれる抽象的な言葉を使って正当化することができ、その結果としてEilenberg理論とGalois理論とは正確な意味で統一することができます。そしてさらにこの統一は、代数体のアーベル拡大の分類や、アーベル拡大での素数・素イデアルの分岐を記述する類体論に対しても、興味深い見方を与えることがわかってきました。現在はこの観察を進め、古典的な代数的言語理論のアイデアと、明示的類体論や非可換類体論との関連づけを模索しています。

# 双曲型偏微分方程式の逆問題


## 髙瀬　裕志

**学位: 博士（数理科学）（東京大学）**
**専門分野: 偏微分方程式、逆問題、幾何解析**


双曲型偏微分方程式は解の有限伝播性やホイヘンスの原理等重要な数学的特徴を持つ。数理科学の分野での重要性はもちろんのこと、力学や波動をはじめとする様々な自然現象のモデル化が可能であるため、これまで物理学や工学の分野においても重要な役割を担ってきた。中でも、存在する解の情報から支配される方程式系を決定する逆問題は、数理科学の分野では非適切性問題として極めて重要である。加えて物理現象の背景を詳細に理解できるツールとしても強く注目されている。

偏微分方程式の逆問題における代表的な研究課題は、未知の波源を特定する波源項決定逆問題と、方程式が記述する未知の物理的性質を特定する係数決定逆問題である。考えている領域の一部で波動を観測した観測者が、これらの未知量を観測領域の近く或いは考えている領域全体で特定できるかどうかを調べることが目的となる（図1）。


図1：逆問題

様々な偏微分方程式のタイプがある中で、特に双曲型偏微分方程式は座標に依存しない幾何学的な記述が可能である場合が多い。したがって例えば不定値な計量を導入した擬リーマン多様体上における解析との相性が非常に良い。近年では逆問題の様相を幾何学的視点から捉えるべく、コンパクトなローレンツ多様体上の幾何解析を用いた研究が進められている。さらに、物理学からの要請として多様体の境界で計量が発散する共形コンパクトな多様体上での逆問題解析も注目を集めている（図2）。共形コンパクト多様体上では方程式の主要部が退化するため解析が容易ではなく、退化型方程式に対する新たな逆問題理論の構築が必要である。

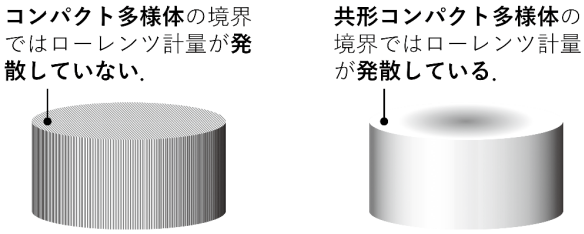



図2：コンパクト多様体と共形コンパクト多様体

結果の原因となる未知量を特定する逆問題は、当然ながら必ずしも肯定的に解決されるわけではない。否定的な例として、映画「ハリー･ポッター」に出てくる透明マントのような光のクローキング技術がある。これは、ある対象の周りの有界な領域において媒質を変化させることで光の進行を曲げ、外部からの光が伝播しない見えないゾーンを作り出すことでその対象を不可視化する技術である（図3）。偏微分方程式論において媒質の変化はしばしば低階項であるポテンシャルとして定式化される。見えないゾーンにおいてはそのポテンシャルの影響により外部から光が伝播しない状況を、ポテンシャル項付き波動方程式のコーシー問題の観点から理解することもできる。このように否定的な状況を改めて考察することが数学的に面白い構造を発見する上で助けになることもあるのかもしれない。

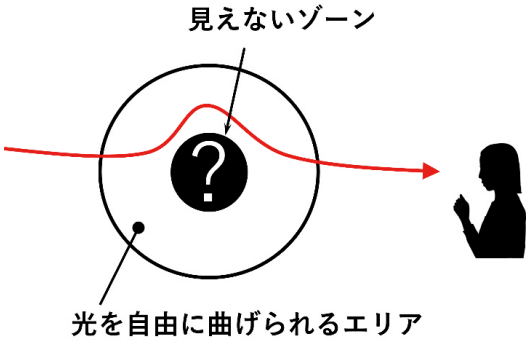
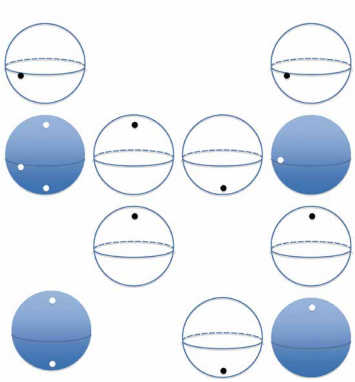



図3：クローキング

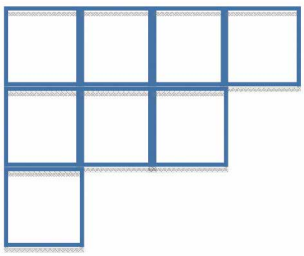
# 代数解析: 数学の落ち合うところ

## 落合　啓之

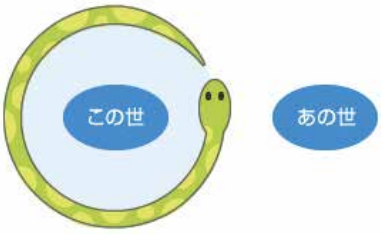
**学位: 博士(数理科学)(東京大学)**
**専門分野: 代数解析**



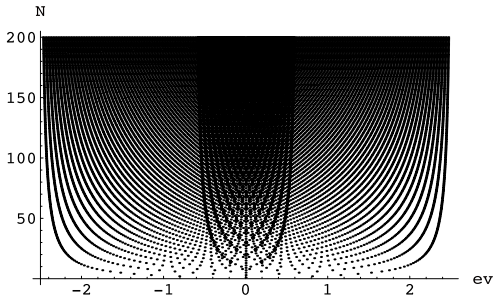
私の研究分野は代数解析学で、特にD加群を用いた研究を主としています。初期の頃、修士論文ではある非ホロノミー系を満たす佐藤超関数を調べ、学位論文ではあるホロノミー系を満たす半単純リー群の大域指標の定める輪体を調べました。もう少し先を説明するために、私の経歴を簡単にまとめてみます。1998年、それまで9年間お世話になった立教大学を離れ、九州大学に赴任しました。3年後に東工大へ移り、さらに2002年の秋に名大へ異動、そこで7年を過ごし、2009年の秋からまた九大に戻ってきました。この間、概均質ベクトル空間、1変数ならびに多変数の超幾何関数を始めとする特殊関数、そしてゼータ関数と出会います。私自身は佐藤幹夫氏の直接の指導を受けたことはないのですが、無意識のうちにその影響下にいると思っています。ゼータ関数も研究の対象にしていますが、強いて言えば、私自身の興味は、数に対するものよりも関数に対するものといえるでしょう。今まで論文の対象としてきたものも、関数で表わせるものやそれらの間の関係式として表わせるものが多いと思います。そして、関数そのものとそれを決定・記述する様式の双方からアプローチしています。これが代数解析的な手法の特徴のひとつです。また、図形全般に対する興味はともかくとして、不変式論、ならびにその双対と言える軌道分解には、研究の初期の頃からかなりの思い入れがあります。座標を使わない内在的な叙述と座標を使った明示的な記述を、あえて片方だけで徹底したり行ったり来たりしたり、あるいは組み合わせ的技法を絡めたりという部分に面白みを感じています。今やKazhdan-Lusztig　予想も常識のようになりつつあり、見渡せる景色は前世紀よりも確実に広くなっていると思います。



このパンフレットはIMI に関するものですから、私とマス・フォア・インダストリとの関わりについて説明します。2010年4月に、GCOEの事業推進担当者のひとりである岩崎克則氏が北大へ転任したため、岩崎氏のつとめていた「機能数理の基礎」ユニットの事業推進担当者を引き継いだことで、マス・フォア・インダストリとのつながりが始まりました。このたび、IMIの発足に伴い、数理学研究院を1年半で再び離任することとなったのは残念ですが、「転んでも起きない」という不屈の精神で新地へ向かいたいと思います。私の今までの活動のうち、社会との接点と言えるのは、数学が伝統的に社会と向き合ってきた諸分野のうちのいくつかですが、数学の社会への情報発信や連携は機会をいただいてつとめています。例えば、高校教育(のうち、おもに入試問題説明会や教科書の編集に関すること)、保険数理(アクチュアリ会の研究会員)、執筆(数学セミナーや数学小景などでの数学の平易な紹介)、講演(公開講座、市民講座)などです。昨年度から安生健一氏を代表者とするクレスト(科学技術振興機構)の『デジタル映像数学の構築と表現技術の革新』の九大班の班員もつとめています。




近年は幾何学的表現論の枠組みで積分が果たす役割を中心に研究を進めています。日本数学会では函数解析分科会の「表現論と調和解析グループ」に属していますが、必ずしもその範囲に限らない対象や手法にも興味を持って活動して来ました。今後も柔軟に数学をして行きたいと考えています。

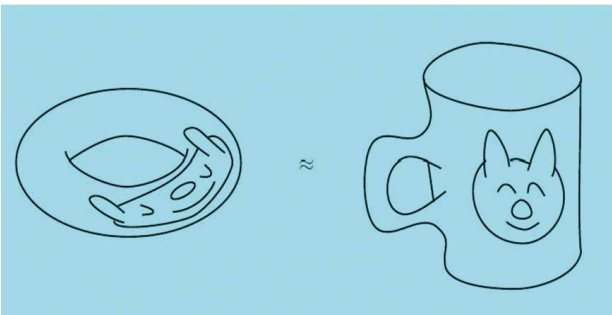



# トポロジーとその応用


## 佐伯　修

**学位: 博士（理学）（東京大学）**
**専門分野: 位相幾何学、トポロジー、特異点論、微分位相幾何学、DNA結び目**

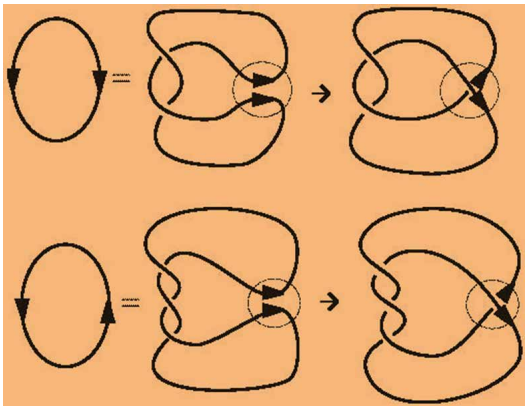

**位相幾何学（トポロジー）**とは、図形をゴムのようなものでできていると考え、グニャグニャと連続的に変形できるものは同じと思う、とても柔らかい幾何学のことです。言い換えると、幾何学的対象の性質のうち、それを連続的に変形しても変わらないものを研究する、純粋数学の一分野です。たとえばコーヒーカップとドーナツは位相幾何学的には同じものと考えられます。それらには「穴」がちょうど1つずつありますが、この「穴」の個数は、図形の連続変形で変わらない量の1つの典型的な例となっています。



ドーナツとコーヒーカップは位相幾何学的には同じ

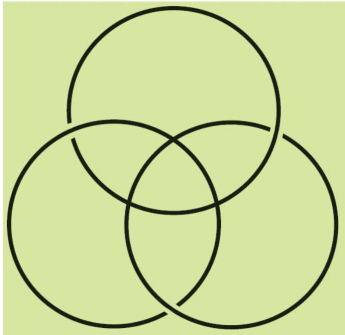
こうした位相幾何学は、図形が柔軟性を持つ場合に威力を発揮します。その最たるものが、紐を結んでできる結び目や絡み目です。紐を結ぶことは日常生活でも重要な行為で、結び目が原始時代から人間の生活と深く結びついていることは間違いありません。実際、野生のゴリラも結び目を作ることができることが知られています。ごく最近になって、こうした結び目が、DNA（デオキシリボ核酸）の研究に深く関わることが明らかになってきています。

遺伝情報の担い手であるDNAは、生物の細胞内で捩れた紐状の形をしていて、輪になっていることもあり、さらにそれが結ばれたり絡んだりしていることもあります。こうした**DNAの結び目・絡み目**は、酵素の働きによって作られることは知られていましたが、その仕組みの詳細については実験技術の限界のために明らかにされていませんでした。1980年代終盤、数学者のC.ErnstとD.W.Sumnersは、数学、特にトポロジーにおける結び目理論の最新の結果を駆使してその酵素の仕組みを解明しました。もともと結び目理論は19世紀のGaussによる電磁気学やKelvin卿による渦原子仮説に端を発すると言われていますが、その後化学者・物理学者は結び目を忘れ、数学者だけが興味を持って研究してきた歴史があります。我々はその流れを受け、現代数学の中でも最近もっとも盛んに研究されている分野の1つである結び目理論を駆使することにより、トポイソメラーゼと呼ばれる酵素によるDNA組み換えの解析を、数学的側面から研究しており、こうした解析の産業技術への応用も目指しています。



酵素によるDNA組み換えの例

なお、こうした研究と同時に、**可微分写像の特異点論**も活発に研究しています。特に、滑らかな物体間の写像の特異点が、そうした物体の位相幾何学的性質を深く反映する具体的事実などを数多く発見してきています。特に、特異ファイバーと呼ばれる1点の逆像に着目する研究では世界的な第一人者を自負しており、それを最初に定式化した著書も出版しました。最近はこうした理論を、多値関数データのための視覚的解析に応用すべく、研究を行っています。



4次元多様体の鍵を握る特異ファイバー

また、可微分写像の特異点論以外にも、位相的埋め込みの第一障害類、余次元1写像の分離性質、複素超曲面の孤立特異点の位相幾何、ファイバー結び目、4次元多様体、余次元1の埋め込み、空間曲線の微分幾何学的不変量、結び目解消数など、位相幾何学の様々な分野を幅広く研究しています。こうした研究は、種々の分野で応用できる可能性があり、たとえば物質・材料の性質をミクロなレベルから考察する際には威力を発揮することが期待されます。なお、一般化されたフィボナッチ数列の漸近挙動についても精力的に研究を行っており、解析関数の零点に関する研究もあります。

こうした幅広い研究を行っていることは、教育に対する効果もかなり大きく、それはこれまでに執筆指導をした修士・博士論文のテーマからもうかがえるかと思います。また、これまでに指導した学生の産業技術への貢献の実績もあります。

今後も、トポロジーという純粋数学を基に、数学と産業技術の関わりを深めてゆければ誠に幸いです。

# 確率論とその応用

## 白井　朋之

**学位: 博士(数理科学)(東京大学)**
**専門分野: 確率論**

ルーレット、双六、宝くじ、株価の値動きなど、確率的現象は日常生活においても身近に観察できるものです。これらの現象(対象)には自然に確率的な要素が備わっていますが、一見ランダムな要素がまったくないように見える問題にもランダムな側面があったり、意外な形で確率論的手法が使えることがあります。ここではそのような例を3つばかり紹介します。

(1)日本では「角谷予想」、海外では「コラッツ予想、3n+1問題」などと呼ばれる初等整数論の有名な未解決問題をご存知でしょうか? 任意に選んだ自然数に対して、「自然数が偶数ならば2で割り、奇数ならば3をかけて1足す」という操作を繰返すと必ず最後は1になるという予想です。例えば、初めに7を選んだとすると、7、22、11、34、17、52、26、13、40、20、10、5、16、8、4、2、1となります。2009年の時点で$20\times2^{58}$以下の自然数に対しては、コンピュータによって予想が正しいことが確かめられています。この問題自身にはどこにも確率的要素はありませんが、実はランダムな構造が潜んでいます。

(2)以下の文字列は、単純換字暗号とよばれる古典的な方式で、ある文章を暗号化したものです。つまり、aをf に、bをtにというように、aからzの順番を入れ変えて一対一に対応させることによって暗号化しています。

fyeaxjqfzjoxceddedcjbujcxbjhxgpjbegxrjukjzebbed
cjopjsxgjzezbxgjudjbsxjofdljfdrjukjsfhedcj

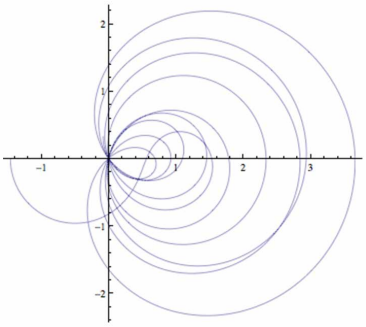
暗号化の方法が上の方式であるとわかっているとすると、マルコフ連鎖という確率論の基本的な道具で(ある程度)解読することができます。以下はその実行例です。

0: fyeaxjqfzjoxceddedcjbujcxbjhxgpjbegxrjukjzebbedcjopjsxgjzezbxgjudjbsxjofdljfdrjukjsfhedcj
1: ugado cut bohassash ie hoi ponm ianol ek taiiash bm fon tation es ifo busy usl ek fupash
2: upico fut bodissisd re dor hong rinol ek tirrisd bg mon titron es rmo busy usl ek muhisd
3: avico wat bohissish re hor pong rinol ed tirrish bg mon titron es rmo basy asl ed mapish
4: avice wat mepirrirp so pes leny sined ob tissirp my hen titsen or she mark ard ob halirp
5: apice was beginning to get dery tirel of sitting by her sister on the bank anl of hading
6: alice was beginning to get very tired of sitting by her sister on the bank and of having
7: alice was beginning to get very tired of sitting by her sister on the bank and of having
8: amice was beginning to get very tired of sitting by her sister on the banl and of having
9: alice was beginning to get very tired of sitting by her sister on the bank and of having

マルコフ連鎖の実行例(1000回毎の様子)

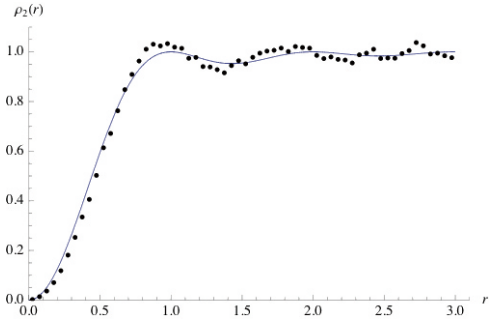
Googleなどの検索サイトの人気ページのランク付けにもマルコフ連鎖が使われていることはよく知られています。

(3)2000年にアメリカのクレイ数学研究所が、ミレニアム問題として100万ドルの懸賞金をかけて7つの問題を提出しました。そのうちの一つであるポアンカレ予想は最終的にはペレルマンによって解かれましたが、いわゆるリーマン予想は未解決の難問です。リーマン予想とは、$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ で定義されるリーマンのゼータ関数とよばれる複素関数の(非自明な)零点はすべて $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ という線上にあるだろうという予想です。この問題にもランダムな要素はまったくありません。しかし、多くの理論的考察やシミュレーションなどにより、その零点達があるランダム行列の固有値と同じ振る舞いをすることがわかってきています。



リーマンのゼータ関数の値の挙動:
$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\quad(0\le t\le 50)$

私の興味の一つは、上に挙げたような一見ランダムには見えない現象の裏に潜むランダムな現象を見つけて、それを確率論的手法を用いて研究することです。




ランダム行列(GUE)の固有値の2点相関関数

(1)の問題は1960年代に数学者の角谷静夫先生が興味を持たれて、イェール大学の同僚に伝えたところ、イェールの数学教室では一ヶ月くらいの間皆がこの問題に嵌ってしまったそうです。他の大学でも同じような現象が起こり、一時期流行ったゲーム「テトリス」と同じように、数学の研究を鈍らせるための某国の陰謀だったのではないかという笑い話もあったそうです。

(2)であげた問題は、アメリカのある州立刑務所の囚人の書いた壁の落書きが何を意味するのかを調べるために、刑務所の心理学者によってスタンフォード大学統計学教室の技術相談窓口に持ちこまれたことがきっかけだっただそうです。

(3)の研究の方向性は、プリンストン高等研究所のコモンルームでのティータイムに、物理学者であるダイソンから解析数論の研究者であるモンゴメリーへ述べられた一つのコメントから始まりました。数学者レンニは、「数学者とはコーヒーを定理にかえる機械である」と言ったそうですが、一杯のコーヒー(紅茶?)が重要な研究の方向付けをした場面でした。

IMIにおいても、自由な発想により実りある異文化間の交流ができることを心から願っています。

# 数論的不変式論とそれにまつわる幾何


## 石塚　裕大

**学位: 博士（理学）（京都大学）**
**専門分野: 数論、数論的不変式論、ディオファンタス幾何学**


私は主に**数論的不変式論**と呼ばれる分野を中心として研究活動をしています。大枠としては代数学の中の数論に属する分野です。その動機と手法から紹介します。

まず興味の対象は、代数体やそのイデアル類群、（有理数体上の）楕円曲線のモーデル･ヴェイユ群など、数論において重要だが扱いの難しい対象です。代数体や楕円曲線は無限に存在し、それぞれ例を作れと言われると比較的簡単に構成できます。しかし個々の例に対してイデアル類群やモーデル･ヴェイユ群を計算することは、しばしばかなり難しくなります。そしてパラメータを少し変更するとそれぞれの量は大きく変わります。

そこで、個々の例ではなく、代数体や楕円曲線全体を考えたときにイデアル類群などがどう振る舞うか、という問題を考えます。たとえばイデアル類群の『平均』位数や、モーデル･ヴェイユ群の階数が大きい楕円曲線の『割合』などを問題にします。こうした問題意識を持つ研究は総じて数論統計と呼ばれ、数論幾何、表現論、ランダム行列の理論などと結びつきながら発展しています。数論的不変式論の主な結果である M. Bhargava と A. Shankar の結果も、モーデル･ヴェイユ群の（高さに関する）平均階数の上界を与えるものです。

次にその手法です。まず数論的対象を、より取り扱いやすい代数群の線形表現の軌道として解釈します。この解釈を踏まえると、数論的対象の数え上げの問題が、ある基本領域中の格子点の数え上げに帰着される場合があります。そうした場合には、解析数論の技術と結びつけることで、もとの数論的対象についても平均･割合などが議論できるのです。私もこの流れを踏まえて、有理数体上の平面三次曲線のなかで、線形行列式表示と呼ばれる表示を持つものの割合を研究しました（例：図2）。実際には平面三次曲線で、ヤコビ多様体が正の階数を持つものの割合も調べています。

関連した別の研究として、ある数論的な性質を満たす曲線などの具体例を構成したり、あるいは具体的に与えられた曲線の性質を計算する研究も行っています。

その一例が、平面四次曲線の**双接線**についての研究です。平面四次曲線の双接線は、その曲線と二点で接する直線、あるいは一点で四重に接する直線を指します（図3）。平面四次曲線が有理数係数で定義されていても、双接線が有理数係数で定義できるとは限りません：たとえば虚数が係数に必要かもしれません。伊藤哲史氏、大下達也氏、谷口隆氏、内田幸寛氏との共同研究では、より強く双接線が**局所大域性**を満たさない有理数体上の平面四次曲線を構成しました。実数やp進数の範囲では双接線が見つかるものの、有理数係数では見つからない曲線です。

こうした方向性では、平面三次曲線の変曲点についても同様の考察を行っているほか、フェルマーの四次曲線についてその法を四としたガロア表現の決定も行っています。手法としては近年の結果を利用した数論幾何的な考察とともに、代数的な計算に数式処理ソフトを活用することで結果を得ています。

これらに通底するのは、代数幾何や不変式論の古典的な問題意識が、数論的な設定で新しい意味を帯びる点です。たとえば数論的不変式論で用いられた数論的対象と表現の軌道の対応の一部は、複素数体だと非常に単純な対応になってしまい、構造が却って見にくくなります。私はそういった数論的な設定で現れる構造について、数式処理の助けを借りながら研究を続けています。

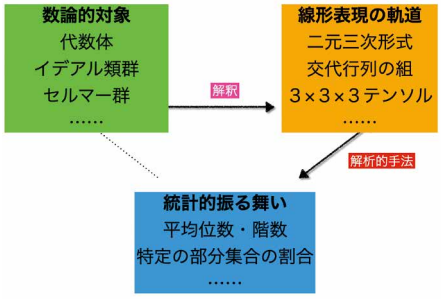



図1：数論的不変式論の議論の流れ

$$X^3+Y^3+Z^3=\det\begin{pmatrix}-X+2Y+Z & -2X+Y & X+Y\\ X-Y & X+Z & -Y\\ X & 2X+3Y & -2Y+Z\end{pmatrix}$$

図2：線形行列式表示の例

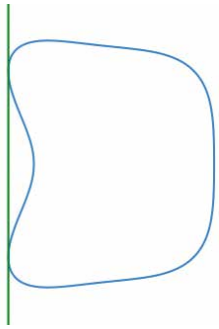


図3：ある平面四次曲線（青）の双接線（緑）

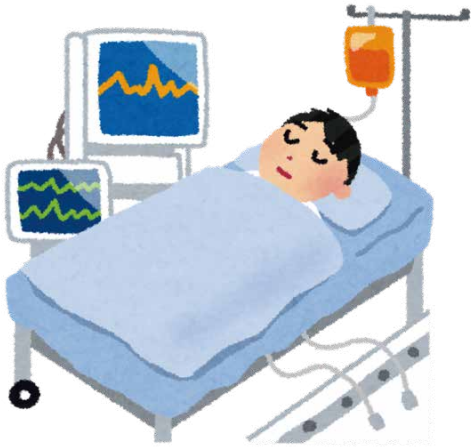
# 数理科学的観点からの血糖値管理

## 小谷　久寿

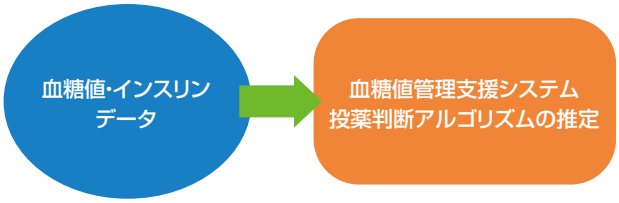
**学位: 博士（数理学）（九州大学）**
**専門分野: 位相幾何学、整数論、数論的位相幾何学**

ここのところ、私は他大学の医療分野の研究者や応用数学者の方たちと血糖値管理に関する分野の枠を超えた共同研究に取り組んでいます。もう少し具体的に書くと、これは手術後集中治療室（ICU）患者のデータを用いて、現実の医療現場に役立つような血糖値を管理するアルゴリズムの開発を目指した研究です。この研究は上に掲げている私の専門分野のお話とは異なるものですが、ここでは産業社会への数学・数理科学の応用を目指したIMI関連の研究として、それについてお話しします。

手術直後ICU患者は手術侵襲によるストレスや強心剤等による影響で血糖値の急上昇が見られます。高血糖は多臓器不全・昏睡・予後悪化等を引き起こす原因となるため、インスリン投与により血糖値を適正値内に維持することが重要であると考えられています。しかし、インスリンによる血糖値管理はインスリン作用の遅延やインスリン感度の時間変化等の様々な要因によりコントロールが難しく、さらにインスリン投与により逆に低血糖に陥ってしまった場合には深刻な予後不良を引き起こしてしまうという問題があります。現在、一定の条件のもとICUでの血糖管理は看護師によって行われていますが、標準的な管理アルゴリズムは未だに確立されておらず、血糖値のコントロールは看護師の経験に依る部分が大きいのが現状となっています。ただ、そうした血糖値管理は看護師の負担も大きく、手法の標準化が望まれています。



そこで、この共同研究では、数理的なアプローチと医療現場での知見とを組み合わせ、実際の医療現場で役立つような血糖値管理をアシストする標準的手法の開発や熟練看護師の投薬判断アルゴリズムの推定を行うことを一つの目標としています。




このような問題に対する数理的なアプローチとして、これまでにも血糖値管理に関連する血糖値・インスリンの数理モデル等が考案されてきましたが、生体における動態を表現する数理モデルには観測できない変数が多く含まれていたり、患者ごとに固有のパラメータを推定する必要がある等、難しさがあったり、それぞれできることや目的が異なっています。また、近年データ科学分野で様々な新しいデータ駆動型の研究手法が開発され続けています。この共同研究では、従来の手法と新しい手法を取り入れつつ、今回の研究の目的に即したより良いアルゴリズムの開発に貢献すべく努めています。

血糖値管理のような医学的知見が重要である共同研究においては、数学・数理科学的な立場だけからではなく、外科医師、ICU専門看護師を交えて協働的に研究を進めることが重要です。医療従事者の方々とのコミュニケーションを大事にしながら着実に共同研究を進めて、数学・数理科学の医療分野・産業社会への応用へと繋げていきたいと思います。

# 分野の交差点


## 矢澤　明喜子

**学位: 博士（理学）（信州大学）**
**専門分野: 可換環論、組合せ論**


私は可換環論と組合せ論が交錯する分野で研究をしています。いくつかの分野が交錯している分野の面白さに、一つは様々な観点から物事を捉えることができるというのが挙げられます。例えばパスカルの三角形（図1）を考えます。パスカルの三角形は、一行目に1、二行目以降各行の両端に1、それ以外は左上と右上の和と帰納的に定義されます。このときパスカルの三角形に現れる行と二項係数の列が対応することはよく知られています。図2を参照してください。また、パスカルの三角形の各行と単体の各次元面の個数が対応しています。ただし、単体の次元面の個数の列は-1次元面から始まっているとし、-1次元面の個数は1と定義しています。単体とは点、線分、三角形、四面体などを一般の次元に拡張した概念です。図3は四面体です。四面体の各次元面の個数の列がパスカルの三角形の5行目に対応していることを確認してみてください。

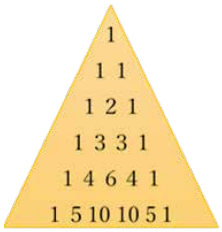



図1

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{k}, \ldots, \binom{n}{n}$$

図2

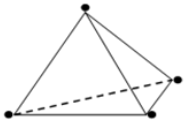


図3

二項係数についてもう少し掘り下げていきましょう。図2にあるような二項係数の列は対称的（回文的）です。これは二項係数の定義から直ちに証明することができます。二項係数は様々な分野においてしばしば現れる基本的なものです。二項係数の列は対称的（回文的）であることを可換環論の観点から証明してみます。環$A=\boldsymbol{k}[x_1, x_2, \ldots, x_n]/(x_1^2, \ldots, x_n^2)$を考えます。この環は次数付環となり各斉次空間はベクトル空間となります。$n$変数から$k$個選んだ、$\binom{n}{k}$個のsquarefree単項式たちが、$A$の$k$次斉次空間の基底になっています。つまり$A$の各斉次空間の次元が二項係数となっています。単項式の割る割られるという関係を半順序として、環$A$の基底たちは半順序集合となります。図4は$n=4$の場合のHasse図です。環$A$は対称性の良い環であるGorenstein環になっています。詳細は省きますがそういった対称性から二項係数の列は対称的（回文的）であることが示されます。実はもっとよいことに二項係数の対称性だけではなく他の性質もわかります。

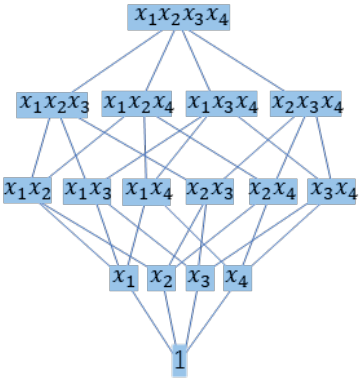



図4

二項係数を例に可換環論と組合せ論の交差点を見ましたが、そういった例は他にもたくさんあります。また、可換環論と組合せ論に限らず様々な分野の交差点がありそこから分野が日々発展しています。分野の交差点で研究することの難しさは様々な分野の知識を必要とすることが挙げられますが多くの気付き･発見があります。こういった気付き･発見を標識にしてこれからも研究を頑張っていきたいです。

# トポロジーとその諸科学への応用

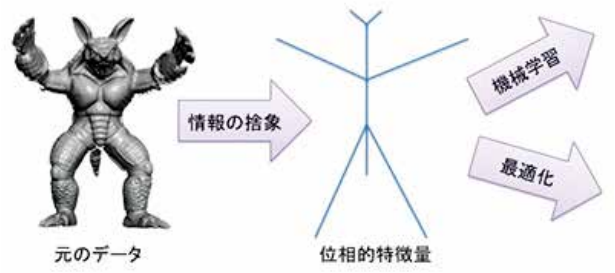
## 鍛冶　静雄

**学位: 博士（理学）（京都大学）**
**専門分野: 位相幾何学、リー群、応用数学**

私は図形をおおざっぱに調べる**トポロジー**（位相幾何学）という分野の研究をしています。どれくらいおおざっぱかというと、ドーナッツとマグカップの形が見分けられないくらいです（佐伯修教授の研究･技術カタログを参照）。数学に限らず多くの学問は、対象を**分類**することを一つの目標としています。どんな性質に着目するかによって分類の基準が変わってきて、猫と犬というように大雑把に分けることもあれば、秋田犬と柴犬と言うように詳しく分類することもあります。トポロジーでは図形、より数学的にいうと空間を対象としますが、おなじみの合同や相似よりずっと荒く、連続的に変形できるものは区別しません。そんな"いいかげん"なことで役に立つのかと思われるかもしれませんが、実はさまざまな場面で活躍します。

まず、人間の視覚や空間把握は非常に大雑把ですが、多くの面でまだ機械を凌駕しています。細かな変化に気がつくのは苦手な反面、手書きの歪んだ文字や、笑顔でも泣き顔でも同一人物を認識することができます。また全く未知の図形、いわゆるビッグデータなどの高次元や時に無限次元の空間を扱う時、まずは大局的な情報が重要になります。新発見の島を調べるのに、いきなりルーペを持ち出してもあまり得るところはありません。それよりも高台に登っておおまかな形を知りたいでしょう。

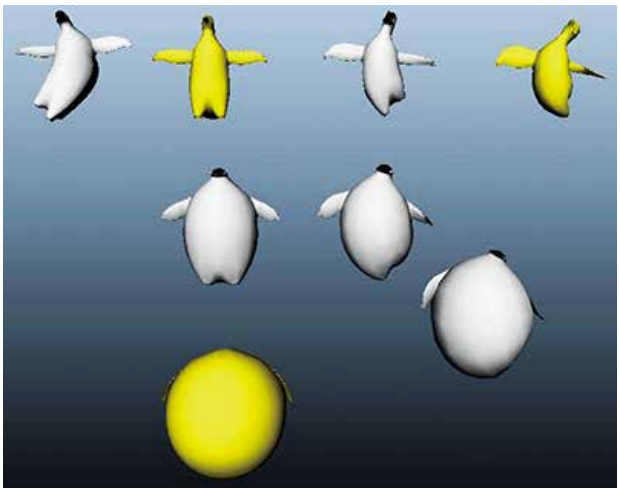
もう一つ別の観点からは、柔らかい性質は適用範囲が広い、というのも利点に挙げられます。硬い性質を扱う数学的事実、例えば、球の体積の公式は、真に球なものにしか適用できませんが、世の中に存在するものはイデアからはかけ離れていて、常に誤差が生まれます。一方で、代表的な位相的性質である“穴の数”（正確にはベッチ数）は、歪んだ図形でも問題なく扱うことができます。




（アルマジロのモデルは The Stanford 3D Scanning Repository より）

上にあげた特徴を眺めてみると、細かな差異に敏感な反面、全体像を捉える直感が働かないコンピューターと対極的に見えてきます。実際にトポロジーは、人間のもつ俯瞰的なものの見方を定式化し、コンピューターにその能力を授ける可能性を秘めています。

私は、空間のトポロジーを代数的に調べることに興味があります。主にリー群や等質空間といった対称性の高い空間の、位相不変量を定義･計算することを専門としています。また、代数はコンピューターの得意とする対象であり、応用として図形をコンピューターで処理するアルゴリズムの研究にも携わっています。一例として、下図にペンギン算をお見せします。形を代数化することで、異なった形状を足し合わせたり平均をとったりすることが可能になります。また様々な形の"地図"ができ（座標が導入され）ることで、どの形はどの形に似ているといった解析が可能になります。この考え方を応用して、コンピューターで形状をデザインする方法の開発や、医用画像･センサーデータの解析も行なっています。



3羽の黄色いペンギンをもとに、足し合わせによって
ペンギンのバリエーションを生み出す

# 物質構造解析の数理


## 富安（大石）　亮子

**学位: 博士（数理科学）（東京大学）**
**専門分野: 応用代数・数論、数理結晶学、アルゴリズム**


物質構造解析研究は、調和解析・信号処理・最適化・統計学など様々な手法を用いたアルゴリズム開発としての側面がありますが、私の場合、新しい知見を得るのに数論・代数学といった純粋数学のアイデア・技術を組み合わせることをよく行っています。

以下では、学術論文に加え特許出願に至った（したがって割と非数学者向けの）3つのプロジェクトを紹介します。

### （1）格子決定（Ab-initio indexing）に関わる*CONOGRAPH*の方法

“Ab-initio” とは専門用語で、物質構造（この場合は結晶格子）に関する事前情報を用いない解析のことです。以下の手法開発を行い結晶学分野でそれぞれ論文を書いた後、粉末回折用[1]・電子線後方回折用プログラム[2]を開発、web上で配布しています。開発には当時所属していたKEKの研究室、共同研究を実施していた（株）日本製鉄からの支援を受けました。

- 大きな観測誤差下での格子対称性（ブラベー格子）の決定…格子基底簡約の応用
- ピークサーチ
- 実験データによくフィットする解の検出に用いるfigure of merit
- 消滅則の一般的性質の導出（トポグラフを用いて記述）
- 解析の解の一意性（Ambiguity）の高速判定法…数論の2次形式論の応用

開発したソフトウェアCONOGRAPHは解析の成功率を向上させました。得られた数学の結果は様々な回折データからの格子決定に対応できます。

### （2）半正定値計画緩和法（SDR）に基づく結晶・磁気構造解析の方法

非線形最適化におけるローカルミニマムの問題はよく知られています。SDRは双対定理で保証された状況下において2次計画問題の大域的最適解を求める方法です。一般に、結晶構造のフーリエ変換すなわち「構造因子」の偏角を求める位相回復の問題（絶対値は観測値から得られる）は2次計画問題として表現できます。

もともと未知構造解析の解の一意性を調べるために始めた研究ですが、偶然、実験家との共同研究で役に立つ出口（磁気構造解析[3]）も見つかりました。SDRの優れた性能は物質構造科学分野で代数計算・離散数学の応用を進めるためにも有用と考えています。

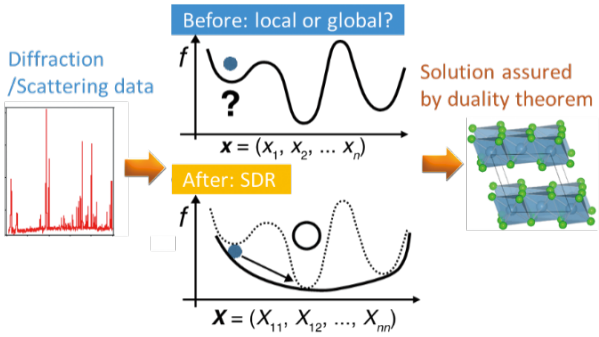



図1: SDRを用いた構造解析法の概要

### （3）黄金角の方法の一般化・高次化

葉序・ひまわり頭部に見られるパターンのモデリングに使用される黄金角の方法の一般化は様々な文献で試みられ、取り上げられた未解決問題でしたが、マルコフ理論の高次元版であるproduct of linear formsと呼ばれる数の幾何・数論の問題に帰着させることで一般曲面・一般次元に適用可能となりました。

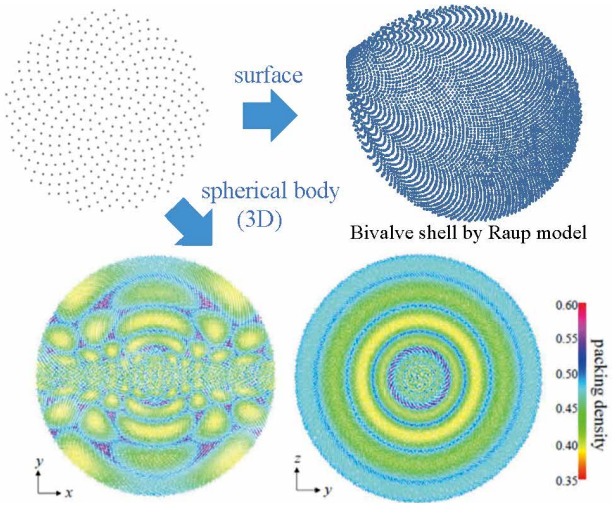



図2: 適用結果（3Dは断面図、着色は各点近傍のパッキング密度による）

モデリング・パターン生成・メッシュ生成において今回開発した方法・理論の応用を展開する予定です。


[1] https://z-code.kek.jp/zrg/
[2] J. Appl. Cryst. (2021) 54 (2), 624-635
[3] Scientific Reports (2018) 8:16228.

# グラフ解析と最適化問題の高速計算及び実社会への応用

## 藤澤　克樹

**学位: 博士(理学)(東京工業大学)**
**専門分野: 最適化問題、グラフ解析、高性能計算**

新しいスーパーコンピュータの応用として大規模なグラフ解析が注目を集めている。グラフは点集合と枝集合から構成される。具体的には図1のように様々な応用分野おいて解析の対象とする事象の関係(Relationships)を点と枝で表現していく。例えば道路交通ネットワークでは点は交差点、枝は交差点間の道路に該当する。またTwitterなどのソーシャルネットワークの解析では、点はユーザ、枝はユーザ間のフォロー関係(あるいはメッセージ送信)などに関連させることが多い。さらに各枝を連結させてグラフを構成して(Step 1)、目的に応じて最短路検索などのグラフ解析を行う(Step　2)。またグラフ解析の結果は元の応用問題の分析や理解のために使用される(Step　3)。実際にカーナビゲーションシステムでは道路ネットワークがグラフデータとして内蔵されていて、ユーザの指示に応じて出発地点と目的地点間の最短路検索を行っている。このように社会における実データをグラフデータに変換して、計算機で高速処理する需要が非常に高まっている。

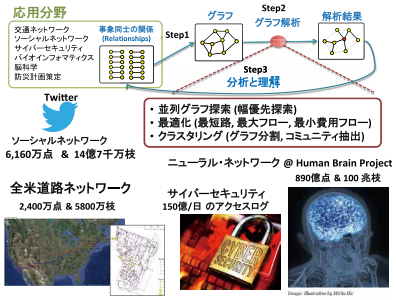



図1：グラフ解析の利用方法と応用分野

グラフ解析に関しては数年以内に数千万規模の並列性を備えたポストペタスパコン上での高性能な超大規模グラフ処理技術が確立され、ストレージの階層性が深化したポストペタスパコン上での高性能な超大規模グラフ処理技術が開発されていくと予想されている。これによって防災計画の策定、災害時の避難と誘導及び情報収集と解析、スマートグリッドによる高度かつ安定な電力供給など、安全安心な社会基盤実現に貢献することが可能となる。以下の分野に対してグラフ解析を適用することを想定している(図2)。

1. 交通データに対する経路探索:動的に変化する交通量等から高速な重要度判定を行うことによって、交通管制等に活用する。
2. ソーシャルネットワークデータ(マイクロブログやSNSなど)やウェブデータに対する動的な重要度、影響度の判定。各点の周辺、及び広域内における影響(情報の伝播力)を推定する。
3. その他:疫病の拡散、人口の増減、経済動向等の分析。ライフライン等の基盤計画(電力、水、食料)。生命科学系(創薬、遺伝子)。ビジネス系(金融、データマイニング)。安全保障分野(組織構成の解明、事件事故の事前予測)。

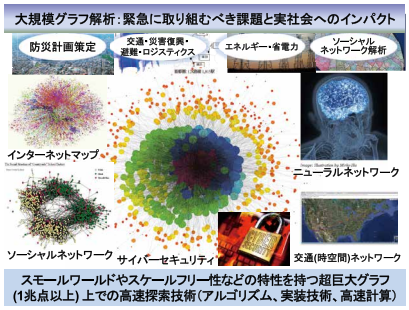
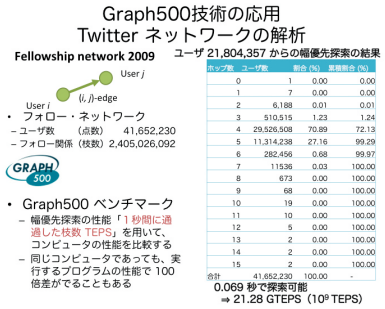



図2：大規模グラフ解析とその応用

従来は計算中心であった高性能計算(ハイパフォーマンスコンピューティング)の分野においても大規模なデータ処理を中心に扱うアプリケーション(データ･インテンシブアプリケーション)が増加している。Graph500 (http://www.graph500.org)は並行探索、最短路探索をはじめとする最適化、極大独立集合などのグラフ解析、などの複数のグラフ処理カーネルからなるベンチマークにより計算機の性能を評価しランキングを行う。グラフ解析はサイバーセキュリティ、創薬、データマイニング、ネットワーク解析などの分野において必要とされる重要な計算カーネルとして位置づけられている。




| ホップ数 | ユーザ数 | 割合 (%) | 累積割合 (%) |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0.00 | 0.00 |
| 1 | 7 | 0.00 | 0.00 |
| 2 | 6,188 | 0.01 | 0.01 |
| 3 | 510,515 | 1.23 | 1.24 |
| 4 | 29,526,508 | 70.89 | 72.13 |
| 5 | 11,314,238 | 27.16 | 99.29 |
| 6 | 282,456 | 0.68 | 99.97 |
| 7 | 11536 | 0.03 | 100.00 |
| 8 | 673 | 0.00 | 100.00 |
| 9 | 68 | 0.00 | 100.00 |
| 10 | 19 | 0.00 | 100.00 |
| 11 | 10 | 0.00 | 100.00 |
| 12 | 5 | 0.00 | 100.00 |
| 13 | 2 | 0.00 | 100.00 |
| 14 | 2 | 0.00 | 100.00 |
| 15 | 2 | 0.00 | 100.00 |
| 合計 | 41,652,230 | 100.00 | - |

図3：Graph500 の技術を応用した Twitter ネットワーク解析

このGraph500に対するBFSの高速実装は図3のようにTwitterネットワークの解析等に用いることができる。図3ではTwitterのユーザとフォロー関係を表したFellowship network 2009(点数:4100万、枝数24億)を用いて特定のユーザからBFSを行い、そのユーザを根(root)とするBFS木を構築している。これによって、あるユーザから何ホップ以内に何人のユーザが存在しているかについて高速に探索することが可能になる。この場合では24億枝のグラフに対してわずか0.069秒でBFS木の構築に成功している。

また最適化問題の高速計算と実社会への応用にも取り組んでおり、例えば半正定値計画問題(SDP)は組合せ最適化、システムと制御、データ科学、金融工学、量子化学など非常に幅広い応用を持ち、現在最適化の研究分野で最も注目されている最適化問題の一つとなっている。SDPに対しては高速かつ安定した反復解法である内点法アルゴリズムが存在しているが、巨大な線形方程式系の計算(行列要素の計算と行列のCholesky分解)が大きなボトルネックとなっている。最近の結果では多数GPUの活用や計算と通信のオーバーラップ技術を応用することによって、主要なボトルネックの1つである線形方程式系のCholesky分解の高速化と世界最大規模のSDPを高速に解くことに成功した(最大で1.713PFlopsの性能を達成：図4)。

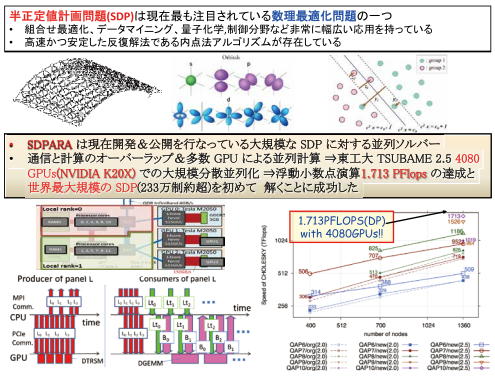



図4：半正定値計画問題に対する大規模並列計算

# 圧縮性回転粘性流体の数学解析


## 藤井　幹大

**学位: 博士(数理学)(九州大学)**
**専門分野: 流体力学に現れる偏微分方程式の数学解析**


大気や海洋などの大規模な地球流体の運動では、地球の自転の影響によるコリオリ力が流体の運動に作用することが特徴的である。実際、流体の基礎方程式であるNavier-Stokes方程式を回転座標系の問題に書き換えた際に流体の加速度を記述する項にコリオリ力を表す異方的な線形項が現れる(図1)。流体が密度変化しない「非圧縮性回転流」は物理的にも自然な状況であり、この場合では数学的にも多くの研究が行われてきた。特にコリオリ力は線形解に分散性の効果をもたらすため、流体のエネルギーには一切影響しないにも関わらず、大きい初期値に対して回転速度を十分速く設定することで時間大域解を構成できることが知られている。

$$
\begin{cases}
\partial_t \rho + \mathrm{div}\,(\rho u) = 0 & \text{: 連続の式} \\
\rho \underbrace{\left(\partial_t u + (u\cdot\nabla)u + \overbrace{\Omega(e_3 \times u)}^{\text{コリオリ力}}\right)}_{\text{流体の加速度}} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^2}\nabla P(\rho)}_{\text{圧力項}} = \underbrace{\mu\Delta u + (\mu+\mu')\nabla \mathrm{div}\, u}_{\text{粘性項}} & \text{: 運動方程式} \\
\rho(0,x) = \rho_0(x), \quad u(0,x) = u_0(x) & \text{: 初期条件}
\end{cases}
$$

- $\rho = \rho(t,x) > 0$ : 流体の密度
- $u = u(t,x) \in \mathbb{R}^3$ : 流体の速度場

(簡単のため遠心力を無視したモデル)

図1

一方で、流体の密度変化を考慮した「圧縮性回転流」の場合の数学的な研究はあまり行われていないようである。地球流体力学では非圧縮性流体で十分であるため圧縮性性流体の解析は軽視されてきたという背景が想像されるが、圧縮性回転流には回転浅水波方程式などの物理的にも重要な応用を持つ方程式があるため、その数学解析は重要な課題である。最近の私の研究により、圧縮性回転流は非圧縮性回転流と異なる性質を持ち特徴的な挙動を示すことが明らかとなった。大きな違いは密度変化を考慮したことでコリオリ力が流体のエネルギーに影響を与える点である。特に、コリオリ力は0階の線形項であるため線形解の時間減衰率を悪くさせる効果を持つため、非線形解の時間大域的可解性の構成では困難点が多いが、技術的な工夫を施すことで解決することが出来た。

図2

今後の研究では、木星の大赤斑(図2)の解析などにも用いられ応用上重要な回転浅水波方程式の解析に取り組む。上記で述べた圧縮性回転Navier-Stokes方程式の研究は3次元流体であったが、回転浅水波方程式は2次元流であるため低周波での非線形評価がさらに難しくなる。さらに、回転速度を無限大とする特異極限を考えると、3次元の場合とは異なった振る舞いをすることも期待され多くの興味深い問題がある。

# L1正則化に基づくスパース多変量解析

## 廣瀬　慧

**学位: 博士（機能数理学）（九州大学）**
**専門分野: スパース推定、L1正則化、多変量解析**

近年、ビッグデータ解析が重要視されていますが、データ量が多くなった反面、データの冗長性も増してしまい、必要のない情報を取り除いて有効な情報のみをうまく抽出することが必要とされています。それを実現する、極めて有効な方法の一つが、L1正則化法をはじめとする、スパース推定です。スパース推定とは、数万·数億にものぼる数のパラメータが存在するときに、ほとんどを「ゼロ」と推定することができる方法であり、非ゼロ要素に対応する変数のみが有効となります。この方法の良い所は、たとえ数万オーダーの次元のデータであっても、わずか数分で計算が完了してしまうくらいに高速なところです。計算効率が良い上に、統計的にも良い性質がたくさんあるため、L1正則化は多くの統計学者を魅了しているのではないかと思います。

私は、上記のL1正則化法を使った統計解析、とくに、多変量解析に興味を持っています。多変量解析とは、大量の変数があった時、似た変数をうまくまとめたりすることにより、変数間の関係性を見出す方法です。この方法は、古くから現在までずっと使われ続けている基本的な手法です。私は、多変量解析の中でも、因子分析と呼ばれる手法に興味を持っています。因子分析は、もともと心理学者が作った方法なのですが、近年は生命科学でも使われています。また、因子分析を拡張したテンソル分解は、機械学習の分野で使われ始めています。因子モデルの研究は今後ますます発展していくと考えられます。以下、私の最近行った2つの研究を紹介します。

### （1）因子分析のスパース推定

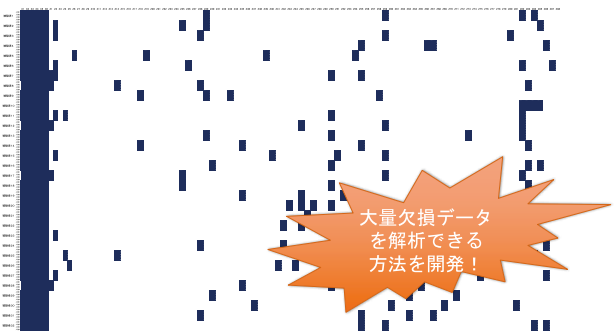
因子分析の面白い点は、モデルそのものに識別性がないというところです。このような解が一意に存在しないモデルは、統計学者からすると「奇異なモデル」となります。実際にどのようにパラメータを推定するかというと、因子回転と呼ばれる、因子分析独自の最適化問題を解きます。このような問題設定自体、他のモデルにはない独特なものですが、それが50年以上も使われてきたスタンダードな方法です。

私は、この因子分析モデルにL1正則化を適用すると何が起こるかを考えてみました。すると、正則化法が、因子回転の一般化であり、更に因子回転よりもスパースな解が得られるということを理論的に示すことができました。私はこの関係性を見出しただけでなく、パラメータをある程度高速に推定できるアルゴリズムを考え、さらにソフトウェアパッケージfanc（https://cran.r-project.org/web/packages/fanc/index.html）を作りました。実際にこのパッケージを使った論文もいくつかあります。

### （2）データが大量に欠損する場合の因子分析モデルの最尤推定

NTTと共同研究している際、データに大量の欠損がある場合の因子分析をしなければならないということがありました（図参照）。具体的には、アンケートを行う際、すべてのアンケート項目に答えるのでなく、その中のごく一部を選び、その選んだ項目のみ回答するというデータの取り方をしました。

データが欠損する場合、パラメータはEMアルゴリズムによって推定できますが、欠損数が多い場合、通常のEMアルゴリズムだと計算時間がかかってしまいます。そこで私は、大量欠損時の因子分析モデルにおけるEMアルゴリズムを提案しました。このアルゴリズムは、従来のEMアルゴリズムよりも、数百倍、場合によっては数千倍もスピードが早い事がわかりました。




＊青く塗りつぶされた部分のみ観測されている

# 位相的データ解析と層の理論


## 池　祐一

**学位: 博士(数理科学)(東京大学)**
**専門分野: 位相的データ解析、超局所層理論**


私は、位相的データ解析と層理論について研究しています。これらはそれぞれ実応用と純粋な数学理論として全く異なるように思えるかもしれませんが、最近では互いに影響し合いながら研究が進んでいます。

**(1)位相的データ解析(パーシステントホモロジー)**

図1にあるような2つの点群を見たときに、われわれ人間は穴の有無で2つを区別することができます。このようなデータの「大まかな形」を取り出して、その情報をコンピュータに扱わせようとする手法が位相的データ解析です。数学においては、連続な空間の「大まかな形」はトポロジーという分野で研究されていて、穴の数はホモロジーという道具で調べられます。この枠組みを使って、点群の形を調べる最も単純なアイデアは、各点を中心とするある半径rの円盤たちの和集合を考えて、そのホモロジーを見ることです(図2)。しかし、この方法では円盤の半径によって、ゴミのような小さな穴しか見えなかったり(図2(a))、穴が全然見えなかったり(図2(c))します。

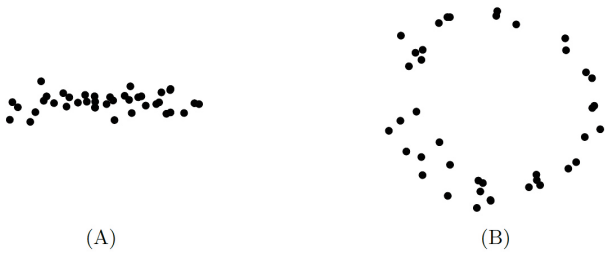



図1：2つの点群

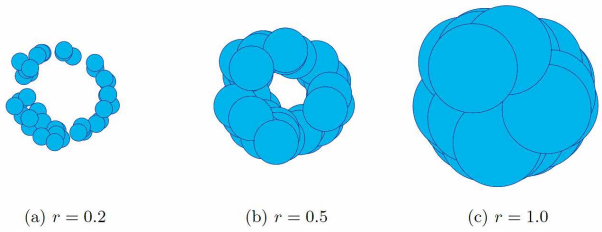



図2：異なる半径の円盤の和集合

このやり方には、見える形が半径rの大きさに大きく依存してしまう・適切な半径rをデータから決めることは一般には難しいという問題があります。そこで、1つの半径rを設定することは諦めて、rを動かして点群の「形」、特に穴の数をあらわすホモロジーがどのように変わっていくかを考えることにします。すると、穴がrに関してどのくらい継続(persist)しているかの情報を見ることで、大きい穴とゴミのような穴を区別することができます。この手法はパーシステントホモロジーと呼ばれています。

このようにデータからパーシステントホモロジーを用いて取り出した「大まかな形」をあらわす特徴量は、機械学習の入力などに使うことができ、様々なタスクに役立てることができます。私は、ニューラルネットワークにパーシステントホモロジーを使うことでネットワークの状態を調べたり、ネットワークの学習にパーシステントホモロジーを用いたりすることに興味を持っています。

**(2)層理論とパーシステントホモロジー**

上のような研究の他に、層理論とパーシステントホモロジーのつながりについても研究しています。層は代数幾何やトポロジーにおいて役立つ数学的対象ですが、近年は層を使ってパーシステントホモロジーを理解しようという試みがいろいろと現れています。

私は、パーシステントホモロジーの間の距離を層理論的に解釈して、その理解を位相的データ解析や他の数学分野に役立てようとしています。最近は、層の間の距離とジグザグパーシステンス間の距離との関係を調べたり、層の間の距離とシンプレクティック幾何学におけるエネルギーとを関係づけたりしました。

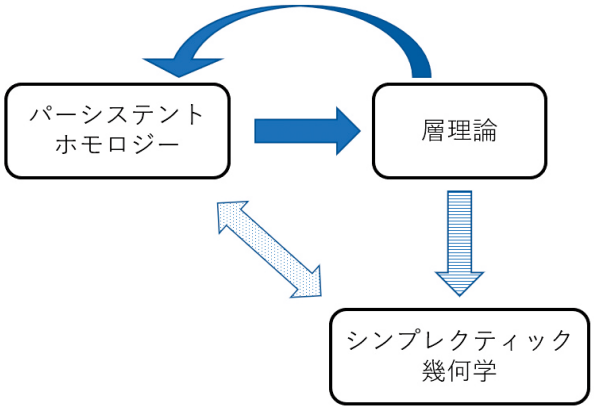



図3：パーシステントホモロジー・層理論・シンプレクティック幾何学の関係

応用数学と純粋数学の狭間での研究によって、それらの垣根を越えた交流が起これば良いと考えています。

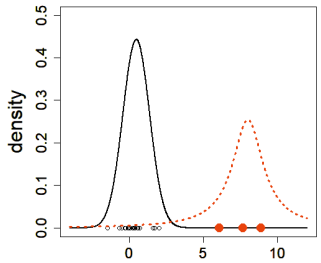
# 統計的ダイバージェンスに基づく頑健なモデル選択規準

## 倉田　澄人

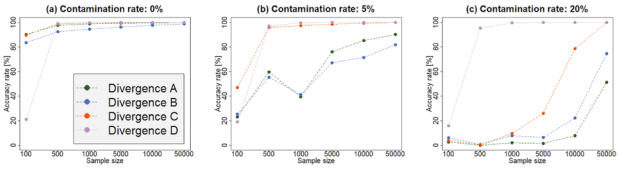
**学位: 博士（理学）（大阪大学）**
**専門分野: 数理統計学、モデル選択、ロバストネス**

例えば突出した能力、例えば災害級の現象、例えば観測機器の故障、例えば人的なミス…等々、現実のデータには様々な由来を持った、他の観測値から見て大きく外れた値を取るデータが付き物です。これを「外れ値」と呼びます。この外れ値ですが、何を以て外れ値とするか、どこまでが外れ値でなくどこからが外れ値であるかという明確な定義、線引きは与え難いものです。また、災害やミスを完全に零にするということが非常に難しいため、外れ値の発生を防ぐことは事実上不可能と言わざるを得ません。その為、外れ値が混ざっていてもその影響を小さく抑えられる「頑健（ロバスト）」な分析手法が、分析において重要な意味を持つと考えられます。私は、モデル選択問題を中心に、頑健な手法について研究を行っています。モデル選択規準は、自然現象や人間の行動を表現する数理モデルの候補の中から最も好ましいモデルを択ぶ尺度です。私はこれまで特に、確率分布間の遠さを測る「統計的ダイバージェンス」を用いて、現象や行動の根底に在ると考えられる「真の分布」とモデルとの近さを測るという観点から導出されるモデル選択規準を検討してきました。モデル選択問題を考えるにあたっても、頑健性は重要な性質と言えるでしょう。しかし、従来広く用いられている、Kullback-Leiblerダイバージェンスに基づいたモデル選択規準は、データに外れ値が混ざっていると選択精度を落としてしまう傾向にあることが指摘されています。そこで本研究では、統計的推測において頑健性に優れることが知られている、「BHHJダイバージェンス」と呼ばれるダイバージェンスに基づいて、従来のAICやBICを拡張したモデル選択規準を導出し、検討してきました。

外れ値は頻繁に、パラメータ推定やモデル選択へ悪影響を及ぼします。モデル選択における頑健性を議論する為には、モデル選択規準の値の、外れ値によって生じる変動を評価する必要があると考えられます。本分野ではしばしば、データを発生させている分布に外れ値が含まれている場合といない場合との差を評価することで、外れ値の混合に対する敏感さを評価します。観測値の大部分は「真の分布」から発生していると想定し、そして外れ値は「真の分布」とは別の分布から出現しているものだと解釈します（図1）。私はこれまで、多くのダイバージェンスに基づいたモデル選択規準の頑健性を比較検討してきました。結果として、BHHJダイバージェンスを筆頭に、幾つかのダイバージェンスに基づいた規準の頑健性が分かってきました（図2）。あらゆる現象に対してモデルが作成出来る以上、良きモデル選択規準を検討することは、あらゆる分野に対して意義を持ちます。頑健性をはじめ、選択に資する様々な性質を詳しく調べることで、文理を問わず幅広い分野を支えられる研究を目指しています。




（図1）一つは黒い線で画かれた「真の分布」、もう一つは赤い線の外れ値を発生させる分布、これらの異なる確率分布を考え、観測値はこの二つの分布の混合から発生していると想定します。もし、黒の分布のみからデータが出てきているときと、混合分布から出てきているときで分析結果が大きく異なれば、その手法は外れ値に対して敏感（頑健ではない）と考えることが出来ます。




（図2）一般化線形モデルの数値シミュレーションにおける、幾つかのダイバージェンス（Divergence A-D）に基づいたモデル選択規準のaccuracy rate（正しいモデルを選択した率）です。三つのグラフは異なる外れ値の混合率（0%、5%、20%）に対応しており、それぞれの横軸はデータ数を指します。Divergence AとBに基づく規準は外れ値があると精度が大きく下がっており、混合による悪影響を敏感に受けていることが分かります。一方でDivergence Dの規準は、全ての混合率に対してほぼ同じaccuracy rateになっており、強い頑健性が見て取れます。

# 小区分別統計的推測法の理論発展及びその活用


## 廣瀬　雅代

**学位: 博士(工学)(大阪大学)**
**専門分野: 統計科学、小地域推定、混合効果モデル**


データサイエンス全盛のこの時代に、Evidence Based Policy Making (EBPM)の重要性が認識されつつある。その中で小区分ごとの実態把握に基づくより丁寧な計画立案への期待も大きくなっており、調査データによって小区分ごとの特性値を推定する際、区分ごとの情報のみならず、統計的モデルを介して他の区分からの情報を有効に活用することで、統計的精度向上が期待できる場合がある。

そのため、このような統計的推定手法を活用したエビデンス資料作成･提供は、有用な計画立案の礎になり、社会的課題解決への期待を高めることができると考えている(図1参照)。

統計的モデルを用いたモデルに基づくアプローチの研究は、海外の官庁統計分野でも盛んに行われ発展を遂げている。官庁分野のみならず、他の様々な応用分野で重要視されている研究でもある。ここで、モデルに基づくアプローチに関する私の研究内容を2つ簡単に紹介する。

### (1)小区分別統計的推測法の理論

小区分ごとに特性値を推定する場合、統計的モデルを活用したモデルに基づくアプローチでは、仮定モデル下の線形不偏なクラスの中で平均二乗(予測)誤差を最小化する最良線形不偏予測量に対する経験的最良線形不偏予測量が多くの場面で活用される。しかし、従来用いられる方法は実用面からの問題を複数抱えている。私は、その経験的最良線形不偏予測量とその予測誤差の問題を考慮に入れた、統計的精度の損失がほとんどない、改善可能性のある手法の開発を目指している。また、リサンプリング法と同様の統計的精度を保ちながら、計算負荷を軽減できる、より実用的な経験的ベイズ信頼区間法の提案も行っており、さらなる効率的な統計的手法開発とその理論保証に取り組んでいる。

### (2)実データ分析への応用

開発した統計的手法を実データに適用し、質の良いエビデンス資料作成に取り組んでいる。これまでにも、過去に開発した統計的推定手法を、わが国のある都市住民を対象とした意識調査データに適用し、小区分別に防災意識レベルの実態把握を図っている。さらに、国勢調査小地域集計との共通項目データを活用して、国勢調査結果との誤差を調べている。その結果、(国勢調査小地域集計を真とした場合,)慣習的に用いられてきた推定手法と比べたときの適用手法の一種の有用性を示すことに成功している。詳細は廣瀬ら(2018、日本統計学会誌)を参照されたい。

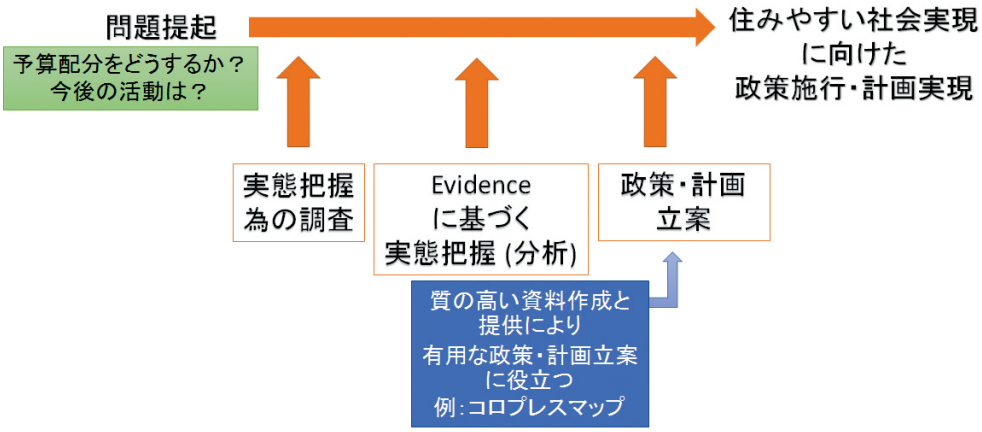



図1　EBPMのための資料作成における統計的研究の立場の一例

# 数学と暗号の交差点

## 縫田　光司

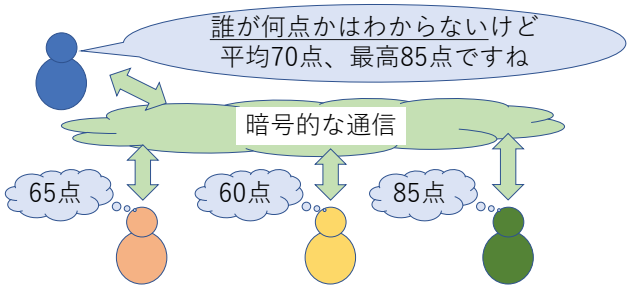
**学位: 博士（数理科学）（東京大学）**
**専門分野: 暗号数理、秘密計算、組合せ論的群論**

インターネット経由での安全な買い物など、現代の便利な生活の基盤となっている情報技術のさらに基盤となっている技術の一つが暗号技術です。さらにその暗号技術の基盤として数学が役立っています。1970年代後半に考案されたRSA暗号では初等整数論が、1980年代半ばに考案された楕円曲線暗号では名称の通り楕円曲線の性質が活用されています。さらに、来たるべき量子コンピュータ時代に備える次世代暗号（耐量子計算機暗号）には、線型代数やグレブナー基底や高次元整数格子などまた別のさまざまな数学が現れます。

数学者の目線で暗号分野を眺めたとき、「より新しく多彩な数学を実戦投入する」楽しさはもちろんのこと、それ以外に「素朴な数学的道具でも、使い方次第で大きく花開く」という楽しさや、「安全性」など暗号分野の様々な概念に対して「より直感に沿った、かつ理論的にもより取り扱いやすい「良い」定義を探究する」といった楽しさも感じられます。

暗号分野で私が近年主に取り組んでいる研究テーマは「秘密計算」と呼ばれる技術です。秘密計算は、複数人がデータを持ち寄って行う情報処理において、「データを互いに見せない」のに「欲しい計算結果はちゃんと得られる」という手品のような性質を実現する暗号技術です。秘密計算によく用いられる数学的·暗号的な道具のうち、「完全準同型暗号」という技術は、暗号化したままの状態で暗号文の中身のデータに対する計算を行える特殊な暗号化技術です。私たちの論文（国際会議EUROCRYPT 2015で発表）で構成した完全準同型暗号では「有限体上の関数はどれも多項式で表示できる」という性質が要となりました。この性質自体は代数学の初歩的な内容なのですが、それを「上手いタイミングで使う」ことで暗号学的に有意義な成果が得られたという実例となっています。

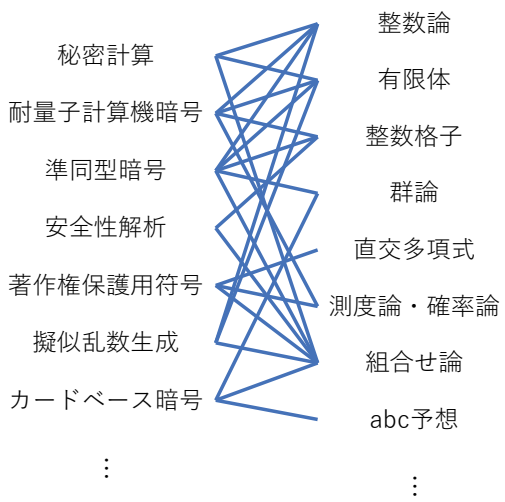
この完全準同型暗号については、既存の構成手法においてどうしても外すことのできない複雑な操作が存在し、効率化の妨げとなっています。私の最近の研究では、従来研究で




用いられていなかった群論的な手法を用いてこの複雑な操作を回避することを目指しています。この研究には、数学における私の専門である組合せ論的群論の知見も活用できると見込んでおり、その意味でもやりがいのある研究です。

他にも秘密計算に関する最近の研究として、従来この分野で安全と考えられてきた「直感的にもっともらしいある種の構成法」が実は安全でない場合があることを示す「病的な反例」を発見しています（国際会議PKC 2021で発表）。これもある意味で「いかにも数学者的」な研究でしょう。

これらの事例に限らず、暗号分野には（他の応用分野でもそうでしょうが）本当に多種多様な数学が関わっていて、私自身の研究でも「まさかこんな数学が役に立つとは」と驚いたことが何度もありました。そうした数学と暗号との豊かな関連性についての情報発信もより一層進めていきたいと思っています。



# 耐量子暗号の安全性解析


## 池松　泰彦

**学位: 博士(数理学)(九州大学)**
**専門分野: 耐量子暗号、多変数多項式暗号**


現代の情報セキュリティを支えるRSA暗号·楕円曲線暗号は、素因数分解問題·離散対数問題などの計算困難数学問題を安全性の根拠として構成されます。しかし、大規模な量子コンピュータが将来的に開発されると、Shorの量子アルゴリズムにより、素因数分解問題·離散対数問題などは多項式時間で解読でき、結果として、RSA暗号などは安全でなくなることが知られています。

量子コンピュータでも解読困難とされる暗号(**耐量子暗号**)は、上記のような背景から、現在世界中で活発に研究開発が行われています。この研究には、素因数分解問題·離散対数問題とは異なる数学問題が扱われ、広範囲な数学理論が必要となります。


耐量子暗号に利用される様々な数学理論

私は、耐量子暗号の中でも、特に多変数多項式理論を用いた、多変数多項式暗号(MPKC)に興味を持ち、研究を行なっています。MPKCは、有限体上の多変数二次連立方程式の求解問題(MQ問題)の困難性を安全性の根拠として構成されます。このMQ問題はNP完全問題であることが証明されており、そのことから、量子コンピュータでも解読困難な暗号が構成できると期待されています。

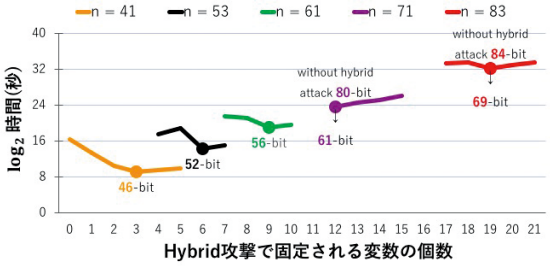
現在検討されている耐量子暗号の種類

| 暗号の名称 | 利用される数学問題 |
|---|---|
| MPKC | MQ問題 |
| 格子暗号 | 最短(最近)ベクトル探索問題 |
| 同種写像暗号 | 同種写像計算問題 |
| 符号ベース暗号 | 線形符号復号問題 |

MPKCは、その他の耐量子暗号(格子暗号や同種写像暗号など)と比べても高速な処理性能を有し、さらに署名方式においては署名長が最も短くなることから、IoTで取り扱う機器やICカードのような低資源デバイスでの実装に向いていると考えられています。また最近では、署名方式の一つであるRainbowから仮想通貨を作るという面白い試みも行われています。

私は、主にMPKCの安全性解析について研究を行なっています。それには、グレブナー基底や代数幾何などによる数学的議論が欠かせません。しかし、グレブナー基底アルゴリズム、特にF4/F5アルゴリズムによる攻撃計算量の解析は、理論的にはまだまだ未解明であり、実験による解析に基づいています。私が現在研究している暗号方式EFCにおいても、Hybrid攻撃を用いることで、安全性が想定されていたものより低下することを実験的に示しましたが(下図)、それらを理論的に説明することが未解決であり、今後の研究課題となっています。

n変数パラメータを持つ暗号方式EFCに対するHybrid攻撃の計算量




またMPKC以外にも格子暗号や同種写像暗号についても研究を行なっており、これらを組み合わせた新しい耐量子暗号の開発にも関心があります。

# Modeling of Solid-to-Solid Phase-Transformations in Shape-Memory Alloys Homogenization and Gamma-Convergence Problems for Nematic Elastomers

## Pierluigi CESANA

学位: PhD (Applied Mathematics) (SISSA International School for Advanced Studies, Italy)
専門分野: Partial Differential Equations, Variational Problems

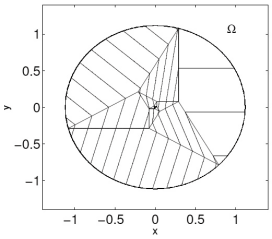
The main focus of my research work is on rigorous mathematical modeling and analysis of multiscale and multiphysics systems in materials science. My investigations explore ways information and disorder emerge and evolve generating complexity and patterns in smart materials such as martensite, nematic elastomers and liquid crystals. Understanding the microscale features and mechanisms of multifunctional materials and predicting their interactions on the overall macroscopic properties is of strategic importance in the design of materials for engineering applications. Two specific lines from my past and current research are summarized below.

### 1) Solid-to-solid phase-transformations in shape-memory alloys

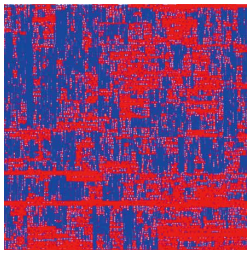
Austenite-to-Martensite phase transformation is observed in various metals, ceramics and biological systems. It is the activation mechanism of the Shape-Memory effect. Despite the vast potential to the shape-memory effect, practical implementations have been slow, and to-date, mostly limited to NiTi. It is strategically important to improve and stabilize the shape-memory effect in known materials and develop new modeling strategies. A problem I have considered is the analysis and modeling of disclinations (topological defects at the lattice level characterized by rotational mismatch). Disclinations as in Fig. 1-a are characterized by a self-similar triple-star pattern resulting in intense rotational stretches. Mathematically, I have shown that such configurations arise as a solution of differential inclusion problems with special rotational symmetry and rigidity. By identifying the basic algebraic structure underlying the differential inclusion I have computed exact solutions both in linearized and finite elasticity models shedding light on the mechanism that drives formation of triple-stars. Moreover, I have investigated onset of criticality and self-organization in the evolution of martensite via sequential avalanching. Here the modeling strategy describes the nucleation of martensitic variants as a branching random walk process (see Fig. 1-b). The question that I addressed is the behavior of certain features of the self-similar structure thus formed and the computation of power laws for the length interfaces in a martensitic transformation. This project involved collaboration with the groups of J. Ball and B. Hambly (Oxford, stochastic modeling of martensite); E. Vives and A. Planes (Barcelona) and T. Inamura (TiTech) on experiments on avalanches and disclinations in martensite. Work is in progress on the investigation of the activation mechanisms that drive avalanches in metals with the ultimate goal of mechanically characterizing the dynamics of solid-to-solid phase-transformations.

**Fig. 1**

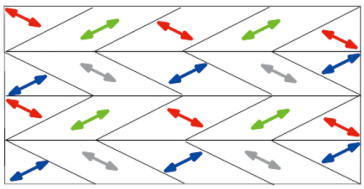
a) Self-similar triple-star patterns observed in $Pb_3(VO_4)_2$ and MgCd resulting from the rotation of twin boundaries and matching of different crystal variants via kinematic compatibility.




b) Numerical realization of a microstructure as a 2D fragmentation process.



c) analytical construction of a rank-1 4-phase microstructure in NLCEs.



### 2) Homogenization and Gamma-Convergence problems for nematic elastomers

Nematic Liquid Crystal Elastomers (NLCEs) are a class of soft Shape-Memory Alloys that combine the entropic elasticity of a network of cross-linked polymeric chains with the peculiar optical properties of nematic liquid crystals. A thorough understanding of the manipulation of optical birefringence in thin-films of NLCEs by mechanical, electric and thermal means is a tremendous mathematical task which has strategical potential applications in materials design and fundamental sciences. Focusing on the strain-order coupling in NLCEs, I have investigated mechanisms that rule the low energy states in mechanically and geometrically constrained systems such as artificial muscles, sensors and actuators. The mathematical language required to tackle NLCEs problems is that of calculus of variations, Gamma-convergence and relaxation. These are sophisticated techniques at the intersection of the analysis of PDEs, functional analysis and measure theory based on energy minimization approach and which are particularly suitable for the study of singularly perturbed variational problems. Collaborations are in progress with the experimental Lab of K. Urayama (KyotoTech).

# Algebraic specification


## Daniel GAINA

学位: PhD (Japan Advanced Institute of Science and Technology)
専門分野: Universal Logic, Formal Methods, Category Theory


*Universal logic* is a general study of logical structures with no commitment to any particular logical system in the same way that universal algebra is a general study of algebraic structures. The term "universal" refers to the collection of global concepts that allow one to unify the treatment of the logical systems and avoid repetition of similar results. One major approach to universal logic, in terms of both number of research contributions and significance of the results, is *institution theory*. This relies upon a category-based definition of the informal notion of logical system, called *institution*, which includes both syntax and semantics as well as the satisfaction relation between them. As opposed to the bottom-up methodology of conventional logic tradition, the institution theory approach is top-down: the concepts describe the features that a logic may have and they are defined at the most appropriate level of abstraction; the hypothesis are kept as general as possible and they are introduced only on by-need basis. This has the advantage of proving uniformly results for a multitude of logical systems. It leads to a deeper understanding of the logic ideas since the irrelevant details of particular logics are removed and the results are structurally obtained by clean causality. My research interests cover, roughly, institution theory and its applications to computing science.

**(1) Foundation of system specification and verification**

There are many contributions of institution theory to computing science, the most visible one is providing mathematical foundations for the formal methods techniques, i.e. specification, development and verification of systems. In algebraic specification, one of the most important classes of formal methods, it is a standard and mandatory practice to have an institution to underlie each language basic feature and construct; institution theory sets a standard style for developing an algebraic specification language that initially requires to define a logical system formalized as an institution and then develop all the language constructs as mathematical entities in the framework provided by the underlying institution.


Table 1. Algebraic specification language development

**(2) Reconfigurable software systems**

The main direction of my research consists of developing logical structures supporting the efficient development of correct reconfigurable software systems, i.e. systems with reconfigurable mechanisms managing the dynamic evolution of their configurations in response to external stimuli or internal performance measures. A typical example of reconfigurable system is given by the cloud-based applications that flexibly react to client demands by allocating, for example, new server units to meet higher rates of service requests. The model implemented over the cloud is pay-per-usage, which means that the users will pay only for using the services. Therefore, the cloud service providers have to maintain a certain level of quality of service to keep up the reputation. Generally speaking, reconfigurable systems are safety- and security-critical systems with strong qualitative requirements, and consequently, formal verification is needed.

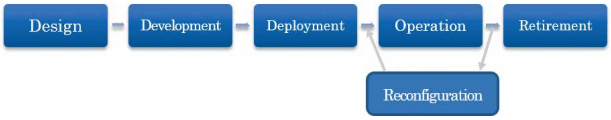



Table 2. Lifecycle of reconfigurable software

**(3) System development**

I am currently maintaining the Constructor-based Theorem Prover (CITP), a proof management tool built on top of an algebraic specification language for verifying safety properties of transition systems. The methodology supported by the tool is not intended for formalizing mathematics, but for the application to the development of software systems. In order to achieve the targeted goal, the following important research directions are pursued:

(a) proposing more expressive logical systems to allow engineers to specify easily and accurately the software systems,

(b) develop decision procedures that can reason efficiently about these more sophisticated logics, and

(c) improvements of the proof assistant interface to help the user understand the current state of the proof and interact with the tool in a more natural way.

The interest is in the design of software systems as one can see in the table below.

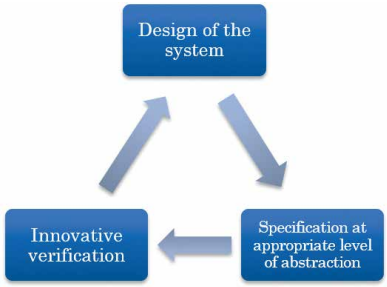



Table 3. Deductive verification process

The system will be specified at the most appropriate level of abstraction depending on the requirements for its behavior. The result of the verification performed with the tool will determine if improvements of the design are required or not.

Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

〒819-0395　福岡市西区元岡744
TEL: 092-802-4402　FAX: 092-802-4405
URL　http://www.imi.kyushu-u.ac.jp/

Update
April 1st, 2023