# 多重ゼータ値入門

荒川恒男（立教大），金子昌信（九州大）

# まえがき

この講義録は，もともと故荒川恒男氏（立教大）が早稲田大学での講義（2002 年）ノートとして作られた原稿を下敷きに，私の幾つかの大学での集中講義の内容などを加えて作成したものを Web 上で公開したのが始まりで，その後 2005 年に立教大学から講義録として出版されていたものである．既にその冊子は品切れの状態であるが，Web に置いているノートはそれなりの需要があるようなので，今回新たに増補修正を行って，九州大学グローバル COE プログラム「マス・フォア・インダストリ」のレクチャーノートとして発刊していただくことにした．

多重ゼータ値の研究は 18 世紀の Goldbach, Euler に始まるが，活発な研究がなされるようになったのは 1990 年代からである．その先鞭をつけた一人である Mike Hoffman は自身のホームページに多重ゼータ値関係の論文リストを載せているが，昨年の暮れに韓国 Postech に招かれて講義をした折，話の枕とするために，その論文を発表年代で区切って勘定してみた．合計数が約 300，うち Euler の 1775 年から 1953 年までに 6 編，そこから 30 年ほど飛んで 1982 年から 1985 年に 3 編，またしばらく間があって 1992 年から 1999 年までが 28 編，2000 年代に入って最初の 5 年に 77 編，2005 年以降が 181 編と，とくに今世紀に入っての増加が著しい．数えていて気がついたが，この 300 ばかりの論文に日本人が著者として入っている論文が三分の一ほどもある．私が荒川さんと研究を始めた 90 年代はまだ読むべき論文数も少ない，ある意味幸せな時代であったが，今や日本でも様々な角度から多重ゼータ値に関わる人が随分増えた．

このたび，2009 年 4 月から九州大学の博士研究員となられた若林徳子さんを中心に，多重ゼータ値に興味を持つ大学院生，研究員とともに毎週セミナーを開き，かつての講義録を改訂増補する作業に取り組んだ．本来ならば多くの日本人も関わる最近の様々な進展について，紹介だけにでも章を割くべきであったが，いかんとも時間に追われて手が回らなかった．それでも若林さんによる付録や演習問題の略解など新しい内容も加わり，ページ数も 1.5 倍強になった．装い新たに刊行することを是として下されば幸いである．また，暗号研究などを通して整数論も産業と直結するような時代になっている．多重ゼータ暗号などという話はまだ聞かないが,「多重ゼータ値入門」を「マス・フォア・インダストリ」のレクチャーノートとして刊行する何らかの意味はあるであろう．

2010 年 1 月 30 日 金子昌信記す，故荒川恒男氏を偲びつつ

# 目 次

**1 多重ゼータ値 1**
1.1 級数による定義といくつかの具体的な値 . . . . . 1
1.2 多重積分による表示 . . . . . 9
1.3 いろいろな関係式 . . . . . 17
1.4 正規化 . . . . . 23
1.4.1 例と一つの方法 . . . . . 23
1.4.2 代数的定式化 . . . . . 25
1.4.3 級数表示を用いた正規化 . . . . . 29
1.4.4 積分表示を用いた正規化 . . . . . 31
1.4.5 ガンマ関数概説 . . . . . 35
1.4.6 正規化の基本定理 . . . . . 45
1.4.7 正規化された複シャッフル関係式 . . . . . 49
1.4.8 和公式の導出 . . . . . 52
1.4.9 多重ゼータ関数の極 . . . . . 53
1.5 導分関係式と一般複シャッフル関係式 . . . . . 54
1.5.1 導分関係式 . . . . . 54
1.5.2 定理 1.5.3 の証明 . . . . . 55
1.5.3 導分関係式と大野の関係式 . . . . . 62

**2 多重 $L$ 値 64**
2.1 多重 $L$ 値の定義 . . . . . 65
2.2 代数的定式化と複シャッフル関係式 . . . . . 67
2.3 正規化と一般複シャッフル関係式 . . . . . 69
2.4 導分関係式 . . . . . 70
2.5 多重 $L$ 関数の極での主要部 . . . . . 71
2.6 ガウス−ヤコビ和 . . . . . 72

**3 付録：ダイガンマ関数 80**

**4 おまけ：等号付き多重ゼータ値（by 若林徳子） 83**
4.1 級数による定義といくつかの具体的な値 . . . . . 83
4.2 いろいろな関係式 . . . . . 84
4.3 多重ゼータ値および等号付き多重ゼータ値のある和の母関数 . . . . . 86

**5 演習問題略解 88**

# 1　多重ゼータ値

多重ゼータ値の最初の論文は Euler [E] であるが，そこで扱われているのは「深さ 2」という特別な場合であった．以下で定義するような一般の深さの多重ゼータ値を初めて扱ったのは Hoffman [H1], そしてそれが様々な数学と関連することを初めに書いたのは Zagier [Z0, Z1] である．とくに Zagier [Z1] の影響は大きく，多重ゼータ値関係では最もよく引用される論文であろう.

## 1.1　級数による定義といくつかの具体的な値

多重ゼータ値は次のように多重級数で定義するのが一般的である.

**定義 1.1.1 (多重ゼータ値, multiple zeta value)**　正の整数 $k_1, k_2, \ldots, k_n \geq 1$, ただし $k_1 \geq 2$, に対して, 多重ゼータ値 $\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ を次の級数で定める :

$$\begin{aligned} \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) &:= \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}} \\ \left( \right. &= \left. \sum_{\mu_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{\mu_n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_1 + \cdots + \mu_n)^{k_1} \cdots (\mu_{n-1} + \mu_n)^{k_{n-1}} \mu_n^{k_n}} \right). \end{aligned}$$

ここで, $k := k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ を多重ゼータ値 $\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ の重さ (weight), $n$ を深さ (depth) という. （後で見る $\zeta(2,1) = \zeta(3)$ が示すように，重さや深さはインデックスの集合 $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ に対して定まるものと言っておいた方が紛れがないが，以下では特に面倒は生じないので，あまり神経質にならないでおく.）

重さの小さい多重ゼータ値を表にしておく.

| | wt = 2 | wt = 3 | wt = 4 | wt = 5 |
|---|---|---|---|---|
| dep = 1 | $\zeta(2)$ | $\zeta(3)$ | $\zeta(4)$ | $\zeta(5)$ |
| dep = 2 | | $\zeta(2,1)$ | $\zeta(3,1), \zeta(2,2)$ | $\zeta(4,1), \zeta(3,2), \zeta(2,3)$ |
| dep = 3 | | | $\zeta(2,1,1)$ | $\zeta(3,1,1), \zeta(2,2,1), \zeta(2,1,2)$ |
| dep = 4 | | | | $\zeta(2,1,1,1)$ |

**演習問題 1**　重さが $k$ の多重ゼータ値 ( のインデックス集合 ) はいくつあるか. また，重さが $k$, 深さが $n$ の多重ゼータ値はいくつあるか.

はじめにこの級数の収束について, 少し一般に, インデックスの最初の $k_1$ を変数 $s$ にした関数

$$\zeta(s, k_2, \ldots, k_n) := \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{s} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}$$

の収束性の形で述べておく.

**補題 1.1.2**　$\mathrm{Re}(s) > 1$ ならば $\zeta(s, k_2, \ldots, k_n)$ は絶対収束する.

**証明)** $\mathrm{Re}(s) = \sigma$ とおく．不等式

$$\left|\frac{1}{m_1^s m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}}\right| \le \frac{1}{m_1^\sigma m_2\cdots m_n}$$

より，級数

$$\zeta(\sigma, \underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}) = \sum_{m_1>m_2>\cdots>m_n>0} \frac{1}{m_1^\sigma m_2\cdots m_n} = \sum_{m_1=n}^{\infty} \frac{A(m_1)}{{m_1}^\sigma},$$

ただし

$$A(m) = \sum_{m>m_2>\cdots>m_n>0} \frac{1}{m_2\cdots m_n},$$

の収束を言えばよい．ここで

$$A(m) \le \sum_{m_2,\ldots m_n=1}^{m} \frac{1}{m_2\cdots m_n} = \left(\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{r}\right)^{n-1}$$

であって, よく知られた調和級数の評価 (後でも出てくる) より任意の $\varepsilon > 0$ に対しある ($m$ によらない) 正定数 $C_\varepsilon$ が存在し

$$\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{r} < C_\varepsilon m^\varepsilon$$

となるので,

$$A(m) \le C_\varepsilon^{n-1} m^{(n-1)\varepsilon}.$$

よって

$$\zeta(\sigma, \underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}) \le C_\varepsilon^{n-1}\sum_{m_1=n}^{\infty}\frac{m_1^{(n-1)\varepsilon}}{{m_1}^\sigma} = C_\varepsilon^{n-1}\sum_{m_1=n}^{\infty}\frac{1}{m_1^{\sigma-(n-1)\varepsilon}}.$$

仮定より $\sigma > 1$ であって, $n$ は固定された自然数なので, $\varepsilon$ を十分小さくとることにより $\sigma - (n-1)\varepsilon > 1$ とできる. このとき右辺の級数は収束するので, 補題は示された. ∎

**注意 1.1.3** 一般に，すべての $k_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を複素変数 $s_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ にした関数

$$\zeta(s_1, \ldots, s_n) := \sum_{m_1>m_2>\cdots>m_n>0} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2}\cdots m_n^{s_n}}$$

を考えることが出来るが，これは秋山–江上–谷川 [AET] 他により $\mathbf{C}^n$ 上の有理型関数に解析接続されることが示されている． 右辺の級数の絶対収束域は

$$\{(s_1,\ldots,s_n) \in \mathbf{C}^n \,|\, \Re(s_1) > 1, \Re(s_1+s_2) > 2, \ldots, \Re(s_1+\cdots+s_n) > n\}$$

である．この証明は松本 [Mat] にある．

また，1 変数の $\zeta(s, k_2, \ldots, k_n)$ については，特に $s = 1$ での極の位数や主要部について，§1.4.9 において「正規化」との関係を述べる．

深さ 1 の多重ゼータ値は Riemann ゼータ関数の整数点での値に他ならない. 深さ 1 で重さが偶数の場合, Euler による次の公式は有名である.

**定理 1.1.4 (Euler, 1735 頃)** 自然数 $k \geq 1$ に対して,

$$(1) \qquad \zeta(2k) = -\frac{1}{2}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2\pi i)^{2k} \quad \left( = \frac{(-1)^{k-1}}{2}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2\pi)^{2k} = \frac{|B_{2k}|}{2}\frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!} \right).$$

ここで, $B_{2k}$ は Bernoulli 数である:

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{t^m}{m!} = \frac{te^t}{e^t - 1}.$$

( Bernoulli 数については [AIK] を参照のこと).

はじめのいくつかを例としてあげると,

$$B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66},\ B_{12} = -\frac{691}{2730},\ B_{14} = \frac{7}{6},\ \ldots$$

であって ($B_0 = 1,\ B_1 = 1/2$, 3 以上の奇数 $m$ については $B_m = 0$),

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \quad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555},$$
$$\zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{638512875}, \quad \zeta(14) = \frac{2\pi^{14}}{18243225}, \ \ldots$$

**演習問題 2** 上の $\zeta(2k)$ の値で, 分母に 10 のべきに近い数が目立つ理由を考えよ.

Euler の公式のよくある証明は次のようなものである. $\sin x$ の無限積展開

$$(2) \qquad \sin \pi x = \pi x \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)$$

から出発し, 両辺の対数微分をとると,

$$\pi \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2x/m^2}{1 - x^2/m^2}.$$

これは $\cot x$ の部分分数展開であり, これを出発点にとってもよい (実際は $\sin x$ の無限積を $\cot x$ の部分分数展開から証明することが多いが). $|x| < 1$ のとき, 和の中を等比級数に展開し, 二重級数の絶対収束性から和の順序が交換できることより,

$$\pi x \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{m^2}\right)^k = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2k}}\right)x^{2k} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)x^{2k}.$$

一方,

$$\begin{aligned}
\pi x \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} &= \pi x \frac{(e^{i\pi x} + e^{-i\pi x})/2}{(e^{i\pi x} - e^{-i\pi x})/2i} = \pi i x \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} = \pi i x \frac{e^{2\pi i x} + 1}{e^{2\pi i x} - 1} \\
&= \pi i x \frac{2e^{2\pi i x} - e^{2\pi i x} + 1}{e^{2\pi i x} - 1} = \frac{2\pi i x e^{2\pi i x}}{e^{2\pi i x} - 1} - \pi i x \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{(2\pi i x)^m}{m!} - \pi i x
\end{aligned}$$

となるので, この両式の $x^{2k}$ の係数を比べるとよい. ∎

次の値は $\sin x$ の無限積展開 (2) から直ちに得られる.

**命題 1.1.5** 自然数 $n \geq 1$ に対して, 次が成り立つ.

(3)
$$\zeta(\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n\text{ 個}}) = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}.$$

**証明)** (2) の無限積をそのまま展開すると係数に $\zeta(2,2,\ldots,2)$ があらわれる:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\pi x}{\pi x} &= \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right) = \left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots \\
&= 1-\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\right)x^2+\left(\sum_{m_1>m_2>0}\frac{1}{m_1^2m_2^2}\right)x^4-\left(\sum_{m_1>m_2>m_3>0}\frac{1}{m_1^2m_2^2m_3^2}\right)x^6+\cdots \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\zeta(\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n\text{ 個}})x^{2n}.
\end{aligned}$$

一方, Taylor 展開

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

から

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}x^{2n}.$$

係数を比較すると命題の式が得られる. ∎

後で, Euler の $\zeta(2k)$ の公式の, この命題を使う一寸変わった証明を与える.

他に具体的に値が分かる多重ゼータ値として,

- ⋆ $\zeta(\underbrace{2k,2k,\ldots,2k}_{n\text{ 個}}) = (\text{有理数})\times\pi^{2kn}$,
- ⋆ (Borwein-Bradley-Broadhurst-Lisoněk[BBBL]),
$$\zeta(\underbrace{3,1,3,1,\ldots,3,1}_{2n\text{ 個}}) = \frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!},$$
- ⋆ $\zeta(k,1,1,\ldots,1) = (\text{Riemann ゼータ値達の多項式})$, $(k\geq 2)$

などがある. このうち始めのものは演習問題 5, 二つ目の公式（はじめ Zagier が予想した）は Broadhurst の証明を簡易化した Zagier の証明の概略を次節の演習問題 6 として入れた. 最後のものは「値がわかった」とは言えないかも知れないが, より詳しくは §1.4.5 末を参照.

また単独の値ではないが, 二つ目の公式の一般化として

$\star$ (Bowman-Bradley[BowB], 宗田 [Mu1])

$$\sum_{j_0+j_1+\cdots+j_{2n}=m} \zeta(\{2\}^{j_0},3,\{2\}^{j_1},1,\{2\}^{j_2},\ldots,3,\{2\}^{j_{2n-1}},1,\{2\}^{j_{2n}})$$
$$=\binom{m+2n}{m}\frac{\pi^{2m+4n}}{(2n+1)(2m+4n+1)!},$$

ただし，$\{2\}^i$ とは 2 が $i$ 個並んだもの, などもある.

以下専ら, 多重ゼータ値の間に成り立つ関係式について論じる. 例えば,

**例 1.1.6 (Euler[E])** 自然数 $k \geq 3$ に対して,

$$\sum_{i=2}^{k-1}\zeta(i,k-i)=\zeta(k). \tag{4}$$

これは「和公式 (sum formula)」と呼ばれる関係式の特別な場合である. 一般の和公式の証明を後で与えるが, ここでは一番特別な場合, すなわち $k=3$ として得られる

$$\zeta(2,1)=\zeta(3)$$

の簡単で巧みな証明を与えよう. まず,

$$\zeta(2,1)+\zeta(3)=\sum_{m\geq n>0}\frac{1}{m^2n}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\right)\frac{1}{m^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}\right)\frac{1}{m^2}.$$

ここで,

$$\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}\right)\frac{1}{m^2}=\frac{1}{mn(m+n)}=\frac{m+n}{mn(m+n)^2}=\frac{1}{n(m+n)^2}+\frac{1}{m(m+n)^2}$$

であるので,

$$\zeta(2,1)+\zeta(3)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(m+n)^2}+\frac{1}{m(m+n)^2}\right)=2\zeta(2,1).$$

よって $\zeta(2,1)=\zeta(3)$ を得る. ∎

この等式 $\zeta(2,1)=\zeta(3)$ の多様な証明と一般化については [BorB] という面白い読み物がある.

**演習問題 3** * $\zeta(k-1,1)+\zeta(k)$ から出発し, 同様の計算法を繰り返すことで関係式 (4) を導け.

ここで, 多重ゼータ値で張られる $\mathbf{Q}$ 上のベクトル空間を導入する.

---

*井原健太郎君の教示による.

**定義 1.1.7** 有理数体 $\mathbf{Q}$ 上のベクトル空間 $\mathcal{Z}_k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ を,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_0 &= \mathbf{Q}, \quad \mathcal{Z}_1 = \{0\}, \\ \mathcal{Z}_k &= \sum_{\substack{k-1\geq n\geq 1 \\ k_1,\ldots,k_n\geq 1, k_1\geq 2 \\ k_1+\cdots+k_n=k}} \mathbf{Q}\cdot\zeta(k_1,\ldots,k_n) \quad (k\geq 2)\end{aligned}$$

で定義する．すなわち, 重さが $k$ の多重ゼータ値全てによって $\mathbf{Q}$ 上生成される $\mathbf{R}$ の部分 $\mathbf{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{Z}_k$ とするのである．重さが 1 の多重ゼータ値はないから $\mathcal{Z}_1=\{0\}$ とし, 便宜上 $\mathcal{Z}_0=\mathbf{Q}$ としている．更に多重ゼータ値全てが生成する空間を $\mathcal{Z}$ とする：

$$\mathcal{Z}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{Z}_k.$$

**例 1.1.8** 重さ 2 は $\zeta(2)$ があるだけなので $\mathcal{Z}_2=\mathbf{Q}\cdot\zeta(2)$ (1 次元) である．また上に証明したように $\zeta(2,1)=\zeta(3)$ なので $\mathcal{Z}_3=\mathbf{Q}\cdot\zeta(2,1)+\mathbf{Q}\cdot\zeta(3)=\mathbf{Q}\cdot\zeta(3)$ (1 次元) となる．$\mathcal{Z}_4$ が $\zeta(4)$ で張られる 1 次元空間であることを後で示す．$k\geq 5$ で次元が確定している $\mathcal{Z}_k$ はない．

$\mathcal{Z}_k$ の次元については次の著しい予想がある．数列 $d_k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ を, 漸化的に

$$d_0=1,\ d_1=0,\ d_2=1,\quad d_k=d_{k-2}+d_{k-3}\quad (k\geq 3)$$

で定めるとき,

**予想 (Zagier 他 [Z1])** $\dim_{\mathbf{Q}}\mathcal{Z}_k=d_k$ であろう．

予想次元 $d_k$ と, 重さ $k$ のインデックスの個数である $2^{k-2}$ の表をあげておく．

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_k$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 12 | 16 | 21 | 28 |
| $2^{k-2}$ | – | – | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 | 2048 | 4096 | 8192 |

**演習問題 4** $d_k$ の漸近的な大きさを求めよ．

この予想について最近の決定的な結果は次の定理であるが, 我々はその証明や背景について語る能力を持たないので結果を述べるに留める．

**定理 1.1.9 (Goncharov[Go], 寺杣 [Te], Deligne-Goncharov[DG])** 不等式

$$\dim_{\mathbf{Q}}\mathcal{Z}_k\leq d_k$$

が成り立つ．

**注意 1.1.10** $\mathbf{Q}$-ベクトル空間 $\mathcal{Z}$ は無限次元である．これは

- ⋆ $\pi^{2k}\in\mathcal{Z}_{2k}$ (Euler) と $\pi$ の超越性 (Lindemann), または
- ⋆ Rivoal [Ri] による, $\zeta(3),\ \zeta(5),\ \zeta(7),\ldots$ の中に $\mathbf{Q}$ 上独立なものが無限個あること

よりわかる．また，$\mathcal{Z}=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathcal{Z}_k$ （直和）と信じられている．( しかしこれが証明される見込みは今のところないと思われるので，$\mathcal{Z}$ をはじめから右辺の形式的な直和として定義するのが現実的ではある．少なくとも現在まで，異なる重さを持つ多重ゼータ値の間に成り立つ線形関係式は見つかっていない．)

実はベクトル空間 $\mathcal{Z}$ は積について閉じている．のみならず $\mathcal{Z}$ には，本節と次節に述べる意味で，「二通りの積の構造」が入り，そのことが多重ゼータ値の間の豊富な関係式を生み出す．

**命題 1.1.11** $\mathcal{Z}$ は $\mathbf{Q}$-代数である．また $\mathcal{Z}_{k_1}\cdot\mathcal{Z}_{k_2}\subset\mathcal{Z}_{k_1+k_2}$ が成り立つ．

**証明)** 二つの多重ゼータ値の積が $\mathcal{Z}$ に入ることは，定義級数の積に現れる和の範囲を適当に分割することによって確かめられる．例えば，Riemann ゼータ値の積は，

$$\begin{aligned}\zeta(p)\zeta(q)&=\left(\sum_{m>0}\frac{1}{m^p}\right)\left(\sum_{n>0}\frac{1}{n^q}\right)=\sum_{m,n>0}\frac{1}{m^pn^q}\\&=\left(\sum_{m>n>0}+\sum_{n>m>0}+\sum_{m=n>0}\right)\frac{1}{m^pn^q}\\&=\zeta(p,q)+\zeta(q,p)+\zeta(p+q)\end{aligned}$$

となる．更に右辺の各項の重さが左辺のそれぞれの重さの和であることも分かる．また，深さが 1 と 2 のゼータ値の積は

$$\begin{aligned}\zeta(p)\zeta(q,r)&=\left(\sum_{l>0}\frac{1}{l^p}\right)\left(\sum_{m>n>0}\frac{1}{m^qn^r}\right)=\sum_{\substack{l>0\\m>n>0}}\frac{1}{l^pm^qn^r}\\&=\left(\sum_{l>m>n>0}+\sum_{m>l>n>0}+\sum_{m>n>l>0}+\sum_{l=m>n>0}+\sum_{m>l=n>0}\right)\frac{1}{l^pm^qn^r}\\&=\zeta(p,q,r)+\zeta(q,p,r)+\zeta(q,r,p)+\zeta(p+q,r)+\zeta(q,p+r)\end{aligned}$$

となり，やはり重さがそれぞれの重さの和になるような多重ゼータ値の和として表すことができる．同様の仕方で深さが 2 と 2 のゼータ値の積を計算すると 13 個のゼータ値の和として表される．一般の場合を式で述べるのは厄介であるが，要は，和の範囲としてそれぞれ独立に大小順序のついた自然数の組をわたるものが組み合わさったとき，それが全体としての大小順序の可能性すべてにわたる，互いに交わらない合併として書けて，各々の項が一つの多重ゼータ値を与えるのである．そのとき，値が等しくなるところでは深さが下がることに注意する． ∎

第 1.4.2 節でこの積（「調和積」とよぶ）の規則を代数的に定式化する．一般に，深さが $m$ と $n$ のゼータ値の積をこのやり方で計算するときに現れる項の数 $D(m,n)$ は Delannoy number と呼ばれる数になる．これは母関数表記で

$$\sum_{n,m>0}D(m,n)X^mY^n=\frac{1}{1-X-Y-XY}$$

で定義される数である．漸化式で与えるなら

$$\begin{aligned} D(m,n) &= D(m-1,n)+D(m,n-1)+D(m-1,n-1), \\ &\qquad\qquad (D(1,1)=3,\ D(1,2)=D(2,1)=5) \end{aligned}$$

である．1.4.2 節で述べる，上記の積の規則の漸化的な定式化が丁度これに対応していることが見て取れるであろう．

ここで, この積を使って, $\zeta(\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n\text{ 個}})$ の値 (3) から Euler の公式 (1) を導いてみよう．

まず $\zeta(2)^2 = 2\zeta(2,2)+\zeta(4)$ より

$$\zeta(4) = \zeta(2)^2 - 2\zeta(2,2) = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2 - 2\cdot\frac{\pi^4}{120} = \frac{\pi^4}{90}$$

と $\zeta(4)$ が求まる. 次に,

$$\begin{aligned} &\zeta(2)\zeta(2,2) = 3\zeta(2,2,2)+\zeta(4,2)+\zeta(2,4), \\ &\zeta(4)\zeta(2) = \zeta(2,4)+\zeta(4,2)+\zeta(6) \end{aligned}$$

なので, 両式の差をとると $\zeta(4,2)+\zeta(2,4)$ が消えて

$$\begin{aligned} \zeta(6) &= \zeta(2)\zeta(4)-\zeta(2)\zeta(2,2)+3\zeta(2,2,2) \\ &= \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\pi^4}{90}-\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\pi^4}{120}+3\cdot\frac{\pi^6}{5040} = \frac{\pi^6}{945} \end{aligned}$$

と $\zeta(6)$ が求まる. 一般の $\zeta(2n)$ に対しても $n\geq 2$ に対して,

$$\begin{aligned} &\zeta(2)\zeta(\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n-1\text{ 個}}) = n\zeta(\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n\text{ 個}}) + \sum_{i=1}^{n-1}\zeta(2,\ldots,2,\underset{i\text{ 番目}}{\underset{\wedge}{4}},2,\ldots,2), \\ &\zeta(4)\zeta(\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n-2\text{ 個}}) = \sum_{i=1}^{n-1}\zeta(2,\ldots,2,\underset{i\text{ 番目}}{\underset{\wedge}{4}},2,\ldots,2) + \sum_{i=1}^{n-2}\zeta(2,\ldots,2,\underset{i\text{ 番目}}{\underset{\wedge}{6}},2,\ldots,2), \\ &\qquad\cdots\cdots\cdots \\ &\qquad\cdots\cdots\cdots \\ &\zeta(2n-2)\zeta(2) = \zeta(2n-2,2)+\zeta(2,2n-2)+\zeta(2n). \end{aligned}$$

これらの辺々を交代的に加えると,

$$(-1)^{n-1}\zeta(2n) = n\zeta(\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n\text{ 個}}) + \sum_{m=1}^{n-1}(-1)^m\zeta(2m)\zeta(\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n-m\text{ 個}}). \tag{5}$$

ここで, $C_m := (-1)^{m-1}2(2m)!\zeta(2m)/(2\pi)^{2m}$, とおく (ただし $C_0=1$ とする). $C_m$ が Bernoulli 数 $B_{2m}$ に等しいことを示せばよい. 式 (5) に $2(2n)!/(2\pi)^{2n}$ を掛けて (3) を用いると,

$$C_n = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n}} - \sum_{m=1}^{n-1}(2n)!\frac{C_m}{(2m)!}\cdot\frac{1}{2^{2n-2m}}\cdot\frac{1}{(2(n-m)+1)!}$$

となるので,

$$(2n+1)2^{2n}C_n = 2n - \sum_{m=1}^{n-1}\binom{2n+1}{2m}2^{2m}C_m,$$

従って,

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{2n+1}{2m}2^{2m}C_m = 2n+1$$

を得る. この両辺に $t^{2n}/(2n+1)!$ を掛けて和 $\sum_{n=0}^{\infty}$ をとると,

$$\text{右辺} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^t+e^{-t}}{2},$$

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{2n+1}{2m}2^{2m}C_m\right)\frac{t^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{2^{2m}C_m}{(2m)!}\frac{1}{(2n-2m+1)!}\right)t^{2n}\\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^{2m}C_m}{(2m)!}t^{2m}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^{2l}}{(2l+1)!}\right) = \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{C_m(2t)^{2m}}{(2m)!}\right)\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2t}\right).\end{aligned}$$

よって,

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{C_m(2t)^{2m}}{(2m)!} = t\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}} = t\frac{e^{2t}+1}{e^{2t}-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2te^{2t}}{e^{2t}-1}+\frac{(-2t)e^{-2t}}{e^{-2t}-1}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}B_{2m}\frac{(2t)^{2m}}{(2m)!}.$$

ゆえに, $C_m = B_{2m}$ となり証明ができた. ∎

**演習問題 5** 同様の方法で,

$$\zeta(\underbrace{2k,2k,\ldots,2k}_{n\,個}) = C_n^{(k)}(2\pi i)^{2nk}/(2nk)!,$$

ここに $C_n^{(k)}$ は

$$C_0^{(k)}=1,\quad C_n^{(k)} = \frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\binom{2nk}{2mk}B_{2mk}C_{n-m}^{(k)}\ (n\geq 1)$$

で漸化的に決まる有理数, であることを示せ. ただし Euler の公式 (1) は既知として用いてよいとする.

## 1.2 多重積分による表示

次のような多重積分 (反復積分, また Drinfel'd 積分と呼ばれることもある) を考える.

(6)

$$\begin{aligned}I(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k) &= \int\!\!\cdots\!\!\int_{1>t_1>\cdots>t_k>0} A_{\varepsilon_1}(t_1)A_{\varepsilon_2}(t_2)\cdots A_{\varepsilon_k}(t_k)\,dt_1\cdots dt_k\\ &= \int_0^1 A_{\varepsilon_1}(t_1)dt_1\int_0^{t_1}A_{\varepsilon_2}(t_2)dt_2\cdots\int_0^{t_{k-2}}A_{\varepsilon_{k-1}}(t_{k-1})dt_{k-1}\int_0^{t_{k-1}}A_{\varepsilon_k}(t_k)dt_k.\end{aligned}$$

ただし $\varepsilon_j = 0$ または $1$ $(1 \leq j \leq k)$ で,

$$A_0(t) = \frac{1}{t} \qquad \text{および} \quad A_1(t) = \frac{1}{1-t},$$

更に $\varepsilon_1 = 0$ かつ $\varepsilon_k = 1$ と仮定する. 積分はこの条件の下で収束する. 多重ゼータ値はこの形の積分で表される. これは簡単であるが極めて重要である. [Z1] にははじめ Kontsevich により注意されたとある.

**定理 1.2.1 (多重ゼータ値の反復積分表示)**

$$\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) = I(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k_1-1}, 1\, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_2-1}, 1, 0, \ldots, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_n-1}, 1).$$

**証明)** $1/(1-t_i)$ を等比級数に展開して項別積分を繰り返せば得られるが, ここでは後のことも考えて, 次の級数 (multi-polylogarithm) を導入し, その反復積分表示の特別な場合として証明する.

**定義 1.2.2** 自然数 $k_1, \ldots, k_n \geq 1$ に対し,

$$Li_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(z) := \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}$$

とする. これは $|z| < 1$ で正則な関数を定めるが, $k_1 > 1$ ならば $z \to 1$ でも収束し

$$Li_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(1) = \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

となる. $n$ が $1$ の場合の $Li_k(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^m/m^k$ が, 多重対数関数 (polylogarithm) で,

(7)
$$Li_1(z) = -\log(1-z) = \int_0^z \frac{dt}{1-t}$$

である.

**補題 1.2.3** $k_1, \ldots, k_n \geq 1$, $|z| < 1$ に対して, 次が成り立つ.

$$\frac{d}{dz} Li_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z}\, Li_{k_2,\ldots,k_n}(z) & (k_1 = 1), \\[2ex] \dfrac{1}{z}\, Li_{k_1-1,k_2,\ldots,k_n}(z) & (k_1 > 1). \end{cases}$$

**証明)** $k_1 > 1$ なら定義式を項別微分して直ちに得られる. $k_1 = 1$ のとき,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} Li_{1,k_2,\ldots,k_n}(z) &= \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{z^{m_1-1}}{m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}} \\
&= \sum_{m_2 > \cdots > m_n > 0} \left( \sum_{m_1 = m_2+1}^{\infty} z^{m_1-1} \right) \frac{1}{m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}} \\
&= \sum_{m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{z^{m_2}}{1-z} \cdot \frac{1}{m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}} \\
&= \frac{1}{1-z}\, Li_{k_2,\cdots,k_n}(z).
\end{aligned}$$

∎

**演習問題 6 (Zagier)** 以下の方針で

$$\zeta(\underbrace{3,1,3,1,\ldots,3,1}_{2n\text{ 個}}) = \frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!}$$

を証明せよ.

$F(a,b;c;x)$ を Gauss の超幾何級数とする :

$$F(a,b;c;x) = 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} Li_{\underbrace{3,1,\ldots,3,1}_{2n\text{ 個}}}(x)\,t^{4n} = F\Bigl(\frac{t}{1+i}, \frac{-t}{1+i}; 1; x\Bigr)F\Bigl(\frac{t}{1-i}, \frac{-t}{1-i}; 1; x\Bigr)$$

を, 両辺が $1+O(x^2)$ である $x$ の冪級数で微分作用素

$$\Bigl((1-x)\,\frac{d}{dx}\Bigr)^2\Bigl(x\,\frac{d}{dx}\Bigr)^2 - t^4$$

で消えることから導く. 超幾何級数の特殊値をガンマ関数で表す公式と, ガンマ関数の相補公式 (あとの §1.4.5 の (35) 式) を合わせてえられる

$$F(a,-a;1;1) = \frac{1}{\Gamma(1-a)\Gamma(1+a)} = \frac{\sin \pi a}{\pi a}$$

から

$$\begin{aligned} F\Bigl(\frac{t}{1+i}, \frac{-t}{1+i}; 1; 1\Bigr)F\Bigl(\frac{t}{1-i}, \frac{-t}{1-i}; 1; 1\Bigr) &= \frac{2}{\pi^2 t^2}\,\sin\Bigl(\frac{1+i}{2}\pi t\Bigr)\,\sin\Bigl(\frac{1-i}{2}\pi t\Bigr) \\ &= \frac{\cosh \pi t - \cos \pi t}{\pi^2 t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi^{4n} t^{4n}}{(4n+2)!} . \end{aligned}$$

さて, 補題 1.2.3 と (7) から $Li_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(z)$ の反復積分表示が得られる. それを述べるために, 略記法を用意しておく. 微分形式 $\omega_i(t)$ (実際は $dt/t$ または $dt/(1-t)$) に対して反復積分

$$\int_0^z \omega_1(t_1) \int_0^{t_1} \omega_2(t_2) \cdots \int_0^{t_{k-2}} \omega_{k-1}(t_{k-1}) \int_0^{t_{k-1}} \omega_k(t_k)$$

を

$$\int_0^z \omega_1(t_1) \circ \omega_2(t_2) \circ \cdots \circ \omega_k(t_k)$$

と書く.

**命題 1.2.4** 次が成り立つ :

$$\begin{aligned} &Li_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(z) \\ &= \int_0^z \underbrace{\frac{dt}{t} \circ \frac{dt}{t} \circ \cdots \circ \frac{dt}{t}}_{k_1-1\text{ 個}} \circ \frac{dt}{1-t} \circ \underbrace{\frac{dt}{t} \circ \cdots \circ \frac{dt}{t}}_{k_2-1\text{ 個}} \circ \frac{dt}{1-t} \circ \cdots \circ \underbrace{\frac{dt}{t} \circ \cdots \circ \frac{dt}{t}}_{k_n-1\text{ 個}} \circ \frac{dt}{1-t}. \end{aligned}$$

**証明)** (7) から出発し, $Li_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(0)=0$ に注意して先の補題の積分を繰り返していけばよい. ∎

定理 1.2.1 は命題で $z=1$ とおいたものである. 略記法で書くと

$$\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)$$
$$=\int_0^1 \underbrace{\frac{dt}{t}\circ\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_1-1\text{ 個}}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_2-1\text{ 個}}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\cdots\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_n-1\text{ 個}}\circ\frac{dt}{1-t}.$$

この積分表示の中で, 重さ $k=k_1+\cdots+k_n$ は $dt/t$ と $dt/(1-t)$ の個数の総数, つまり積分の次元 (反復の回数) として現われ, 深さ $n$ は $dt/(1-t)$ の個数となって現われている. このことから, 重さ $k$, 深さ $n$ の多重ゼータ値 (のインデックス) は $\binom{k-2}{n-1}$ 個あることがわかる. (左端は $dt/t$, 右端は $dt/(1-t)$ と決まっているので.) したがって重さ $k$ の多重ゼータ値は $\sum_{n=1}^{k-1}\binom{k-2}{n-1}=2^{k-2}$ 個ある（$k-2$ 箇所に $dt/t$, $dt/(1-t)$ のいずれか）.

**例 1.2.5** 重さが小さいときの, 補題を使った命題の証明の計算をやってみる. まず

$$\frac{d}{dz}Li_{1,1}(z)=\frac{1}{1-z}Li_1(z)=\frac{1}{1-z}\int_0^z\frac{dt}{1-t}$$

であるので,

$$Li_{1,1}(z)=\int_0^z\frac{dt_1}{1-t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{1-t_2}=\int_0^z\frac{dt}{1-t}\circ\frac{dt}{1-t}.$$

これは $z=1$ で発散する. 次に

$$\frac{d}{dz}Li_2(z)=\frac{1}{z}Li_1(z)=\frac{1}{z}\int_0^z\frac{dt}{1-t}$$

より,

$$Li_2(z)=\int_0^z\frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{1-t_2}=\int_0^z\frac{dt}{t}\circ\frac{dt}{1-t}.$$

ここで $z=1$ とおいて

$$\zeta(2)=\int_0^1\frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{1-t_2}=I(0,1).$$

重さが 3 のときは重さ 2 の計算が使えて, 例えば

$$\frac{d}{dz}Li_3(z)=\frac{1}{z}Li_2(z)$$

となるので,

$$Li_3(z)=\int_0^z\frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\int_0^{t_2}\frac{dt_3}{1-t_3}.$$

これより

$$\zeta(3)=\int_0^1\frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\int_0^{t_2}\frac{dt_3}{1-t_3}=I(0,0,1).$$

また

$$\frac{d}{dz}Li_{2,1}(z)=\frac{1}{z}Li_{1,1}(z)$$

より

$$\begin{aligned}
Li_{2,1}(z) &= \int_0^z \frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{1-t_2}\int_0^{t_2}\frac{dt_3}{1-t_3},\\
\zeta(2,1) &= \int_0^1 \frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{1-t_2}\int_0^{t_2}\frac{dt_3}{1-t_3} = I(0,1,1).
\end{aligned}$$

古典的な $Li_k(z)$, Riemann ゼータ値 $\zeta(k)$ については

$$\begin{aligned}
Li_k(z) &= \int_0^z \frac{dt_k}{t_k}\int_0^{t_k}\frac{dt_{k-1}}{t_{k-1}}\cdots\int_0^{t_3}\frac{dt_2}{t_2}\int_0^{t_2}\frac{dt_1}{1-t_1}\\
&= \int_0^z \underbrace{\frac{dt}{t}\circ\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k-1\text{ 個}}\circ\frac{dt}{1-t},
\end{aligned}$$

および

$$\zeta(k) = \int_0^1 \underbrace{\frac{dt}{t}\circ\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k-1\text{ 個}}\circ\frac{dt}{1-t}$$

である.

Drinfel'd 積分は対称性

$$I(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k) = I(1-\varepsilon_k,\ldots,1-\varepsilon_1) \tag{8}$$

を持つ. これは (6) において変数変換 $(t_1,\ldots,t_k)\longrightarrow(t'_1,\ldots,t'_k)=(1-t_k,\ldots,1-t_1)$ を行なえば, $A_{\varepsilon_i}(1-t_{k+1-i}) = A_{1-\varepsilon_i}(t_{k+1-i})$ 及びヤコビアン

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{dt'_1}{dt_1} & \frac{dt'_2}{dt_1} & \cdots & \frac{dt'_k}{dt_1}\\ \frac{dt'_1}{dt_2} & \frac{dt'_2}{dt_2} & \cdots & \frac{dt'_k}{dt_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{dt'_1}{dt_k} & \frac{dt'_2}{dt_k} & \cdots & \frac{dt'_k}{dt_k}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{\Large 0} & & & -1\\ & & -1 & \\ & \cdots & & \\ -1 & & & \text{\Large 0}\end{vmatrix} = 1$$

より直ちに得られる.

**例 1.2.6** 等式 $\zeta(2,1)=\zeta(3)$ をこれにより証明する.

$$\zeta(2,1) = \int_0^1 \frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{1-t_2}\int_0^{t_2}\frac{dt_3}{1-t_3} = \iiint\limits_{1>t_1>t_2>t_3>0}\frac{dt_1dt_2dt_3}{t_1(1-t_2)(1-t_3)}.$$

ここで積分の変数変換 $(t_1,t_2,t_3)\mapsto(1-s_3,1-s_2,1-s_1)$ を行うと, 右辺の積分は

$$\iiint\limits_{1>s_1>s_2>s_3>0}\frac{ds_1ds_2ds_3}{s_1s_2(1-s_3)} = \zeta(3)$$

となる.

この (8) を一般の多重ゼータ値の言葉に翻訳すると次のようになる.

**定義 1.2.7** 成分が自然数の多重インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)$ が $k_1\geq 2$ を満たすとき, これを収束インデックスということにする ( 英語では Zagier が “admissible” という語をあてている ). 収束インデックス $\mathbf{k}$ を, 2 以上の成分と 1 とに分けて,

$$\mathbf{k}=(a_1+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_1-1},a_2+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_2-1},\ldots,a_s+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_s-1}),\qquad (a_1,\,b_1,\ldots,a_s,\,b_s\geq 1)$$

と表す. このとき, $\mathbf{k}$ の双対 (dual) インデックス $\mathbf{k}'$ を

$$\mathbf{k}'=(b_s+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_s-1},b_{s-1}+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_{s-1}-1},\ldots,b_1+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_1-1})$$

で定義する. $\mathbf{k}'$ は収束インデックスであって, $\mathbf{k}'$ の双対は $\mathbf{k}$ である. $\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}'$ の重さは等しく, 深さは相補的, つまり $\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}'$ の深さの和が $\mathbf{k}$ (および $\mathbf{k}'$) の重さに等しいという関係がある.

**演習問題 7** 定義中の言明を証明せよ.

定理 1.2.1 より,

$$\zeta(\mathbf{k})=I\big(\underbrace{0,\ldots,0}_{a_1},\underbrace{1,\ldots,1}_{b_1},\underbrace{0,\ldots,0}_{a_2},\underbrace{1,\ldots,1}_{b_2},\ldots,\underbrace{0,\ldots,0}_{a_s},\underbrace{1,\ldots,1}_{b_s}\big)$$

であるから, (8) を使って次の「双対性定理」 (“duality theorem”) が言える. (この定理の積分表示を使わない証明はあるのだろうか.)

**定理 1.2.8 (双対性, duality)** 収束インデックス $\mathbf{k}$ と, その双対インデックス $\mathbf{k}'$ に対して,

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(\mathbf{k}')$$

が成り立つ.

**例 1.2.9** 自然数 $n$ に対し,

$$\mathbf{k}=(2,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1\text{ 個}})\overset{\text{dual}}{\longleftrightarrow}\mathbf{k}'=(n+1)$$

なので

$$\zeta(2,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1\text{ 個}})=\zeta(n+1).$$

より一般に, 自然数 $m$, $n$ に対し

$$\mathbf{k}=(n+1,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m-1\text{ 個}})\overset{\text{dual}}{\longleftrightarrow}\mathbf{k}'=(m+1,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1\text{ 個}})$$

なので

$$\zeta(n+1,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m-1\text{ 個}})=\zeta(m+1,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1\text{ 個}}).$$

先に触れた, 多重ゼータ値の積構造の二つ目が, この反復積分表示から得られる. ここでも, $Li_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(z)$ の積が同じ型の関数の和で書けるという, 一般的な定理の特殊化 $(z=1)$ として証明する. 一般的な定理を述べる前に例を計算してみよう.

**例 1.2.10** 補題 1.2.3 より

$$\frac{d}{dz}\left(Li_1(z)^2\right) = 2\frac{1}{1-z}Li_1(z) = 2\frac{d}{dz}Li_{1,1}(z)$$

なので,

$$Li_1(z)^2 = 2Li_{1,1}(z).$$

これと補題 1.2.3 より

$$\frac{d}{dz}\left(Li_2(z)Li_1(z)\right) = \frac{1}{z}Li_1(z)^2 + \frac{1}{1-z}Li_2(z) = 2\frac{1}{z}Li_{1,1}(z) + \frac{1}{1-z}Li_2(z).$$

従って

$$Li_2(z)Li_1(z) = 2Li_{2,1}(z) + Li_{1,2}(z).$$

積分定数はすべて $z=0$ での値が $0$ ということから決まっていることに注意.

重さが 4 までの積を列挙しておく.

重さ 2:

$$Li_1(z)^2 = 2Li_{1,1}(z).$$

重さ 3:

$$\begin{aligned} Li_1(z)Li_2(z) &= 2Li_{2,1}(z) + Li_{1,2}(z), \\ Li_1(z)Li_{1,1}(z) &= 3Li_{1,1,1}(z). \end{aligned}$$

重さ 4:

$$\begin{aligned} Li_1(z)Li_3(z) &= Li_{1,3}(z) + Li_{2,2}(z) + 2Li_{3,1}(z), \\ Li_1(z)Li_{1,2}(z) &= 2Li_{1,2,1}(z) + 2Li_{1,1,2}(z), \\ Li_1(z)Li_{2,1}(z) &= 3Li_{2,1,1}(z) + Li_{1,2,1}(z), \\ Li_1(z)Li_{1,1,1}(z) &= 4Li_{1,1,1,1}(z), \\ Li_2(z)^2 &= 2Li_{2,2}(z) + 4Li_{3,1}(z), \\ Li_2(z)Li_{1,1}(z) &= 3Li_{2,1,1}(z) + 2Li_{1,2,1}(z) + Li_{1,1,2}(z), \\ Li_{1,1}(z)^2 &= 6Li_{1,1,1,1}(z). \end{aligned}$$

**演習問題 8** 上記の公式を確かめよ.

**演習問題 9** 積が重さ 5 となる二つの組合わせを全部列挙し計算せよ. 何か規則が見えてくるか.

**演習問題 10** 自然数 $n$ に対し

$$Li_1(z)^n = n!\, Li_{\underbrace{1,1,\dots,1}_{n\text{ 個}}}(z)$$

を証明せよ.

次の定理は反復積分の積が反復積分の和で書けるという Ree [Ree] による一般的な定理を今の設定で述べたものである.

**定理 1.2.11 (シャッフル積)** $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_{k'}$ を $dt/t$ または $dt/(1-t)$, ただし, $\omega_k = \omega'_{k'} = dt/(1-t)$ とするとき, $|z| < 1$ に対して次が成り立つ

$$\left(\int_0^z \omega_1 \circ \omega_2 \circ \cdots \circ \omega_k\right)\left(\int_0^z \omega'_1 \circ \omega'_2 \circ \cdots \circ \omega'_{k'}\right) = \sum_{(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k+k'})} \left(\int_0^z \eta_1 \circ \eta_2 \circ \cdots \circ \eta_{k+k'}\right).$$

ここで, $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k+k'})$ は, $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ と $(\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_{k'})$ それぞれの順序を保つ順列 (これを $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ と $(\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_{k'})$ のシャッフル (shuffle) という) 全てをわたる.

**証明)** $k + k'$ に関する帰納法で証明する. $k + k' = 2$, すなわち $k = k' = 1$ のときは, 先に例で計算した $Li_1(z)^2 = 2Li_{1,1}(z)$ に他ならないので正しい. 次に $k + k' < n$ のとき正しいと仮定する. $k + k' = n$ のとき, $\omega_i = dt/t$ または $dt/(1-t)$ に応じて, それぞれ $\omega_i(z) := 1/z$ または $1/(1-z)$ と定めておく ($\omega'_i(z)$, $\eta_i(z)$ についても同様). 両辺の微分が等しいことをみればよい. 積の微分法と, 反復積分の定義より

$$\frac{d}{dz}(\text{左辺}) = \omega_1(z)\int_0^z \omega_2 \circ \cdots \circ \omega_k \int_0^z \omega'_1 \circ \omega'_2 \circ \cdots \circ \omega'_{k'} + \omega'_1(z)\int_0^z \omega_1 \circ \omega_2 \circ \cdots \circ \omega_k \int_0^z \omega'_2 \circ \cdots \circ \omega'_{k'}.$$

ここで, $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ と $(\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_{k'})$ のシャッフル全体は, $\omega_1$ の後に $(\omega_2, \dots, \omega_k)$ と $(\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_{k'})$ のシャッフルを並べたものと, $\omega'_1$ の後に $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ と $(\omega'_2, \dots, \omega'_{k'})$ のシャッフルを並べたものに分けられることに注意すると, 帰納法の仮定より

$$(\text{上式の右辺}) = \sum_{(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k+k'})} \eta_1(z) \int_0^z \eta_2 \circ \eta_3 \circ \cdots \circ \eta_{k+k'} = \frac{d}{dz}(\text{右辺})$$

となり, 定理が示された. ∎

定理で $\omega_1 = \omega'_1 = dt/t$ のときは, $z \to 1$ とすると両辺の各項が多重ゼータ値に収束するので, 多重ゼータ値の積が多重ゼータ値の和で書けることが再び証明された.

**注意 1.2.12** この積の規則では, 積の右辺に出てくる項の重さが元のそれぞれの重さの和になることは先の級数の場合と同じであるが, 更に, 各項の深さもそれぞれの深さの和となる.

**演習問題 11** これはなぜか.

**演習問題 12** 具体的にシャッフルを数え上げることで, 自然数 $m$, $n$ に対して

$$Li_m(z)Li_n(z) = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-1+i}{i} Li_{n+i,m-i}(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{m-1+j}{j} Li_{m+j,n-j}(z)$$

が成り立つことを証明せよ.

**例 1.2.13** 反復積分表示

$$Li_2(z)=\int_0^z \frac{dt}{t}\circ\frac{dt}{1-t}$$

と, $(dt/t, dt/(1-t))$ と $(dt/t, dt/(1-t))$ のシャッフルは $(dt/t, dt/(1-t), dt/t, dt/(1-t))$ が 2 通り, $(dt/t, dt/t, dt/(1-t), dt/(1-t))$ が 4 通りなので

$$Li_2(z)^2 = 2Li_{2,2}(z)+4Li_{3,1}(z).$$

よって

$$\zeta(2)^2 = 2\zeta(2,2)+4\zeta(3,1).$$

一方, 先の級数を使った積から,

$$\zeta(2)^2 = 2\zeta(2,2)+\zeta(4).$$

よって,

$$4\zeta(3,1)=\zeta(4).$$

このように, 二つの多重ゼータ値の積 $\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{k}')$ を, 級数による方法, 積分による方法, 二通りの仕方で和に直して比較すると, 多重ゼータ値の間の非自明な線型関係式が生じる. この関係式のことを「(有限) 複シャッフル関係式」(“(finite) double shuffle relation”) という. これを発散級数まで視野にいれて一般化し, 十分多くの関係式を得ようというのが, 第 1.4 節以降の主題である. その前に, これまでに知られている主な関係式について概観する.

## 1.3 いろいろな関係式

この節では, 具体的に与えられるいくつかの関係式の系列を紹介する. ここで述べるものは, 最後の Le-Murakami の関係式を除き「大野関係式」に含まれる. 特殊なものから順に挙げていくのは無駄なようでもあるが, それぞれ独立した興味や示唆するものもあろうからこのままにする.

**双対性**. これは既に前節で述べた. 二つの互いに双対な収束インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ に対し

(9) $$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(\mathbf{k}')$$

が成り立つというものである.

**Hoffman の関係式** [H1]. 収束インデックス $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\dots,k_n)$ に対し,

(10) $$\sum_{i=1}^{n}\zeta(k_1,\dots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\dots,k_n) = \sum_{\substack{1\le l\le n\\ k_l\ge 2}}\sum_{j=0}^{k_l-2}\zeta(k_1,\dots,k_{l-1},k_l-j,j+1,k_{l+1},\dots,k_n)$$

が成り立つ. 右辺の和は, まず $k_l\ge 2$ となる $l$ をわたり, $k_l$ から数 $j$ を引いた分 $k_l$ の右に新たに $j+1$ を挿入したものを $j=0$ から $k_l-2$ まで足している.

**例 1.3.1** $\mathbf{k}=(2)$ とすると再び Euler の公式 $\zeta(3)=\zeta(2,1)$ が得られる.
$\mathbf{k}=(3)$ とすると,

$$\zeta(4)=\zeta(3,1)+\zeta(2,2).$$

また $\mathbf{k}=(2,1)$ とすると,

$$\zeta(3,1)+\zeta(2,2)=\zeta(2,1,1).$$

これら二つと, 前節最後に得られた $4\zeta(3,1)=\zeta(4)$ を合わせて, $\mathcal{Z}_4$ は (たとえば) $\zeta(4)$ で生成される 1 次元空間であることが分かる.

もうひとつ, $\mathbf{k}=(3,2,1)$ に対して,

$$\zeta(4,2,1)+\zeta(3,3,1)+\zeta(3,2,2)=\zeta(3,1,2,1)+\zeta(2,2,2,1)+\zeta(3,2,1,1).$$

Hoffman の証明は, 先に $\zeta(2,1)=\zeta(3)$ を級数の変形で証明したが, そこでのアイデア (部分分数分解による変形) に近い. 後の節で証明する「導分関係式」の特別な場合となっているのでここでは証明は割愛する.

**和公式 (sum formula)** (Granville [Gr], Zagier [Z2]). 重さ $k$, 深さ $n$ $(1\le n<k)$ を固定して, その重さ, 深さを持つ多重ゼータ値すべての和をとると Riemann ゼータ値となる:

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=k\\ \forall k_i\ge 1,k_1\ge 2}}\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\zeta(k). \tag{11}$$

**証明)** Granville の証明は上記の Hoffman の証明同様，級数表示と部分分数分解を用いるものである．Zagier [Z2] の証明は次の通り．式 (11) の左辺の和を $S(k,n)$ と書くと反復積分表示から

$$S(k,n)=\sum_{\substack{\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{k-1}\in\{0,1\}\\ \varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{k-1}=n-1}} I(0,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{k-1},1)$$

が分かる（1 の個数が深さ $n$ であった）．これより $k$ を止めて $n$ に関する母関数を作ると

$$\begin{aligned}
\sum_{0<n<k} S(k,n)\,X^{n-1} &= \sum_{\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{k-1}\in\{0,1\}} I(0,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{k-1},1)\,X^{\varepsilon_2+\cdots\varepsilon_{k-1}}\\
&= \int\cdots\int_{1>t_1>t_2>\ldots>t_k>0}\frac{1}{t_1}\left(\frac{1}{t_2}+\frac{X}{1-t_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{t_{k-1}}+\frac{X}{1-t_{k-1}}\right)\frac{1}{1-t_k}\,dt_1\ldots dt_k\\
&= \frac{1}{(k-2)!}\int\int_{1>t_1>t_k>0}\left(\int_{t_k}^{t_1}\left(\frac{1}{t}+\frac{X}{1-t}\right)dt\right)^{k-2}\frac{dt_1}{t_1}\,\frac{dt_k}{1-t_k}\\
&= \frac{1}{(k-2)!}\int\int_{1>t_1>t_k>0}\left(\log\frac{t_1}{t_k}+X\log\frac{1-t_k}{1-t_1}\right)^{k-2}\frac{dt_1}{t_1}\,\frac{dt_k}{1-t_k}.
\end{aligned}$$

ここで変数変換

$$x=\log\frac{t_1}{t_k},\quad y=\log\frac{1-t_k}{1-t_1},\quad \frac{dt_1}{t_1}\,\frac{dt_k}{1-t_k}=\frac{dx\,dy}{e^{x+y}-1}$$

を行い $X^{n-1}$ の係数を比べると

$$\begin{aligned} S(k,n) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{e^{-mx}\,x^{k-n-1}}{(k-n-1)!}\,\frac{e^{-my}\,y^{n-1}}{(n-1)!}\,dx\,dy \\ &= \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^{k-n}}\,\frac{1}{m^n} = \zeta(k) \qquad (\int_0^\infty e^{-mx}x^{p-1}\,dx = \frac{(p-1)!}{m^p}). \end{aligned}$$

∎

もう一つ，落合啓之氏による証明 (1997) を紹介する.

$S(k,n)$ は上と同様証明したい式の左辺とし, 今度は $n$ を止めて母関数

$$\sum_{k=n+1}^\infty S(k,n)Y^{k-n-1}$$

を考える. これは $|\, Y \,| < 1$ で収束している．なぜなら，多重ゼータ値は定義より

$$|\, \zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n) \,| \le \zeta(2,1,\ldots,1) = \zeta(n+1) \le \zeta(2)$$

をみたし，重さ $k$, 深さ $n$ のインデックスは $\binom{k-2}{n-1}$ 個あったから，この母関数の優級数として $|\, Y \,| < 1$ で収束する

$$\zeta(2)\sum_{k=n+1}^\infty \binom{k-2}{n-1} Y^{k-n-1} = \frac{1}{(1-Y)^n}$$

がとれる． そこで $|\, Y \,| < 1$ として，この母関数を計算すると,

$$\sum_{k=n+1}^\infty \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=k \\ \forall k_i \ge 1, k_1 \ge 2}} \zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)Y^{k-n-1} = \sum_{m_1>\cdots>m_n>0}\ \sum_{k_1\ge 2,k_2,\ldots,k_n\ge 1} \frac{Y^{k_1+\cdots+k_n-n-1}}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\ldots m_n^{k_n}}$$

$$= \sum_{m_1>\cdots>m_n>0}\ \sum_{k_1\ge 2,k_2,\ldots,k_n\ge 1} \frac{Y^{k_1-2}}{m_1^{k_1}}\cdot\frac{Y^{k_2-1}}{m_2^{k_2}}\cdots\frac{Y^{k_n-1}}{m_n^{k_n}}$$

$$= \sum_{m_1>\cdots>m_n>0} \frac{1}{m_1(m_1-Y)}\frac{1}{m_2-Y}\cdots\frac{1}{m_n-Y}.$$

一方, 証明したい式の右辺の母関数は

$$\sum_{k=n+1}^\infty \zeta(k)Y^{k-n-1} = \sum_{k=n+1}^\infty\sum_{m=1}^\infty \frac{Y^{k-n-1}}{m^k} = \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^n(m-Y)}. \tag{12}$$

**補題 1.3.2** 次の積分表示が成立.

$$\begin{aligned} &\sum_{m_1>\cdots>m_n>0} \frac{1}{m_1(m_1-Y)}\frac{1}{m_2-Y}\cdots\frac{1}{m_n-Y} \\ &= \int_0^1 dt_0\cdot t_0^{Y-1}\int_0^{t_0}\frac{dt_1}{1-t_1}\cdot\cdots\cdot\int_0^{t_{n-2}}\frac{dt_{n-1}}{1-t_{n-1}}\int_0^{t_{n-1}}\frac{dt_n}{t_n^Y(1-t_n)}. \end{aligned}$$

**証明)**　後ろの積分から順次, 計算してゆく. $|Y|<1$ とする.

$$\int_0^{t_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n^Y(1-t_n)} = \int_0^{t_{n-1}} \sum_{\nu_n=1}^{\infty} t_n^{\nu_n-Y-1}\,dt_n = \sum_{\nu_n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{\nu_n-Y}t_n^{\nu_n-Y}\Big]_{t_n=0}^{t_n=t_{n-1}} = \sum_{\nu_n=1}^{\infty}\frac{t_{n-1}^{\nu_n-Y}}{\nu_n-Y}.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_{n-2}} \frac{dt_{n-1}}{1-t_{n-1}}\int_0^{t_{n-1}}\frac{dt_n}{t_n^Y(1-t_n)} &= \sum_{\nu_n=1}^{\infty}\int_0^{t_{n-2}}\frac{1}{1-t_{n-1}}\cdot\frac{t_{n-1}^{\nu_n-Y}}{\nu_n-Y}\,dt_{n-1} \\
&= \sum_{\nu_{n-1}=1}^{\infty}\sum_{\nu_n=1}^{\infty}\int_0^{t_{n-2}}\frac{t_{n-1}^{\nu_{n-1}+\nu_n-Y-1}}{\nu_n-Y}\,dt_{n-1} \\
&= \sum_{\nu_{n-1}=1}^{\infty}\sum_{\nu_n=1}^{\infty}\frac{t_{n-2}^{\nu_{n-1}+\nu_n-Y}}{(\nu_n-Y)(\nu_{n-1}+\nu_n-Y)}.
\end{aligned}$$

この操作を繰り返して

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \int_0^1 dt_0\cdot t_0^{Y-1}\sum_{\nu_1,\,\nu_2,\,\ldots,\nu_n=1}^{\infty}\frac{t_0^{\nu_1+\cdots+\nu_n-Y}}{(\nu_n-Y)(\nu_{n-1}+\nu_n-Y)\cdots(\nu_1+\cdots+\nu_n-Y)} \\
&= \sum_{\nu_1,\,\nu_2,\,\ldots,\nu_n=1}^{\infty}\frac{1}{(\nu_n-Y)(\nu_{n-1}+\nu_n-Y)\cdots(\nu_1+\cdots+\nu_n-Y)(\nu_1+\cdots+\nu_n)} \\
&= \text{左辺}
\end{aligned}$$

(補題 1.3.2 の証明終)

和公式の証明に戻る．補題 1.3.2 の右辺の累次積分を多重積分にして

$$\text{右辺} = \int\cdots\int_{1>t_0>t_1>\cdots>t_n>0}\frac{t_0^{Y-1}}{(1-t_1)\cdots(1-t_{n-1})(1-t_n)t_n^Y}\,dt_0\cdots dt_n.$$

$t_{n-1},\ \ldots,t_2,\,t_1$ の順に積分する.

$$\int_{t_n}^{t_{n-2}}\frac{1}{1-t_{n-1}}\,dt_{n-1} = \Big[-\log(1-t_{n-1})\Big]_{t_{n-1}=t_n}^{t_{n-1}=t_{n-2}} = \log\frac{1-t_n}{1-t_{n-2}},$$

$$\begin{aligned}
\iint_{t_{n-3}>t_{n-2}>t_{n-1}>t_n}\frac{1}{(1-t_{n-2})(1-t_{n-1})}\,dt_{n-1}dt_{n-2} &= \int_{t_n}^{t_{n-3}}\frac{1}{1-t_{n-2}}\log\Big(\frac{1-t_n}{1-t_{n-2}}\Big)\,dt_{n-2} \\
&= \Big[\frac{1}{2}\log^2\Big(\frac{1-t_n}{1-t_{n-2}}\Big)\Big]_{t_{n-2}=t_n}^{t_{n-2}=t_{n-3}} \\
&= \frac{1}{2}\log^2\frac{1-t_n}{1-t_{n-3}},
\end{aligned}$$

繰り返して

$$\int\cdots\int_{t_0>t_1>\cdots>t_{n-1}>t_n}\frac{1}{(1-t_1)\cdots(1-t_{n-1})}\,dt_1\cdots dt_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\log^{n-1}\frac{1-t_n}{1-t_0}.$$

まとめると

$$\text{右辺の積分} = \iint_{1>t_0>t_n>0} \frac{t_0^{Y-1}}{t_n^Y(1-t_n)} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \log^{n-1} \frac{1-t_n}{1-t_0}\, dt_0 dt_n$$
$$= \iint_{1>t>s>0} \frac{t^{Y-1}}{s^Y(1-s)} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \log^{n-1} \frac{1-s}{1-t}\, dtds.$$

よって,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} S(k,n) Y^{k-n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \iint_{1>t>s>0} \frac{t^{Y-1}}{s^Y(1-s)} \cdot \log^{n-1} \frac{1-s}{1-t}\, dtds.$$

さらに次の 2 重和を考える. (これは $| X | < | 1-Y |$ で収束する.)

$$\sum_{\substack{k,\,n \\ k>n>0}} S(k,n) X^{n-1} Y^{k-n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl( \sum_{k=n+1}^{\infty} S(k,n) Y^{k-n-1} \Bigr) X^{n-1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \iint_{1>t>s>0} \frac{t^{Y-1}}{s^Y(1-s)} \cdot \Bigl\{ X \log \frac{1-s}{1-t} \Bigr\}^{n-1} dtds$$
$$= \iint_{1>t>s>0} \frac{t^{Y-1}}{s^Y(1-s)} \cdot \exp\Bigl( X \log \frac{1-s}{1-t} \Bigr)\, dtds$$
$$= \iint_{1>t>s>0} \frac{t^{Y-1}}{s^Y(1-s)} \cdot \Bigl( \frac{1-s}{1-t} \Bigr)^X dtds.$$

ここで

$$u = \frac{t}{s}, \quad v = \frac{1-s}{1-t} \tag{13}$$

と変数変換. 積分領域は $u > 1,\ v > 1$ に写される. 逆変換は

$$s = \frac{v-1}{uv-1}, \quad t = \frac{u(v-1)}{uv-1} \tag{14}$$

となり, 関数行列式は

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{(u-1)(v-1)}{(uv-1)^4} \begin{vmatrix} -v & 1 \\ -1 & u \end{vmatrix} = -\frac{(u-1)(v-1)}{(uv-1)^3}. \tag{15}$$

これより, 最後の積分は

$$1-s = \frac{v(u-1)}{uv-1}, \quad s(1-s) = \frac{(u-1)(v-1)v}{(uv-1)^2}$$

などに注意して

$$= \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{u^{Y-1}}{s(1-s)} \cdot v^X \cdot |J|\, dudv = \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{u^{Y-1}v^{X-1}}{uv-1}\, dudv$$

$$= \int_1^\infty \int_1^\infty u^{Y-1}v^{X-1} \sum_{m=1}^\infty \Big(\frac{1}{uv}\Big)^m dudv = \sum_{m=1}^\infty \int_1^\infty u^{Y-m-1}\, du \int_1^\infty v^{X-m-1}\, dv$$

$$= \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{(m-X)(m-Y)}.$$

他方, (12) より

$$\sum_{\substack{k,\,n \\ k>n>0}} \zeta(k) X^{n-1}Y^{k-n-1} = \sum_{n=1}^\infty \Big(\sum_{k=n+1}^\infty \zeta(k) Y^{k-n-1}\Big) X^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{X^{n-1}}{m^n(m-Y)} = \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{(m-X)(m-Y)}.$$

結局,

$$\sum_{\substack{k,\,n \\ k>n>0}} S(k,n) X^{n-1}Y^{k-n-1} = \sum_{\substack{k,\,n \\ k>n>0}} \zeta(k) X^{n-1}Y^{k-n-1}.$$

比較して和公式に到達する. ∎

**演習問題 13** 変数変換 (13) について逆変換が (14) で与えられることを示し, その関数行列式が (15) になることを確かめよ.

**大野の関係式** [O]. 二つの互いに双対な収束インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$, $\mathbf{k}' = (k'_1, \ldots, k'_{n'})$ と, 任意の整数 $l \geq 0$ に対して,

(16) $$\sum_{\substack{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n = l \\ \forall \varepsilon_i \geq 0}} \zeta(k_1+\varepsilon_1, \ldots, k_n+\varepsilon_n) = \sum_{\substack{\varepsilon'_1+\cdots+\varepsilon'_{n'} = l \\ \forall \varepsilon'_i \geq 0}} \zeta(k'_1+\varepsilon'_1, \ldots, k'_{n'}+\varepsilon'_{n'})$$

が成り立つ.

大野氏の証明は, 反復積分表示を用いて母関数を作る Zagier による和公式の証明を一般化したものである. 後に, 右辺の双対を取った形の等式を導分関係式の帰結として証明する. また, 奥田-上野 [OU] による別証明がある.

**例 1.3.3** 双対インデックス $(2,1) \overset{\text{dual}}{\longleftrightarrow} (3)$ に対して, $l = 1$ のとき,

$$\zeta(3,1) + \zeta(2,2) = \zeta(4),$$

$l = 2$ のとき,

$$\zeta(4,1) + \zeta(3,2) + \zeta(2,3) = \zeta(5).$$

また, $(3,2) \overset{\text{dual}}{\longleftrightarrow} (2,2,1)$ および $l=2$ に対し,

$$\zeta(5,2)+\zeta(4,3)+\zeta(3,4)=\zeta(4,2,1)+\zeta(2,4,1)+\zeta(2,2,3)+\zeta(3,3,1)+\zeta(2,3,2)+\zeta(3,2,2).$$

**演習問題 14** 双対性, Hoffman の関係式, 和公式はすべて大野の関係式から導かれることを示せ.

**Le-Murakami の関係式** [**LM1**]. 収束インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)$ に対し, $k_i>1$ なる $i$ の個数を $\mathbf{k}$ の高さ (height) と呼び, $\mathrm{ht}(\mathbf{k})$ と表す. このとき, $1\le s\le k$ に対して, 次が成り立つ.

$$\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{k})=2k\\ \mathrm{ht}(\mathbf{k})=s}}(-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k})=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\sum_{r=0}^{k-s}\binom{2k+1}{2r}(2-2^{2r})B_{2r}\pi^{2k}.$$

[LM1] の中から線形関係式を一つここにあげた. 他にも色々な代数関係式が結び目の不変量を通して得られている ([LM2], [Ta], [IT]). 上の関係式は大野-Zagier [OZ] によって結び目の不変量によらないで証明されている. 大野-Zagier の関係式は §4.3 で紹介する.

また, ここでは紹介しなかった関係式として [HO] などがある.

## 1.4 正規化

この節で, 級数ないし積分が発散するようなインデックスについて, 有限の値を取り出す方法—正規化—について述べる.

### 1.4.1 例と一つの方法

多重ゼータ値の積は, 級数表示, または積分表示を使うことにより二通りの方法で多重ゼータ値の和として書き表された. そしてその二つを等しいとおいて得られる関係式を複シャッフル関係式と呼んだ. その計算を, 収束性を無視して行なうとどうなるだろうか.

例えば,

$$\zeta(1)\zeta(2)=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)=\left(\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{mn^2}\right)=\left(\sum_{m>n>0}+\sum_{n>m>0}+\sum_{m=n>0}\right)\frac{1}{mn^2}$$
$$=\zeta(1,2)+\zeta(2,1)+\zeta(3).$$

$\zeta(1)$ や $\zeta(1,2)$ は収束しないからこの式はとりあえず形式的なものである. 一方, 積分の発散性を無視してシャッフル積を計算すると,

$$\begin{aligned}\zeta(1)\zeta(2)&=\left(\int_0^1\frac{dt}{1-t}\right)\left(\int_0^1\frac{dt}{t}\circ\frac{dt}{1-t}\right)\\&=\int_0^1\frac{dt}{1-t}\circ\frac{dt}{t}\circ\frac{dt}{1-t}+2\int_0^1\frac{dt}{t}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\frac{dt}{1-t}\\&=\zeta(1,2)+2\zeta(2,1).\end{aligned}$$

これは $Li_1(z)Li_2(z) = Li_{1,2}(z) + 2Li_{2,1}(z)$ で $z=1$ とおいたものであるが, やはり形式的な式である. ところがこの二つの $\zeta(1)\zeta(2)$ の式を等しいとおいてみると, 発散項 $\zeta(1,2)$ が打ち消して Euler の $\zeta(3) = \zeta(2,1)$ が得られる. この式は正しいのであるから, 上の議論を然るべく正当化できないであろうか.

**演習問題 15** 同様に, $\zeta(1)\zeta(k_1,\ldots,k_n)$, $(k_1 \geq 2)$ を二通りに計算し, 両者が等しいとおくと, 発散項がキャンセルし, Hoffman の関係式を与えることを確かめよ.

一つの正当化を多重対数関数 $Li_{k_1,\ldots,k_n}(z)$ を使って与えてみよう. 積分のシャッフル積より $Li_1(z)Li_2(z) = Li_{1,2}(z) + 2Li_{2,1}(z)$ は $|z| < 1$ で正しい. 他方

$$\begin{aligned} Li_1(z)Li_2(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^2} \\ &= \sum_{n>m>0} \frac{z^{n+m}}{nm^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n^3} + \sum_{m>n>0} \frac{z^{m+n}}{m^2 n} \end{aligned}$$

である. $z = 1-\varepsilon$ $(0<\varepsilon<1)$ とおいて $\varepsilon \to +0$ の極限を取ったらどうなるか?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n^3} \longrightarrow \zeta(3), \quad \sum_{m>n>0} \frac{z^{m+n}}{m^2 n} \longrightarrow \zeta(2,1), \quad Li_{2,1}(z) \longrightarrow \zeta(2,1) \quad (\varepsilon \to +0)$$

であるので, 次の極限

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \Bigl( Li_{1,2}(z) - \sum_{n>m>0} \frac{z^{n+m}}{nm^2} \Bigr) = 0 \tag{17}$$

が示せれば $\varepsilon \to +0$ として $2\zeta(2,1) = \zeta(2,1) + \zeta(3)$, すなわち $\zeta(2,1) = \zeta(3)$ が得られる. この極限の証明は以下の通り: $Li_{1,2}(z) = \sum_{n>m>0} z^n/nm^2$ で $0<z<1$ のとき $z^n > z^{n+m}$ であるので,

$$0 < Li_{1,2}(z) - \sum_{n>m>0} \frac{z^n}{n} \cdot \frac{z^m}{m^2} = \sum_{n>m>0} \frac{z^n}{n} \cdot \frac{1-z^m}{m^2} < \varepsilon \sum_{n>m>0} \frac{(1-\varepsilon)^n}{n} \cdot \frac{1}{m}.$$

最後の不等号のところで評価

$$1 - z^m = (1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^{m-1}) < m\varepsilon$$

を用いた.

$$\sum_{n>m>0} \frac{(1-\varepsilon)^n}{n} \cdot \frac{1}{m} = Li_{1,1}(1-\varepsilon) = \frac{1}{2}(-\log\varepsilon)^2$$

であり (演習問題 10) かつ $\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon(-\log\varepsilon)^2 = 0$ だから (17) を得る. ∎

同様の方法（“易しいゼータ正規化”）で深さ $=2$ の和公式を示すこともできる: 演習問題 12 の式において $m=1$, $n=k$ とすると

$$Li_1(z)Li_k(z) = Li_{k,1}(z) + \sum_{j=0}^{k-1} Li_{j+1,k-j}(z).$$

他方

$$Li_1(z)Li_k(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m^k}=\sum_{m>n>0}\frac{z^{m+n}}{m^kn}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n^{k+1}}+\sum_{n>m>0}\frac{z^{n+m}}{nm^k}.$$

ここで $z=1-\varepsilon$, $\varepsilon\to+0$ とすると

$$Li_{k,1}(z)\longrightarrow\zeta(k,1),\qquad \sum_{m>n>0}\frac{z^{m+n}}{m^kn}\longrightarrow\zeta(k,1),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n^{k+1}}\longrightarrow\zeta(k+1).$$

さらに $j\geq 1$ のとき

$$Li_{j+1,k-j}(z)\longrightarrow\zeta(j+1,k-j).$$

後は極限

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\Bigl(Li_{1,k}(z)-\sum_{n>m>0}\frac{z^{n+m}}{nm^k}\Bigr)=0 \tag{18}$$

を示すことが出来れば $\varepsilon\to+0$ の極限として

$$\zeta(k+1)=\sum_{j=1}^{k-1}\zeta(j+1,k-j)$$

を得る. これが深さ $=2$ の和公式である. 極限 (18) は, 極限 (17) を示したのと同様に

$$\begin{aligned}0<Li_{1,k}(z)-\sum_{n>m>0}\frac{z^n}{n}\cdot\frac{z^m}{m^k} &= \sum_{n>m>0}\frac{z^n}{n}\cdot\frac{1-z^m}{m^k}<\varepsilon\sum_{n>m>0}\frac{(1-\varepsilon)^n}{n}\cdot\frac{1}{m^{k-1}}\\ &\leq \varepsilon\sum_{n>m>0}\frac{(1-\varepsilon)^n}{n}\cdot\frac{1}{m}=\varepsilon Li_{1,1}(1-\varepsilon)=\frac{1}{2}\varepsilon(\log\varepsilon)^2\end{aligned}$$

より示せる. ∎

### 1.4.2 代数的定式化

Hoffman [H2] によって導入された多重ゼータ値の代数的な取り扱いは, 正規化を定式化する際にも便利である. この節でそれを説明する.

$x$, $y$ を変数として $\mathfrak{H}:=\mathbf{Q}\langle x,y\rangle$ で $\mathbf{Q}$ 上の 2 変数非可換多項式環を表すものとし

$$\mathfrak{H}^1:=\mathbf{Q}+\mathfrak{H}y,\qquad \mathfrak{H}^0:=\mathbf{Q}+x\mathfrak{H}y$$

とおく. $\mathfrak{H}^1$ は $\mathbf{Q}$-線形空間としては 1 と, 右端が $y$ で終るような単項式 (word) で張られ, $\mathfrak{H}^0$ は 1 と, 左端が $x$ で始まり右端が $y$ で終る単項式で張られる. それぞれ $\mathfrak{H}$ の部分環 ($\mathfrak{H}^0\subset\mathfrak{H}^1\subset\mathfrak{H}$) である.

自然数 $k$ に対し $z_k=x^{k-1}y$ とおく. $\mathfrak{H}^1$ は, $z_k$ ($k=1,2,3,\ldots$) で生成される非可換多項式環とみなすことが出来る. $k\geq 2$ であれば $z_k$ は $\mathfrak{H}^0$ に属する. ただし $\mathfrak{H}^0$ は $k\geq 2$ であるような $z_k$ で生成される訳ではない. たとえば $x^2y^2$ はそのような元の積では書けない. $\mathfrak{H}^0$ は $x^my^n$ ($m,n=1,2,3,\ldots$) で自由に生成されている.

今, $\mathbf{Q}$-線形写像 (“evaluation map”)

$$Z : \mathfrak{H}^0 \longrightarrow \mathbf{R}$$

を, $\mathfrak{H}^0$ の各単項式 $w = z_{k_1} z_{k_2} \cdots z_{k_n}$ に対し ($\mathfrak{H}^0$ の元ということから $k_1 \geq 2$ に注意)

$$Z(w) = \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

とし (ただし $Z(1) = 1$ とする), これを $\mathbf{Q}$-線形に拡張したものとする. あるいは, 反復積分表示に対応して書くと, $w = u_1 u_2 \cdots u_k$, ($u_1 = x$, $u_k = y$) に対し, $u_i = x$ のとき $\omega_i = dt/t$, $u_i = y$ のとき $\omega_i = dt/(1-t)$ として,

$$Z(w) = \int_0^1 \omega_1 \circ \omega_2 \circ \cdots \circ \omega_k,$$

これを $\mathbf{Q}$-線形に拡張したもの, と言ってもよい.

単項式 $w \in \mathfrak{H}^0$ に対して, 対応する多重ゼータ値 $Z(w)$ の重さは $w$ の次数で, 深さが $w$ の $y$ についての次数である. 以後 $w \in \mathfrak{H}^1$ についてもこの意味で重さ, 深さ, の語を用いる.

**例 1.4.1** $Z(xy) = \zeta(2)$, $Z(x^2 y) = \zeta(3)$, 一般に $k \geq 2$ に対し $Z(z_k) = \zeta(k)$. また $Z(xy^2) = \zeta(2,1)$, $Z(x^2 y^2 x^3 y) = \zeta(3,1,4)$ など.

この対応を頭にいれて, 多重ゼータ値の積を級数表示を用いて和に直す規則に対応するような, しかも前節で見たように, 発散するものも形式的には同じ規則に従うのでそれも取り込んだ形で, $\mathfrak{H}^1$ に新たな積 $*$ (調和積, harmonic product) を定義する. 例えば

$$\zeta(p)\zeta(q) = \zeta(p,q) + \zeta(q,p) + \zeta(p+q)$$

に対応して

$$z_p * z_q = z_p z_q + z_q z_p + z_{p+q}$$

となるような積である. $\mathfrak{H}^1$ は $z_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ で生成されていることをもう一度確認しておく.

$\mathfrak{H}^1$ 上の積 $*$ を次の規則および $\mathbf{Q}$-双線型性により定義する:

**H1**. $\mathfrak{H}^1$ の任意の元 $w$ に対し $w * 1 = 1 * w = w$.

**H2**. $\mathfrak{H}^1$ の任意の words $w_1$, $w_2$ と正整数 $p$, $q$ に対し

$$z_p w_1 * z_q w_2 = z_p(w_1 * z_q w_2) + z_q(z_p w_1 * w_2) + z_{p+q}(w_1 * w_2).$$

これは, 級数による展開の規則を深さに関して帰納的に適用しているのである.

**例 1.4.2** 深さが 1 と 2 の積は

$$\begin{aligned} z_p * z_q z_r &= z_p(1 * z_q z_r) + z_q(z_p * z_r) + z_{p+q}(1 * z_r) \\ &= z_p z_q z_r + z_q(z_p z_r + z_r z_p + z_{p+r}) + z_{p+q} z_r \\ &= z_p z_q z_r + z_q z_p z_r + z_q z_r z_p + z_q z_{p+r} + z_{p+q} z_r \end{aligned}$$

となり, これが多重ゼータ値の積

$$\zeta(p)\zeta(q,r) = \zeta(p,q,r) + \zeta(q,p,r) + \zeta(q,r,p) + \zeta(q,p+r) + \zeta(p+q,r)$$

に対応している.

Hoffman [H2] はこの演算 $*$ が結合法則

$$w_1 * (w_2 * w_3) = (w_1 * w_2) * w_3$$

を満たし可換 $w_1 * w_2 = w_2 * w_1$ であること, 従ってこの積が $\mathfrak{H}^1$ に $\mathbf{Q}$ 上の可換代数の構造を与えることを, 単項式の次数に関する帰納法で示した. この $\mathbf{Q}$ 代数を $\mathfrak{H}^1_*$ と書く. 部分空間 $\mathfrak{H}^0$ はこの積に関して $\mathfrak{H}^1_*$ の部分代数となり, これを $\mathfrak{H}^0_*$ と書く. Hoffman はさらに, 写像 $Z : \mathfrak{H}^0 \longrightarrow \mathbf{R}$ がこの積に関して準同型であること, すなわち,

$$Z(w_1 * w_2) = Z(w_1)Z(w_2) \quad (w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0) \tag{19}$$

の証明も与えた. (そもそもこうなるように $*$ を定義しているのである.)

次に, 積分のシャッフル積に対応する積 $\text{ш}$ (これもシャッフル積, shuffle product, と呼ぶ) を, こんどは全 $\mathfrak{H} = \mathbf{Q}\langle x, y\rangle$ 上に, 次の規則および $\mathbf{Q}$-双線型であること要請して定義する:

**S1**. $\mathfrak{H}$ の任意の元 $w$ に対し $w \text{ш} 1 = 1 \text{ш} w = w$.

**S2**. $u_i = x$ または $y$ $(i = 1,\ 2)$ と任意の words $w_1$, $w_2$ に対し

$$(u_1 w_1) \text{ш} (u_2 w_2) = u_1(w_1 \text{ш} u_2 w_2) + u_2(u_1 w_1 \text{ш} w_2).$$

シャッフル積 $\text{ш}$ が結合法則 $w_1 \text{ш} (w_2 \text{ш} w_3) = (w_1 \text{ш} w_2) \text{ш} w_3$ をみたし, かつ可換 $w_1 \text{ш} w_2 = w_2 \text{ш} w_1$ であることは容易に分かり, これにより $\mathfrak{H}$ に可換な $\mathbf{Q}$ 代数の構造が入る (シャッフル積代数の一般的なことは [Reu] を参照). この $\mathbf{Q}$ 代数を $\mathfrak{H}_{\text{ш}}$ と書き, $\mathfrak{H}^1$, $\mathfrak{H}^0$ がそれぞれ部分代数になるのでそれを $\mathfrak{H}^1_{\text{ш}}$, $\mathfrak{H}^0_{\text{ш}}$ と書く. 反復積分のシャッフル積から来る多重ゼータ値の積の規則は, 写像 $Z : \mathfrak{H}^0 \longrightarrow \mathbf{R}$ が $\text{ш}$ に関しても準同型である, つまり

$$Z(w_1 \text{ш} w_2) = Z(w_1)Z(w_2) \quad (w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0) \tag{20}$$

が成り立つこととして定式化される.

**例 1.4.3** $\star$ $x \text{ш} y = y \text{ш} x = xy + yx$.

$\star$ $y^{\text{ш} n} := \underbrace{y \text{ш} y \text{ш} \cdots \text{ш} y}_{n} = n! y^n$.

$\star$ $x^{\text{ш} n} := \underbrace{x \text{ш} x \text{ш} \cdots \text{ш} x}_{n} = n! x^n$.

$\star$ $p,\ q \geq 1$ のとき

$$z_p \text{ш} z_q = x^{p-1} y \text{ш} x^{q-1} y = \sum_{i=0}^{q-1} \binom{p-1+i}{i} z_{p+i} z_{q-i} + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{q-1+j}{j} z_{q+j} z_{p-j}.$$

$\star$ 特に $p = 1$ のとき, $z_1 \text{ш} z_q = y \text{ш} x^{q-1} y = z_q z_1 + \sum_{i=0}^{q-1} z_{1+i} z_{q-i}$.

**演習問題 16** これらを証明せよ.

二つの式 (19), (20) を合わせることにより得られるのが (有限) 複シャッフル関係式 ((finite) double shuffle relation) である.

**命題 1.4.4 (有限複シャッフル関係式, finite double shuffle relation)** 任意の $w_1,\ w_2 \in \mathfrak{H}^0$ に対し

$$Z(w_1 ш w_2 - w_1 * w_2) = 0.$$

**注意 1.4.5** $w_1,\ w_2$ 共に定数でなければ常に $\omega_1 ш w_2 \neq w_1 * w_2$ なので (何故か?), これはいつも非自明な関係を与える.

ひとつ例をあげる.

**例 1.4.6** $w_1 = z_p = x^{p-1}y$, $w_2 = z_q = x^{q-1}y$ とする. $w_1$, $w_2 \in \mathfrak{H}^0$ のための条件は $p,\ q \geq 2$ である. 先の例であげたように

$$w_1 ш w_2 = z_p ш z_q = x^{p-1}y ш x^{q-1}y = \sum_{i=0}^{q-1} \binom{p-1+i}{i} z_{p+i}z_{q-i} + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{q-1+j}{j} z_{q+j}z_{p-j}$$

であるので

$$\begin{aligned} Z(w_1 ш w_2) &= \sum_{i=0}^{q-1} \binom{p-1+i}{i} Z(z_{p+i}z_{q-i}) + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{q-1+j}{j} Z(z_{q+j}z_{p-j}) \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} \binom{p-1+i}{i} \zeta(p+i, q-i) + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{q-1+j}{j} \zeta(q+j, p-j). \end{aligned}$$

一方, $w_1 * w_2 = z_p * z_q = z_p z_q + z_q z_p + z_{p+q}$ より

$$Z(w_1 * w_2) = \zeta(p,q) + \zeta(q,p) + \zeta(p+q).$$

従って命題 1.4.4 より

$$\sum_{i=0}^{q-1} \binom{p-1+i}{i} \zeta(p+i, q-i) + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{q-1+j}{j} \zeta(q+j, p-j) = \zeta(p,q) + \zeta(q,p) + \zeta(p+q)$$

である.

この例で $p = 1$ の場合は $\omega_1 \notin \mathfrak{H}^0$ なので, 命題1.4.4 は適用出来ないが, 実際には前節 (“易しい正規化”) でみたように, 最後の等式は発散する部分が打ち消しあって, 次が成立する.

$$\sum_{i=1}^{q-1} \zeta(1+i, q-i) = \zeta(1+q). \tag{21}$$

これは深さ 2 の和公式 (11) でもあるし, Hoffman の関係式 (10) の特別な場合とも見做せる.
一般には, $w_1$ または $w_2$ が発散する多重ゼータ値に対応するとき ($\mathfrak{H}^0$ には入らない $\mathfrak{H}^1$ の元のとき), $Z(w_1 ш w_2)$ と $Z(w_1 * w_2)$ には打ち消し合わない発散項が現れる. このようなときにまで話を拡張するのが以下で行なうことである.

### 1.4.3 級数表示を用いた正規化

$\mathbf{Q}$ 代数準同型 $Z:\mathfrak{H}^0_* \longrightarrow \mathbf{R}$ の $\mathfrak{H}^1_*$ への拡張を代数的に定義する.

**命題 1.4.7** $\mathbf{Q}$ 代数準同型 $Z^*:\mathfrak{H}^1_* \longrightarrow \mathbf{R}[T]$ で, 次の条件をみたすものが一意的に存在する.

$$Z^*\Big|_{\mathfrak{H}^0_*} = Z, \qquad Z^*(y) = T.$$

**証明)** これは, $\mathfrak{H}^1_*$, $\mathfrak{H}^0_*$ の構造に関する Hoffman の定理 [H2, Th. 3.1, Th. 4.1] より殆んど明らかである. すなわち, その定理によれば, $\mathfrak{H}^1_*$ は $\mathfrak{H}^0_*$ 上 $y$ で生成される多項式環 (積は $*$) に同型である; $\mathfrak{H}^1_* \simeq \mathfrak{H}^0_*[y]$. つまり, 任意の $w \in \mathfrak{H}^1_*$ は一意的に

$$w = w_0 + w_1 * y + w_2 * y^{*2} + \cdots + w_n * y^{*n} \quad (w_0,\, w_1, \ldots, w_n \in \mathfrak{H}^0_*)$$

の形に表せる. ここで $w_i$ を $Z(w_i)$ に, $y$ を $T$ に置き換えて得られるのが $Z^*(w)$ である. ∎

$\mathfrak{H}^1$ の元を上の形に書いたとき, その "定数項" を取り出す写像 (調和積による代数的な正規化) が後で必要になるので定義しておく.

**定義 1.4.8** $\mathfrak{H}^1$ の元 $w$ を

$$w = w_0 + w_1 * y + w_2 * y^{*2} + \cdots + w_n * y^{*n} \quad (w_0,\, w_1, \ldots, w_n \in \mathfrak{H}^0)$$

と書いたとき, $w_0$ を $\mathrm{reg}_*(w)$ で表す.

このように代数的に定義される写像 $Z^*$ が, 解析的には以下のような意味を持つ. まず, インデックス $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ ($k_1 = 1$ でもよい) に対して, 対応する $\mathfrak{H}^1$ の元 $w\,(= x^{k_1-1}y \cdots x^{k_n-1}y)$ の $Z^*$ による像を $Z^*_{\mathbf{k}}(T)$ と書くことにする:

$$Z^*_{\mathbf{k}}(T) = Z^*(x^{k_1-1}y \cdots x^{k_n-1}y).$$

実例を挙げよう. 各自定義にのっとって計算してみられたい.

**例 1.4.9**

$$\begin{aligned}
Z^*_1(T) &= T,\\
Z^*_{1,1}(T) &= \frac{T^2}{2} - \frac{\zeta(2)}{2},\\
Z^*_{1,2}(T) &= \zeta(2)T - \zeta(3) - \zeta(2,1),\\
Z^*_{1,1,1}(T) &= \frac{T^3}{6} - \frac{\zeta(2)}{2}T + \frac{\zeta(3)}{3},\\
Z^*_{1,3}(T) &= \zeta(3)T - \zeta(4) - \zeta(3,1),\\
Z^*_{1,2,1}(T) &= \zeta(2,1)T - \zeta(3,1) - \zeta(2,2) - 2\zeta(2,1,1),\\
Z^*_{1,1,2}(T) &= \frac{\zeta(2)}{2}T^2 - (\zeta(3) + \zeta(2,1))T + \frac{\zeta(4)}{2} + \zeta(3,1) + \zeta(2,1,1),\\
Z^*_{1,1,1,1}(T) &= \frac{T^4}{24} - \frac{\zeta(2)}{4}T^2 + \frac{\zeta(3)}{3}T - \frac{\zeta(4)}{8} + \frac{\zeta(2,2)}{4},\\
Z^*_{1,1,1,1,1}(T) &= \frac{T^5}{120} - \frac{\zeta(2)}{12}T^3 + \frac{\zeta(3)}{6}T^2 - \left(\frac{\zeta(4)}{8} - \frac{\zeta(2,2)}{4}\right)T + \frac{\zeta(5)}{30} - \frac{\zeta(2,3)}{6} - \frac{\zeta(3,2)}{6}.
\end{aligned}$$

一方, 正数 $M>0$ とインデックス $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ ($k_1=1$ でもよい) に対して

$$\zeta_M(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\sum_{M>m_1>\cdots>m_n>0}\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\ldots m_n^{k_n}}$$

とおく. $k_1\geq 2$ なら $M\to\infty$ のとき $\zeta_M(\mathbf{k})\to\zeta(\mathbf{k})$ である. $k_1=1$ なら $M\to\infty$ のとき $\zeta_M(\mathbf{k})$ は発散する.

この有限和 $\zeta_M(\mathbf{k})$ についても, 多重ゼータ値のときと同じ規則 (調和積) で 積を和になおせることに注意する. 例えば,

$$\zeta_M(a)\zeta_M(b)=\zeta_M(a,b)+\zeta_M(b,a)+\zeta_M(a+b).$$

**命題 1.4.10** (i) 任意の ( 収束とは限らない ) インデックス $\mathbf{k}$ に対して, ある正数 $J$ があり

$$\zeta_M(\mathbf{k})=Z^*_{\mathbf{k}}(\log M+\gamma)+O(M^{-1}\log^J M)\qquad(M\to\infty).$$

ただし $\gamma$ は Euler の定数

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)=0.57721566490153286\ldots$$

である. すなわち, $\zeta_M(\mathbf{k})$ の発散の度合いは $\log M$ の多項式のオーダーであり, その多項式が $Z^*_{\mathbf{k}}(T+\gamma)$ で与えられる.

(ii) $\mathbf{k}=(\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\mathbf{k}')$, $\mathbf{k}'$ は収束インデックス, とするとき,

$$Z^*_{\mathbf{k}}(T)=\zeta(\mathbf{k}')\frac{T^s}{s!}+\text{低次の項}$$

で, $\mathbf{k}$ の重さを $k$ とすると, $Z^*_{\mathbf{k}}(T)$ の $T^i$ の係数は $\mathcal{Z}_{k-i}$ ( 重さが $k-i$ の多重ゼータ値で張られる $\mathbf{Q}$ ベクトル空間 ) に属する.

**証明)** (i) $s$ に関する帰納法で証明する. $s=0$ のとき, すなわち $\mathbf{k}$ が収束インデックスのときは $Z^*_{\mathbf{k}}(T)=\zeta(\mathbf{k})$ であり, 評価

$$\zeta_M(\mathbf{k})=\zeta(\mathbf{k})+O(M^{-1}\log^J M)$$

が成り立つことは, 補題 1.1.2 でやった収束性の証明での評価を参考にして容易に示すことが出来る（$k_1=2$ のときは 3 行下の評価が必要）. これから出発して帰納的に証明するためのポイントは二つで, 一つは上で述べたように $\zeta_M(\mathbf{k})$ も調和積の規則に従うこと, もう一つはよく知られた評価

$$\zeta_M(1)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{M-1}=\log M+\gamma+O\big(\frac{1}{M}\big)$$

である. $Z^*_{(1)}(T)=Z^*(y)=T$ なので, この評価が $\mathbf{k}=(1)$ の場合を与える.

$\mathbf{k}=(\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\mathbf{k}')$ ($s\geq 1$, $\mathbf{k}'=(k_1,\ldots,k_r)$, $k_1\geq 2$) のときは

$$\begin{aligned}(22)\qquad \zeta_M(1)\zeta_M(\underbrace{1\ldots,1}_{s-1},\mathbf{k}')&=s\zeta_M(\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\mathbf{k}')+\zeta_M(\underbrace{2,\ldots,1}_{s-1},\mathbf{k}')+\zeta_M(\underbrace{1,2,\ldots,1}_{s-1},\mathbf{k}')\\&+\cdots+\zeta_M(\underbrace{1,\ldots,2}_{s-1},\mathbf{k}')+\sum_{i=1}^{r}\zeta_M(\underbrace{1,\ldots,1}_{s-1},\mathbf{k}''_{(i)})+\sum_{i=1}^{r}\zeta_M(\underbrace{1,\ldots,1}_{s-1},\mathbf{k}'''_{(i)})\end{aligned}$$

ただし

$$\mathbf{k}''_{(i)} = (k_1, \ldots, k_i, 1, k_{i+1}, \ldots, k_r), \quad \mathbf{k}'''_{(i)} = (k_1, \ldots, k_i + 1, k_{i+1}, \ldots, k_r)$$

とおいた. $\mathbf{k}''_{(i)}, \mathbf{k}'''_{(i)}$ は共に収束インデックスであることに注意.

他方, $w = z_{k_1} z_{k_2} \cdots z_{k_r}$ と書き,

$$w_{(i)} = z_{k_1} \cdots z_{k_i} z_1 z_{k_{i+1}} \cdots z_{k_r}, \quad w^{(i)} = z_{k_1} \cdots z_{k_i+1} z_{k_{i+1}} \cdots z_{k_r}$$

とおくと,

$$y * (y^{s-1}w) = sy^s w + z_2 y^{s-2} w + \cdots + y^{s-2} z_2 w + \sum_{i=1}^{r} y^{s-1} w_{(i)} + \sum_{i=1}^{r} y^{s-1} w^{(i)}.$$

両辺に $Z^*$ を施して ( $Z^*(y * (y^{s-1}w)) = Z^*(y)Z^*(y^{s-1}w) = TZ^*(y^{s-1}w)$ に注意し) すべてインデックスの記法に書き換えると

$$(23) \qquad \begin{aligned} TZ^*_{\underbrace{1,\ldots,1}_{s-1},\mathbf{k}'}(T) \;&=\; sZ^*_{\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\mathbf{k}}(T) + Z^*_{\underbrace{2,\ldots,1}_{s-1},\mathbf{k}}(T) + \cdots + Z^*_{\underbrace{1,\ldots,2}_{s-1},\mathbf{k}}(T) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r} Z^*_{\underbrace{1,\ldots,1}_{s-1},\mathbf{k}''_{(i)}}(T) + \sum_{i=1}^{r} Z^*_{\underbrace{1,\ldots,1}_{s-1},\mathbf{k}'''_{(i)}}(T). \end{aligned}$$

これが丁度 (22) に対応している. 帰納法の仮定により, $\widetilde{\mathbf{k}}$ が任意の収束インデックスのとき、ある整数 $\tilde{J} \geq 0$ があって

$$(24) \qquad \zeta_M(\underbrace{1,\ldots,1}_{s-1},\widetilde{\mathbf{k}}) = Z^*_{\underbrace{1,\ldots,1}_{s-1},\widetilde{\mathbf{k}}}(\log M + \gamma) + O(M^{-1}\log^{\tilde{J}} M)$$

となる. $\widetilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k}', \mathbf{k}''_{(i)}, \mathbf{k}'''_{(i)}$ についての (24) を (22) に代入し, (23) と比べることにより

$$\zeta_M(\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\mathbf{k}') = Z^*_{\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\mathbf{k}'}(\log M + \gamma) + O(M^{-1}\log^{J} M) \qquad (\exists J \in \mathbf{Z},\ J \geq 0)$$

が得られる.

また (ii) も (23) を用いれば容易に帰納的に示すことができる. ∎

**演習問題 17** 評価

$$\zeta_M(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k}) + O(M^{-1}\log^{J} M) \quad (M \to \infty,\ J \text{ はある正数})$$

を示せ.

### 1.4.4 積分表示を用いた正規化

前節で行なったと同じことを今度はシャッフル積について行なう.

**命題 1.4.11** **Q** *代数準同型* $Z^{ш} : \mathfrak{H}^1_{ш} \longrightarrow \mathbf{R}[T]$ *で, 次の条件をみたすものが一意的に存在する.*

$$Z^{ш}\Big|_{\mathfrak{H}^0_{ш}} = Z, \qquad Z^{ш}(y) = T.$$

**証明)**　シャッフル積代数の構造に関する定理 ([Reu, Th. 6.1]) より $\mathfrak{H}^1_{ш} \simeq \mathfrak{H}^0_{ш}[y]$ となり, 命題 1.4.7 と同様に存在と一意性が分かる. ∎

$\mathfrak{H}^1_{ш}$ の元の, $\mathfrak{H}^0_{ш}[y]$ の元としての具体的な書き表し方を与えておくことは, 後の便宜にもなるので, ここで同型 $\mathfrak{H}^1_{ш} \simeq \mathfrak{H}^0_{ш}[y]$ の証明とともに与えておくことにする.

**補題 1.4.12**　$\mathfrak{H}^1$ の任意の word $y^n w$ ($n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$, $w \in \mathfrak{H}^0$) は一意的に

$$y^n w = w_0 + w_1 ш y + w_2 ш y^{ш 2} + \cdots + w_n ш y^{ш n} \quad (w_0,\ w_1, \ldots, w_n \in \mathfrak{H}^0) \tag{25}$$

と表せる ( 従って任意の $\mathfrak{H}^1$ の元もこの形に表せる ). ただし $y^{ш i} = \underbrace{y ш \cdots ш y}_{i}$ である. このとき, 各 "係数" $w_i$ は, $w = xw'$ ($w' \in \mathfrak{H}^1$) と書くとき,

$$w_i = \frac{(-1)^{n-i}}{i!}\bigl(x(y^{n-i} ш w')\bigr)$$

で与えられる. $y^{ш i} = i!\, y^i$ に注意すれば

$$y^n w = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\bigl(x(y^{n-i} ш w')\bigr) ш y^i. \tag{26}$$

**証明)**　式 (26) を $n$ に関する帰納法で証明する. $n = 0$ のときは自明な式である. $n-1$ まで正しいとすると,

$$y^{n-1}xw' = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i}\bigl(x(y^{n-1-i} ш w')\bigr) ш y^i = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i}\bigl(x(y^{n-i} ш w')\bigr) ш y^{i-1}.$$

いま, シャッフル積の定義における規則 **S2** より,

$$\bigl(x(y^{n-i} ш w')\bigr) ш y^i = x\bigl((y^{n-i} ш w') ш y^i\bigr) + y\Bigl(\bigl(x(y^{n-i} ш w')\bigr) ш y^{i-1}\Bigr)$$

であるので

$$\begin{aligned}
y^n xw' &= y(y^{n-1}xw') = y\Bigl(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i}\bigl(x(y^{n-i} ш w')\bigr) ш y^{i-1}\Bigr) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i}\Bigl(\bigl(x(y^{n-i} ш w')\bigr) ш y^i - x\bigl((y^{n-i} ш w') ш y^i\bigr)\Bigr) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\Bigl(\bigl(x(y^{n-i} ш w')\bigr) ш y^i - x\bigl((y^{n-i} ш w') ш y^i\bigr)\Bigr).
\end{aligned}$$

ところで,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} x\bigl((y^{n-i} ш w') ш y^i\bigr) = x\Bigl(\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}(y^{n-i} ш y^i)\Bigr) ш w'$$

であるが,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}(y^{n-i} ш y^i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\binom{n}{i} y^n = (-1)^n \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}\right) y^n = 0$$

なので (26) が導かれる．あと示すべきは表示 (25) の一意性である．$w \in \mathfrak{H}^0$ に対して

$$w ш y^n = y^n w + y^{n-1} w'_{n-1} + \cdots + y w'_1 + w'_0 \qquad (w'_{n-1}, \ldots, w'_0 \in \mathfrak{H}^0)$$

と表せることが $n$ に関する帰納法で容易に分かる．いま

$$w_0 + w_1 ш y + w_2 ш y^2 + \cdots + w_n ш y^n = 0 \qquad (w_0,\ w_1, \ldots, w_n \in \mathfrak{H}^0)$$

とする．左辺は $y^n w_n + y^{n-1} v_{n-1} + \cdots + y v_1 + v_0 \quad (v_0, \ldots, v_{n-1} \in \mathfrak{H}^0)$ の形に書けるので $w_n = 0$ となる．以下帰納的に $w_{n-1} = 0, \ldots, w_0 = 0$ が結論される． ∎

次の定義 (シャッフル積による代数的な正規化) があとで必要になる．

**定義 1.4.13** $\mathfrak{H}^1$ の元 $w$ に対し，これを

$$w_0 + w_1 ш y + w_2 ш y^{ш 2} + \cdots + w_n ш y^{ш n} \quad (w_0,\ w_1, \ldots, w_n \in \mathfrak{H}^0)$$

の形に書いたとき，その "定数項" $w_0$ を $\mathrm{reg}_ш(w)$ で表す．

(26) によれば，$w = xw'$ を $\mathfrak{H}^0$ の word とするとき，

$$\mathrm{reg}_ш(y^n w) = (-1)^n x(y^n ш w') \tag{27}$$

である．

調和積のときと同様に，インデックス $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ ($k_1 = 1$ でもよい) に対して，対応する $\mathfrak{H}^1$ の元 $w\,(= x^{k_1-1}y \cdots x^{k_n-1}y)$ の $Z^ш$ による像を $Z^ш_{\mathbf{k}}(T)$ と書くことにする:

$$Z^ш_{\mathbf{k}}(T) = Z^ш(x^{k_1-1}y \cdots x^{k_n-1}y).$$

**例 1.4.14**

$$\begin{aligned}
Z^ш_{1}(T) &= T, \\
Z^ш_{1,1}(T) &= \frac{T^2}{2}, \\
Z^ш_{1,2}(T) &= \zeta(2)T - 2\zeta(2,1), \\
Z^ш_{1,1,1}(T) &= \frac{T^3}{6}, \\
Z^ш_{1,3}(T) &= \zeta(3)T - 2\zeta(3,1) - \zeta(2,2), \\
Z^ш_{1,2,1}(T) &= \zeta(2,1)T - 3\zeta(2,1,1), \\
Z^ш_{1,1,2}(T) &= \frac{\zeta(2)}{2}T^2 - 2\zeta(2,1)T + 3\zeta(2,1,1), \\
Z^ш_{1,1,1,1}(T) &= \frac{T^4}{24}, \\
Z^ш_{1,1,1,1,1}(T) &= \frac{T^5}{120}.
\end{aligned}$$

この多項式が, 定義 1.2.2 で導入した関数 $Li_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(t)$ の $t\to 1$ のときの発散の度合いを計っている.

**命題 1.4.15** (i) 任意の (収束とは限らない) インデックス $\mathbf{k}$ に対して, ある正数 $J$ があり

$$Li_{\mathbf{k}}(z)=Z^{ш}_{\mathbf{k}}(-\log(1-z))+O((1-z)\log^J(1-z))\quad(z\to 1,\ 0<z<1).$$

(ii) $\mathbf{k}=(\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\mathbf{k}')$, $\mathbf{k}'$ は収束インデックス, とするとき,

$$Z^{ш}_{\mathbf{k}}=\zeta(\mathbf{k}')\frac{T^s}{s!}+\text{低次の項}$$

で, $\mathbf{k}$ の重さを $k$ とすると, $Z^{ш}_{\mathbf{k}}$ の $T^i$ の係数は $\mathcal{Z}_{k-i}$ に属する.

**証明)** 命題 1.4.10 の証明と同様の方針で出来る. ここで基本になるのは $Li_1(t)=-\log(1-t)$ である. $\mathbf{k}=(\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\mathbf{k}')$, $\mathbf{k}'=(k_1,\ldots,k_r)$ と書き $k_1\geq 2$ とする. 命題の評価式を $s$ に関する帰納法で示す. $s=0$, つまり $\mathbf{k}$ が収束インデックスのときは, 補題 1.2.3 より

$$\zeta(\mathbf{k})-Li_{\mathbf{k}}(z)=\int_z^1\frac{1}{t}Li_{k_1-1,k_2,\ldots,k_n}(t)\,dt$$

で, いま $z<t<1$ のとき

$$\left|\frac{1}{t}Li_{k_1-1,k_2,\ldots,k_n}(t)\right|\leq\frac{1}{z}Li_{1,1,\ldots,1}(t)=\frac{Li_1(t)^n}{zn!}.$$

積分を計算すると

$$\int_z^1 Li_1(t)^n\,dt=O((1-z)\log^n(1-z))$$

がわかるから,

$$\zeta(\mathbf{k})-Li_{\mathbf{k}}(z)=O((1-z)\log^n(1-z))$$

である.

$s\geq 1$ とし, $w=z_{k_1}z_{k_2}\cdots z_{k_r}$ とおく. シャッフル積の定義から

$$y\,ш\,\big(y^{s-1}w\big)=sy^sw+\sum_{w'}y^{s-1}w',\tag{28}$$

ここに $w'$ は $\mathfrak{H}^0$ の単項式のある有限集合をわたる. 単項式 $w'$ に対応するインデックスを $\mathbf{k}''=(k''_1,\ldots,k''_\nu)$ ($k''_1\geq 2$) と書くと, 反復積分のシャッフル積から, これに対応して

$$Li_1(z)Li_{\underbrace{1,\ldots,1}_{s-1},\mathbf{k}'}(z)=sLi_{\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\mathbf{k}'}(z)+\sum_{w'}Li_{\underbrace{1,\ldots,1}_{s-1},\mathbf{k}''}(z).\tag{29}$$

帰納法の仮定から収束インデックス $\widetilde{\mathbf{k}}$ に対し

$$Li_{\underbrace{1,\ldots,1}_{s-1},\widetilde{\mathbf{k}}}(z)=Z^{ш}_{\underbrace{1,\ldots,1}_{s-1},\widetilde{\mathbf{k}}}(-\log(1-z))+O\big((1-z)\log^{\tilde{J}}(1-z)\big)\qquad(z\to 1)\tag{30}$$

ここで $\tilde{J} \geq 0$ は $\widetilde{\mathbf{k}}$ に依存するある整数. 一方 (28) に $Z^{ш}$ を施して, インデックスの記法でかくと

$$(31) \qquad TZ^{ш}_{\underbrace{1,\dots,1}_{s-1},\mathbf{k}'}(T) = sZ^{ш}_{\underbrace{1,\dots,1}_{s},\mathbf{k}'}(T) + \sum_{w'} Z^{ш}_{\underbrace{1,\dots,1}_{s-1},\mathbf{k}''}(T).$$

(30) を (29) に代入し, (31) と比べることにより目標の評価式を得る.
(ii) も (31) から帰納的に従う. ∎

例 1.4.9 と例 1.4.14 とを見比べると, 二つの正規化によって異なる多項式が得られていることがわかる. この二通りの正規化の関係がこれからの主題となる.

### 1.4.5 ガンマ関数概説

二つの写像 $Z^*$, $Z^{ш}$ の間には非常にきれいな関係が成り立つ. これを記述し証明するためにガンマ関数のいくつかの性質が必要になる. 実はガンマ関数 (の対数微分) は, リーマンゼータ関数の整数点での値の母関数なのであって, しかも正および負の整数点両方を一つに体している. そしてその (正の方の) 母関数が, 多重ゼータ値の関係式の, 扇の要とも言うべき位置で重要な役割を果たしている. それは次節以降で明らかにしていくが, ゼータ値においてそのように重要なガンマ関数であるから, 少し紙幅を費して解説しておくことにしよう. (とは言うものの少々長くなりすぎたので, とりあえず 45 ページの次節に進み, 必要に応じて参照下さってもよい. また, これは多重ゼータ値からは離れるのであるが, digamma 関数について以前に書いたノートを, この機会に §3 に付録として採録することにした. )

ガンマ関数というのは階乗 $n!$ を補間するものであった. 一般の実数または複素数 $x$ に対して $x!$ をどう定義するか. まず $x \in \mathbf{N}$ だとして, 次のような操作を行ってみる: $N$ を任意の自然数とするとき,

$$\begin{aligned} x! &= 1\cdot 2\cdots x = 1\cdot 2\cdots x\cdot\frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+N)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+N)} \\ &= \frac{(x+N)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+N)} = \frac{1\cdot 2\cdots N(N+1)\cdots(N+x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+N)} \\ &= N!\frac{(N+1)\cdots(N+x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+N)}. \end{aligned}$$

いま, $x$ は固定されていて, $N \to \infty$ のとき

$$(N+1)\cdots(N+x) = N^x(1+\frac{1}{N})\cdots(1+\frac{x}{N})$$

と $N^x$ は同じオーダー ($N \to \infty$ のとき比が 1 に近づく) であるから, $x \in \mathbf{N}$ のとき

$$x! = \lim_{N\to\infty}\frac{N!\cdot N^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+N)}$$

である. ところで, 右辺の中身は $x$ が負の整数でない限り意味を持つ! 例えば $x=0$ としてみるとこの式は $N$ によらず 1 であるので, $0! = 1$ と定義するのが妥当であろうということにな

る．一般の $x$ についてこの極限の収束性を考えてみよう．若干天下りだが, $N^x = e^{(\log N)x}$ の $\log N$ を

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \gamma$$

で置き換える．$\gamma$ は Euler 定数である．この式と $\log N$ の差は 0 に収束するから, 上の極限の収束性と

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N! \cdot e^{(1+1/2+\cdots+1/N-\gamma)x}}{(x+1)(x+2)\cdots(x+N)}$$

の収束性は等価である．ところで

$$\frac{N! \cdot e^{(1+1/2+\cdots+1/N)x}}{(x+1)(x+2)\cdots(x+N)} = \left(\prod_{n=1}^{N} \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-x/n}\right)^{-1}$$

であって, $|\alpha| < 1$ のとき

$$\begin{aligned}(1-\alpha)e^{\alpha} &= 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \cdots - \alpha - \alpha^2 - \frac{\alpha^3}{2!} - \frac{\alpha^4}{3!} - \cdots \\ &= 1 - \alpha^2 \left[\left(1-\frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)\alpha + \left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)\alpha^2 + \cdots\right],\end{aligned}$$

$$[\quad] \text{の中身の絶対値} \le \left(1-\frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right) + \cdots = 1$$

であるので, $|\alpha| < 1$ のとき

$$|1-(1-\alpha)e^{\alpha}| \le |\alpha|^2.$$

よって $|x| < n$ のとき

$$\left|1 - \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-x/n}\right| \le \frac{|x|^2}{n^2}.$$

$|x| \ge n$ となる有限個の $n$ は無限積の収束性に影響しないことと, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ は絶対収束であることから, $\prod_{n=1}^{\infty} (1+x/n)\, e^{-x/n}$ は任意の $x$ に対して絶対収束 (ただし $x \in -\mathbf{N}$ のときは $n = -x$ の項が 0 となる), 従って極限

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N! \cdot N^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+N)}$$

も任意の $x \notin -\mathbf{N}$ に対して存在する．Gauss はこれによって, ガンマ関数を定義した．彼は (正しく!) 記号 $\Pi x$ を用いているが, 現今まで流布することになった Legendre の記号ではこの値は $\Gamma(1+x)$ である:

$$\Gamma(1+x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N! \cdot N^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+N)}. \tag{32}$$

基本的な関数等式

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x) \tag{33}$$

もこれから直ちに従う．また,

$$N^x = \frac{2^x}{1^x} \cdot \frac{3^x}{2^x} \cdots \frac{N^x}{(N-1)^x}$$

より

$$\frac{N!\cdot N^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+N)} = \frac{(1+1/1)^x(1+1/2)^x\cdots(1+1/(N-1))^x}{(1+x/1)(1+x/2)\cdots(1+x/(N-1))(1+x/N)}$$

であるので,

$$\Gamma(1+x) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1/n)^x}{(1+x/n)} \quad (x\notin -\mathbf{N})$$

とも書ける． これが Euler の定義である (彼は実変数でのみ考えた)． 先の考察からまた Weierstrass の無限積表示

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = e^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n} \quad (\forall x\in\mathbf{C}) \tag{34}$$

も示したことになる. $x$ を $-x$ に変えたものをかければ, いわゆる相補公式

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) = \frac{\sin\pi x}{\pi x} \tag{35}$$

を得る. 右側の等号は §1.1 で用いた sin の無限積展開である.

ところで, $\Gamma(x)$ $(=\Gamma(1+x)/x)$ の導入によく使われる積分表示

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt \quad (\mathrm{Re}(x)>0) \tag{36}$$

を

$$\Gamma(x) = \lim_{N\to\infty}\frac{N!\cdot N^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+N)}$$

から導くには, 等式

$$\frac{N!\cdot N^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+N)} = \int_0^N\left(1-\frac{t}{N}\right)^N t^{x-1}\,dt$$

に注意して $N\to\infty$ の極限を取る (詳しくは [WW, Ch. XII]). この式は $1/x(x+1)(x+2)\cdots(x+N)$ の部分分数分解を計算してみれば得られる. つまりこの有理式は $x=\infty$ で $0$ で, $x=-i$ $(0\le i\le N)$ での留数

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to -i}\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+i-1)\cdot(x+i+1)\cdots(x+N)}\\
&= \frac{1}{(-i)(-i+1)\cdots(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(N-i)}\\
&= (-1)^i\frac{1}{i!(N-i)!}
\end{aligned}$$

から,

$$\frac{N!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+N)} = \sum_{i=0}^{N}(-1)^i\binom{N}{i}\frac{1}{x+i}.$$

ここで

$$\frac{1}{x+i} = \frac{1}{N^{x+i}}\int_0^N t^{x+i-1}\,dt$$

より,

$$\begin{aligned}\frac{N!\cdot N^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+N)} &= \sum_{i=0}^{N}(-1)^i\binom{N}{i}\frac{1}{N^i}\int_0^N t^{x+i-1}\,dt \\ &= \int_0^N\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\binom{N}{i}\left(\frac{t}{N}\right)^i t^{x-1}\,dt \\ &= \int_0^N\left(1-\frac{t}{N}\right)^N t^{x-1}\,dt.\end{aligned}$$

さて, $|x|<1$ として Weierstrass の公式 (34) の両辺の対数を取ると

$$\begin{aligned}-\log\Gamma(1+x) &= \gamma x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right) \\ &= \gamma x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^m\right) \\ &= \gamma x-\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m\frac{\zeta(m)}{m}x^m.\end{aligned}$$

すなわち ($m$ を $n$ に変える)

$$\Gamma(1+x)=\exp\left(-\gamma x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n)}{n}x^n\right)\qquad(|x|<1). \tag{37}$$

この対数微分を取ると

$$\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}=-\gamma+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\zeta(n)x^{n-1}\quad(|x|<1).$$

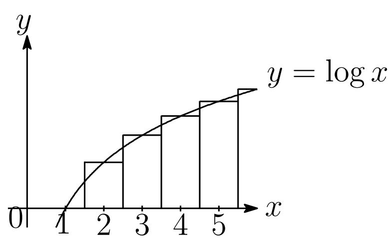
"$\zeta(1)$" を正規化した値が $\gamma$ だと思って $\zeta(1)$ を $\gamma$ と読むことにすれば

$$\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\zeta(n)x^{n-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\zeta(1+n)x^n\quad(|x|<1) \tag{38}$$

とも書ける.

次に, $x\to\infty$ のときの漸近展開 (Stirling の公式) について述べよう.

$n\to\infty$ のときの $n!$ の大きくなり方を考えるのだが, $\log n!$ を考えた方が扱いやすいだろうことは容易に想像がつく. 以下解析概論 [高] に従って解説する. $y=\log x$ のグラフ (上に凸) を $x=1$ から $x=n+1/2$ まで書いて, $\log i$ を区間 $[i-1/2,i+1/2]$ を底辺とし高さ $\log i$ の長方形の面積だと思いグラフの面積との出入りを考える.



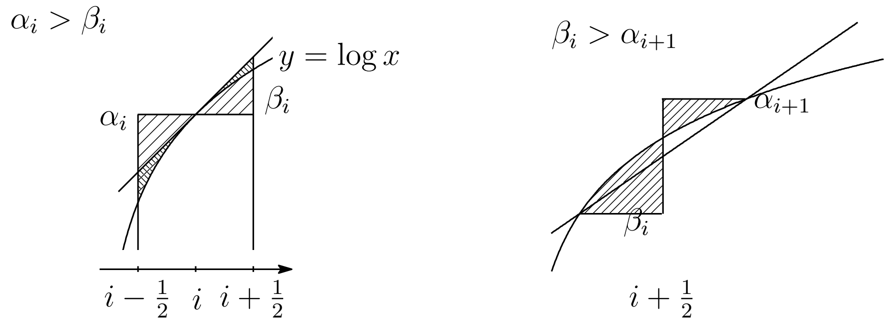
すると

$$\begin{aligned}(39)\qquad \log n! &= \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n = \int_1^n \log x\,dx + \frac{1}{2}\log n - \delta_n \\ &= n\log n - n + 1 + \frac{1}{2}\log n - \delta_n \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + 1 - \delta_n,\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}\delta_n &= \beta_1 - \alpha_2 + \beta_2 - \cdots + \beta_{n-1} - \alpha_n, \\ \alpha_i &= \int_{i-1/2}^{i} (\log i - \log x)\,dx, \quad \beta_i = \int_i^{i+1/2} (\log x - \log i)\,dx\end{aligned}$$

となる．グラフの凸性から $\alpha_i > \beta_i,\ \beta_i > \alpha_{i+1}$ が分かり（下図参照），




$i \to \infty$ としたとき

$$\alpha_i < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\log i - \log(i - 1/2)\right) = \frac{1}{4}\log\left(\frac{i}{i - 1/2}\right) \to 0 \quad (i \to \infty)$$

なので, 交代級数の極限

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta$$

が存在する. 簡単な積分の計算で

$$\beta_i - \alpha_{i+1} = \left(i + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{i}\right) - 1$$

であるので, $\mu_n = \delta - \delta_n$ とおくと

$$\mu_n = \sum_{m=n}^{\infty} (\beta_m - \alpha_{m+1}) = \sum_{m=n}^{\infty} \left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{m}\right) - 1\right).$$

$|x| < 1$ のときの展開

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

より,

$$\begin{aligned}\left(m+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-1 &= \frac{2m+1}{2}\log\left(\frac{1+1/(2m+1)}{1-1/(2m+1)}\right)-1\\ &= \frac{1}{3(2m+1)^2}+\frac{1}{5(2m+1)^4}+\frac{1}{7(2m+1)^6}+\cdots\\ &< \frac{1}{3(2m+1)^2}\cdot\frac{1}{1-1/(2m+1)^2}=\frac{1}{12m(m+1)}.\end{aligned}$$

従って,

$$0<\mu_n<\frac{1}{12}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{12n}. \tag{40}$$

($0<\mu_n$ は $\beta_m>\alpha_{m+1}$ より.) よって, $a=e^{1-\delta}$ とおくと (39) および (40) より,

$$n!=an^{n+1/2}e^{-n+\mu_n},\quad (0<\mu_n<\frac{1}{12n}). \tag{41}$$

定数 $a$ の値を決めるために $\Gamma(1/2)$ の値 ($=\sqrt{\pi}$) が必要になる. それは (35) で $x=1/2$ とし (33) を使えばすぐ出るが, 相補公式 (35) の導出に使った sin の無限積展開の証明を与えていないので, ここでは Jacobi の方法でベータ積分に帰着させて計算しよう. $\Gamma(x)$ の積分表示 (36) より,

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt\int_0^\infty e^{-t}t^{y-1}\,dt=\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-(t+u)}t^{x-1}u^{y-1}\,dtdu.$$

ここで変数変換 $t+u=v,\ t=vw$ を行なうと, $u=v(1-w)$, $0<v<\infty,\ 0<w<1$, Jacobi 行列式が $-v$ となって,

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \iint_{\substack{0<v<\infty\\0<w<1}} e^{-v}(vw)^{x-1}(v(1-w))^{y-1}v\,dvdw\\ &= \int_0^\infty e^{-v}v^{x+y-1}\,dv\int_0^1 w^{x-1}(1-w)^{y-1}\,dw\\ &= \Gamma(x+y)B(x,y).\end{aligned}$$

ここに

$$B(x,y)=\int_0^1 w^{x-1}(1-w)^{y-1}\,dw\quad (x,\,y>0)$$

であって (Euler のベータ積分), Euler の公式

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

が証明された. ここで $x=1/2$ とおく. $\Gamma(1)=1$ はどの公式からもすぐ従うから,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\int_0^1 w^{-1/2}(1-w)^{-1/2}\,dw.$$

$w=\sin^2\varphi$ とおくと $dw=2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$ で,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\int_0^{\pi/2}(\sin\varphi)^{-1}(\cos\varphi)^{-1}\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\pi.$$

たとえば Gauss の公式 (32) から $\Gamma(1/2) > 0$ が分かるから,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

が得られた. 公式 (32) に $x = -1/2$ を代入して計算することにより

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{2^{2N}(N!)^2}{(2N)!\sqrt{N}}$$

が得られるので,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{N\to\infty} \frac{2^{2N}(N!)^2}{(2N)!\sqrt{N}} \tag{42}$$

となる. ところで, (41) より, $N! = aN^{N+1/2}e^{-N+\mu_N}$, $(2N)! = a(2N)^{2N+1/2}e^{-2N+\mu_{2N}}$ とおけるのでこれを代入すると

$$\frac{2^{2N}(N!)^2}{(2N)!\sqrt{N}} = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{2\mu_N - \mu_{2N}}.$$

$\mu_N$, $\mu_{2N} \to 0$ $(N \to \infty)$ より, これは $N \to \infty$ のとき $a/\sqrt{2}$ に収束するから, (42) より $a = \sqrt{2\pi}$ となり, Stirling の公式

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n+\mu_n} \quad (0 < \mu_n < \frac{1}{12n}) \tag{43}$$

が得られた.

**演習問題 18** 公式 (42) から

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-1/4n^2)} \qquad (\textit{ Wallis } \text{の公式})$$

および

$$\frac{\pi}{4} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

を導け.

自然数 $n$ に対する公式 (43) は正の実数 $x > 0$ に対する公式

$$\Gamma(1+x) = \sqrt{2\pi} x^{x+1/2} e^{-x+\mu(x)} \quad (0 < \mu(x) < \frac{1}{12x}) \tag{44}$$

として一般化される. $\mu(x)$ は具体的には

$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(x+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x+n}\right) - 1\right) \tag{45}$$

で与えられる. これをとりあえず認めるとしよう.

いま, $B_n(t)$ をベルヌーイ多項式とし ($B_0(t) = 1,\ B_1(t) = t - 1/2,\ B_2(t) = t^2 - t + 1/6, \ldots$), $\widetilde{B}_n(t) := B_n(t - [t])$ を, 区間 $[0, 1)$ での $B_n(t)$ を周期的に延長したものとする. $\widetilde{B}_1(t)$ は整数点

で不連続であるが, $n \geq 2$ ならば $\widetilde{B}_n(t)$ は連続で, $\widetilde{B}_n(0) = \widetilde{B}_n(1) = B_n$ (ベルヌーイ数), また整数点以外で

$$\widetilde{B}'_n(t) = n\widetilde{B}_{n-1}(t) \quad (n \geq 1) \tag{46}$$

が成り立つ ([AIK, 4 章] 参照).

積分

$$-\int_0^1 \frac{t-1/2}{t+x}\,dt = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1$$

より,

$$\mu(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{t-1/2}{t+x+n}\,dt = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{t-n-1/2}{t+x}\,dt = -\int_0^{\infty}\frac{\widetilde{B}_1(t)}{t+x}\,dt. \tag{47}$$

右辺の積分から出発して, (46) を使って部分積分を繰り返していく.

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= \frac{\widetilde{B}_2(0)}{2x} - \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\widetilde{B}_2(t)}{(t+x)^2}\,dt \\
&= \frac{\widetilde{B}_2(0)}{2x} + \frac{\widetilde{B}_3(0)}{2\cdot 3x^2} - \frac{1}{3}\int_0^{\infty}\frac{\widetilde{B}_3(t)}{(t+x)^3}\,dt \\
&= \frac{\widetilde{B}_2(0)}{2x} + \frac{\widetilde{B}_3(0)}{2\cdot 3x^2} + \frac{\widetilde{B}_4(0)}{3\cdot 4x^3} - \frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{\widetilde{B}_4(t)}{(t+x)^4}\,dt \\
&= \qquad \cdots\cdots \\
&= \frac{\widetilde{B}_2(0)}{2x} + \frac{\widetilde{B}_3(0)}{2\cdot 3x^2} + \frac{\widetilde{B}_4(0)}{3\cdot 4x^3} + \cdots + \frac{\widetilde{B}_{n+1}(0)}{n(n+1)x^n} - \frac{1}{n+1}\int_0^{\infty}\frac{\widetilde{B}_{n+1}(t)}{(t+x)^{n+1}}\,dt.
\end{aligned}$$

ここで Euler の公式 $\zeta(-n) = -B_{n+1}/(n+1) = -\widetilde{B}_{n+1}(0)/(n+1)$ ([AIK, Th. 5.4]) より

$$\mu(x) = -\frac{\zeta(-1)}{x} - \frac{\zeta(-2)}{2x^2} - \frac{\zeta(-3)}{3x^3} - \cdots - \frac{\zeta(-n)}{nx^n} - \frac{1}{n+1}\int_0^{\infty}\frac{\widetilde{B}_{n+1}(t)}{(t+x)^{n+1}}\,dt. \tag{48}$$

($\zeta(-2m) = 0$ より偶数次の項は実際には 0 である.) 最後の項は, もう一度部分積分を行なうと

$$-\frac{\zeta(-n-1)}{(n+1)x^{n+1}} - \frac{1}{n+2}\int_0^{\infty}\frac{\widetilde{B}_{n+2}(t)}{(t+x)^{n+2}}\,dt$$

となり, $\widetilde{B}_{n+2}(t)$ が有界であることから, ある定数 $C > 0$ があって

$$\left|\int_0^{\infty}\frac{\widetilde{B}_{n+2}(t)}{(t+x)^{n+2}}\,dt\right| \leq C\int_0^{\infty}\frac{1}{(t+x)^{n+2}}\,dt = \frac{C}{(n+1)x^{n+1}}.$$

従って

$$\lim_{x\to\infty} x^n\left(-\frac{1}{n+1}\int_0^{\infty}\frac{\widetilde{B}_{n+1}(t)}{(t+x)^{n+1}}\,dt\right) = 0. \tag{49}$$

即ち, (48), (49) は, 級数

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(-n)}{nx^n}=-\frac{\zeta(-1)}{x}-\frac{\zeta(-2)}{2x^2}-\frac{\zeta(-3)}{3x^3}-\cdots-\frac{\zeta(-n)}{nx^n}-\cdots$$

が $\mu(x)$ の $x\to\infty$ での漸近級数 (定義その他はたとえば [寺, §4.17]) であることを示している. これを

$$\mu(x)\sim-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(-n)}{nx^n}\quad(x\to\infty)$$

と書く. Stirling の公式 (44) の対数微分をとって, $\zeta(0)=-1/2$, また $n\geq 2$ のとき $(-1)^n\zeta(1-n)=\zeta(1-n)$ ($n$ 奇数のとき $\zeta(1-n)=0$ なので) に注意して計算すると

$$\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}\sim\log x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta(1-n)}{x^n}=\sum_{n=0}^{-\infty}(-1)^n\zeta(1+n)x^n\quad(x\to\infty)\tag{50}$$

を得る. ここで, $x\to\infty$ のとき "$\zeta(1)$" $\sim\log x$ と思って最後の和では $\zeta(1)$ を $\log x$ に読み替える. またその和で $n$ は 0 以下の整数をわたっていることに注意.

$\Gamma(1+x)$ の対数微分の 0 と $\infty$ の近傍での二つの展開 (38), (50) の類似性は驚くべきものであると思う. ゼータ関数にとってのガンマ関数は, 単に無限素点での 'ガンマ因子' としての役割以上の '何か' を蔵しているのではないだろうかと思いたくなる. しかもそれが元々は $n!$ という, 自然数を順に掛けるだけのものから出発しているのだから何とも玄妙ではある.

最後に (44), (45) の証明であるが, 一つの厳密な証明が解析概論にあるので見てもらうとして, ここでは Gauss の公式 (32) と Euler-Maclaurin の公式 ([AIK, 5 章]) を用いる別証明のスケッチを与えておくに留める.

**演習問題 19** $x>0$ に対して

$$\Gamma(1+x)=\sqrt{2\pi}x^{x+1/2}e^{-x+\mu(x)},$$

ただし

$$\mu(x)=-\int_0^{\infty}\frac{\widetilde{B}_1(t)}{t+x}\,dt,$$

の以下の証明の細部を埋めよ.

まず (32) を

$$\Gamma(1+x)=\lim_{N\to\infty}\exp\left(-\sum_{r=1}^{N}\log\left(1+\frac{x}{r}\right)+x\log N\right)$$

と変形する. Euler-Maclaurin の公式の一番簡単な ($\widetilde{B}_1(t)$ しか出てこない, 一番 "浅い") 形を使って

$$\begin{aligned}&-\sum_{r=1}^{N}\log\left(1+\frac{x}{r}\right)+x\log N\\ =\;&-\log\left(1+\frac{x}{N}\right)^{N+x+1/2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log(1+x)-\int_1^N\widetilde{B}_1(t)\left(\frac{1}{t+x}-\frac{1}{t}\right)dt\end{aligned}$$

を導き, この $N \to \infty$ の極限として

$$\Gamma(1+x) = \exp\left(-x + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log(1+x) - \int_1^\infty \widetilde{B}_1(t)\left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{t}\right)dt\right)$$

を得る. ここで $x = n \in \mathbf{N}$ のときの Stirling 公式 (43) と比べることにより

$$\exp\left(1 + \int_1^\infty \frac{\widetilde{B}_1(t)}{t}dt\right) = \sqrt{2\pi}$$

が分かり, 求める

$$\Gamma(1+x) = \sqrt{2\pi}x^{x+1/2}e^{-x+\mu(x)}, \quad \mu(x) = -\int_0^\infty \frac{\widetilde{B}_1(t)}{t+x}\,dt$$

が得られる. 評価 $0 < \mu(x) < 1/12x$ は

$$0 < \left(x+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x+n}\right) - 1 < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right)$$

より従う.

$\log\Gamma(1+x)$ のテイラー展開 (37) の一つの応用として次の定理の Zagier による証明を紹介しよう.

**定理 1.4.16 (Aomoto [Ao], Drinfel'd [Dr], Zagier)**

$$1 - \sum_{m,\,n=1}^\infty \zeta(m+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1})X^mY^n = \exp\Big(\sum_{n=2}^\infty \zeta(n)\frac{X^n+Y^n-(X+Y)^n}{n}\Big)$$

**証明)** Drinfel'd 積分表示を使う.

$$\begin{aligned}
\zeta(m+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}) &= I(\underbrace{0,\ldots,0}_{m},\underbrace{1,\ldots,1}_{n}) \\
&= \int\cdots\int_{1>t_1>\cdots>t_m>u_1>\cdots>u_n>0} \frac{dt_1}{t_1}\cdots\frac{dt_m}{t_m}\frac{du_1}{1-u_1}\cdots\frac{du_n}{1-u_n} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(n-1)!}\Big(\log\frac{1}{1-u}\Big)^{n-1}\cdot\frac{1}{m!}\Big(\log\frac{1}{u}\Big)^m\frac{du}{1-u}.
\end{aligned}$$

よって $X, Y$ 十分小 $(-1 < Y < 0,\ -1 < X < 1\ |X+Y| < 1)$ のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{m,\,n=1}^\infty \zeta(m+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1})X^mY^{n-1} &= \int_0^1 (1-u)^{-Y-1}\big(u^{-X}-1\big)\,du \\
&= \frac{\Gamma(-Y)\Gamma(1-X)}{\Gamma(1-X-Y)} + \frac{1}{Y}.
\end{aligned}$$

これより

$$
\begin{aligned}
1-\sum_{m,\,n=1}^{\infty}\zeta(m+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1})X^mY^n &= 1-Y\Big(\frac{\Gamma(-Y)\Gamma(1-X)}{\Gamma(1-X-Y)}+\frac{1}{Y}\Big)\\
&= \frac{\Gamma(1-Y)\Gamma(1-X)}{\Gamma(1-X-Y)}
\end{aligned}
$$

ここで (37) を使えば求める式が得られる. ∎

以上, 階乗の補間としてのガンマ関数がリーマンゼータ値の母関数になる, という点に重心をおいてガンマ関数について概観した. 複素関数としてのガンマ関数の基本的性質で述べ落としていることもあるが, 解析概論 [高] や Whittaker-Watson [WW], Remmert [Rem] その他, 定評ある本が多くあることであるし, この辺で本論に戻るとする.

### 1.4.6 正規化の基本定理

**R**-線形写像 $\rho:\mathbf{R}[T]\longrightarrow\mathbf{R}[T]$ を次のように定義する. まず形式的冪級数 $A(u)$ を $\Gamma(1+x)e^{\gamma x}$ の $x=0$ での展開級数 (の $x$ を $u$ としたもの, 式 (37) 参照)

$$
A(u)=\exp\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)u^n\Big)\ (=\Gamma(1+u)e^{\gamma u})
$$

で定義し,

$$
\rho(e^{Tu})=A(u)e^{Tu} \tag{51}
$$

によって定める. つまり, 右辺の冪級数を展開したときの $u^m$ の係数が $\rho(T^m/m!)$ である.

$\rho$ は可逆な **R**-線形写像であり, 逆は

$$
\rho^{-1}(e^{Tu})=A(u)^{-1}e^{Tu} \tag{52}
$$

で与えられる.

**例 1.4.17**

$$
\begin{aligned}
A(u) &= 1+\left(\frac{\zeta(2)}{2}u^2-\frac{\zeta(3)}{3}u^3+\frac{\zeta(4)}{4}u^4-\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta(2)}{2}u^2-\frac{\zeta(3)}{3}u^3+\cdots\right)^2+\cdots\\
&= 1+\frac{\zeta(2)}{2}u^2-\frac{\zeta(3)}{3}u^3+\left(\frac{\zeta(4)}{4}+\frac{\zeta(2)^2}{8}\right)u^4+\cdots
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
& \rho(1)+\rho(T)u+\rho(T^2)\frac{u^2}{2}+\rho(T^3)\frac{u^3}{6}+\rho(T^4)\frac{u^4}{24}+\cdots \\
= \;& A(u)\left(1+Tu+T^2\frac{u^2}{2}+T^3\frac{u^3}{6}+T^4\frac{u^4}{24}+\cdots\right) \\
= \;& \left(1+\frac{\zeta(2)}{2}u^2-\frac{\zeta(3)}{3}u^3+\left(\frac{\zeta(4)}{4}+\frac{\zeta(2)^2}{8}\right)u^4+\cdots\right) \\
& \qquad \times\left(1+Tu+T^2\frac{u^2}{2}+T^3\frac{u^3}{6}+T^4\frac{u^4}{24}+\cdots\right) \\
= \;& 1+Tu+\big(T^2+\zeta(2)\big)\frac{u^2}{2}+\big(T^3+3\zeta(2)T-2\zeta(3)\big)\frac{u^3}{6} \\
& \qquad +\big(T^4+6\zeta(2)T^2-8\zeta(3)T+6\zeta(4)+3\zeta(2)^2\big)\frac{u^4}{24}+\cdots.
\end{aligned}
$$

従って,

$$
\begin{aligned}
\rho(1) &= 1, \\
\rho(T) &= T, \\
\rho(T^2) &= T^2+\zeta(2), \\
\rho(T^3) &= T^3+3\zeta(2)T-2\zeta(3), \\
\rho(T^4) &= T^4+6\zeta(2)T^2-8\zeta(3)T+6\zeta(4)+3\zeta(2)^2, \\
& \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

§1.4.3, §1.4.4 において定義した二つの正規化写像 $Z^*$, $Z^ш : \mathfrak{H}^1 \to \mathbf{R}[T]$ の間には次の関係が成り立つ.

**定理 1.4.18 (Zagier)** $\mathfrak{H}^1$ 上で

$$Z^ш = \rho \circ Z^*.$$

言い換えると, 任意のインデックス $\boldsymbol{k}$ に対し

$$Z^ш_{\boldsymbol{k}}(T) = \rho\big(Z^*_{\boldsymbol{k}}(T)\big).$$

**証明)** 二つの多項式 $Z^*_{\mathbf{k}}(T)$, $Z^ш_{\mathbf{k}}(T)$ はそれぞれ $\zeta_M(\mathbf{k})$ と $Li_{\mathbf{k}}(z)$ の発散の度合いを計るものであったから, 両者の関係を求める. まず

$$
\begin{aligned}
Li_{\mathbf{k}}(z) &= \sum_{m_1>\cdots>m_n>0}\frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\ldots m_n^{k_n}} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{m>m_2>\cdots>m_n>0}\frac{1}{m^{k_1}m_2^{k_2}\ldots m_n^{k_n}}\Big)z^m \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\big(\zeta_{m+1}(\mathbf{k})-\zeta_m(\mathbf{k})\big)z^m \\
&= (1-z)\sum_{m=1}^{\infty}\zeta_m(\mathbf{k})z^{m-1}.
\end{aligned}
$$

命題 1.4.15 によれば

$$Li_{\mathbf{k}}(z) = Z^{ш}_{\mathbf{k}}(-\log(1-z)) + O((1-z)\log^J(1-z)) \qquad (z \to 1) \tag{53}$$

であるが, 一方上の式と命題 1.4.10 より $z \to 1$ のとき

$$\begin{aligned} (54) \quad Li_{\mathbf{k}}(z) &= (1-z)\sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m(\mathbf{k}) z^{m-1} \\ &= (1-z)\sum_{m=1}^{\infty} Z^{*}_{\mathbf{k}}(\log m + \gamma) z^{m-1} + O\Big((1-z)\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}\big(\log^{J'} m\big) z^{m-1}\Big). \end{aligned}$$

ここで $J$, $J'$ はある正整数である. そこで,

$$\sum_{m=1}^{\infty} Z^{*}_{\mathbf{k}}(\log m + \gamma) z^{m-1}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}\big(\log^{J} m\big) z^{m-1}$$

を計算（評価）することにより (53), (54) を比較する.

**補題 1.4.19** (i) $P(T) \in \mathbf{R}[T]$ に対し $Q(T) = \rho(P(T))$ とおく. このときある正整数 $J$ に対して（$J = \deg P$ と取れる）

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(\log m + \gamma) z^{m-1} = \frac{1}{1-z} Q(-\log(1-z)) + O\left(\log^J(1-z)\right) \qquad (z \to 1)$$

(ii) $\ell \geq 0$ に対して

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log^{\ell} m}{m} z^{m-1} = O\left(\log^{\ell+1}(1-z)\right) \qquad (z \to 1)$$

**証明)** まず (ii) を証明する. $l = 0$ のとき, 左辺は $-z^{-1}\log(1-z)$ に等しく, これは $z \to 1$ のとき $O\big(\log(1-z)\big)$ である. 一般の場合を帰納法で証明する. まず, $m$ に無関係な定数 $C_l$ があって

$$\log^{l+1} m \ \leq \ C_l \sum_{n=1}^{m} \frac{\log^l n}{n} \qquad (m \geq 1,\ l \geq 0).$$

**演習問題 20** 和を積分 $\int_1^m x^{-1}\log^l x\, dx$ と比較することによりこれを証明せよ.

これより, $z < 1$ に対し

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log^{l+1} m}{m} z^{m-1} &\leq C_l \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{m-1}}{m} \sum_{n=1}^{m} \frac{\log^l n}{n} \\ &= C_l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^l n}{n} z^{n-1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^{r-1}}{r+n-1} \\ &< C_l \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^l n}{n} z^{n-1}\right)\left(\frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z}\right). \end{aligned}$$

ii) の評価はこれより帰納法ですべての $l$ に対して成り立つ.

次に i) であるが, $\rho$ は $\mathbf{R}$-線型写像であるから $P(T)=(T-\gamma)^{\ell}$ について確かめればよい. このとき $Q(T)=\rho((T-\gamma)^{\ell})$ とおくと, $A(u)=\Gamma(1+u)e^{\gamma u}$ だから

$$Q(T)=\frac{d^{\ell}}{du^{\ell}}\Big[A(u)e^{(T-\gamma)u}\Big]_{u=0}=\frac{d^{\ell}}{du^{\ell}}\Big[\Gamma(1+u)e^{Tu}\Big]_{u=0}$$

従って $(1-z)^{-1-u}$ の 2 項展開を使うと

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z}Q\big(-\log(1-z)\big) &= \frac{d^{\ell}}{du^{\ell}}\Big[\frac{\Gamma(1+u)}{(1-z)^{1+u}}\Big]_{u=0}=\frac{d^{\ell}}{du^{\ell}}\Big[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(m+u)}{\Gamma(m)}z^{m-1}\Big]_{u=0}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma^{(\ell)}(m)}{\Gamma(m)}z^{m-1}\end{aligned}$$

ところで Stirling の公式 (44), (47) から

$$\log\Gamma(x)=\big(x-\frac{1}{2}\big)\log x-x+\log\sqrt{2\pi}-\int_0^{\infty}\frac{\widetilde{B}_1(t)}{x+t}\,dt\qquad(x>0).$$

これを次々に微分したものを使って帰納的に評価式

$$\frac{\Gamma^{(\ell)}(m)}{\Gamma(m)}=\log^{\ell}m+O\Big(\frac{\log^{\ell-1}m}{m}\Big)\qquad(m\to\infty)\tag{55}$$

を示すことができる.

**演習問題 21** これをきちんと実行せよ.

よって (ii) の評価も使って

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma^{(\ell)}(m)}{\Gamma(m)}z^{m-1} &= \sum_{m=1}^{\infty}\big(\log^{\ell}m\big)z^{m-1}+O\big(\log^{\ell}\frac{1}{1-z}\big)\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}P(\log m+\gamma)z^{m-1}+O\big(\log^{\ell}\frac{1}{1-z}\big).\end{aligned}$$

これで補題の (i) が証明された.

定理 1.4.18 の証明に戻ろう．$Q(T)=\rho(Z^{*}_{\mathbf{k}}(T))$ とおく．補題 1.4.19 の (i) より,

$$\sum_{m=1}^{\infty}Z^{*}_{\mathbf{k}}(\log m+\gamma)z^{m-1}=\frac{1}{1-z}Q(-\log(1-z))+O\left(\log^{J}(1-z)\right).$$

一方 (53), (54) の右辺を等しいとおいて，補題 1.4.19 の (ii) を用いると，ある正整数 $J''$ があって

$$\sum_{m=1}^{\infty}Z^{*}_{\mathbf{k}}(\log m+\gamma)z^{m-1}=\frac{1}{1-z}Z^{ш}_{\mathbf{k}}(-\log(1-z))+O\left(\log^{J''}(1-z)\right)$$

となる．従ってこの二つより，ある正整数 $J'''$ があって

$$Z^{ш}_{\mathbf{k}}(-\log(1-z))=Q(-\log(1-z))+O((1-z)\log^{J'''}(1-z))\qquad(z\to 1)$$

ということになるが, $Q(T)=\rho(Z^*_{\mathbf{k}}(T))$, $Z^{ш}_{\mathbf{k}}(T)$ はともに多項式であるから定理の結論である

$$Z^{ш}_{\mathbf{k}}(T)=\rho(Z^*_{\mathbf{k}}(T))$$

を得る. ∎

**注意 1.4.20** 以上定理 1.4.18 を解析 (hard analysis) を用いて証明した. それは, 多重ゼータ値の二通りの正規化の解析的な意味付けを考えて, それらを比較するという, 自然な方法であるが, 一方, 正規化そのものは代数的に定義できた. そこで, 定理 1.4.18 のもっと代数的な証明があるのではないかという疑問が湧く. これについては §1.5.2 の注意 1.5.6 を参照.

**例 1.4.21** $w=yxy$ として補題 1.4.12 により

$$yxy=(-1)\big(x(yшy)\big)+\big(x(1шy)\big)шy=-x(yшy)+(xy)шy=-2xy^2+(xy)шy$$

$Z^{ш}$ を施して

$$Z^{ш}(yxy)=-2\zeta(2,1)+\zeta(2)T$$

他方 $y*(xy)=yxy+xy^2+x^2y$ より $yxy=-xy^2-x^2y+(xy)*y$, 従って, $Z^*(yxy)=-\zeta(2,1)-\zeta(3)+\zeta(2)T$. 定理 1.4.18 と $\rho(1)=1$, $\rho(T)=T$ であることから

$$\begin{aligned}Z^{ш}(yxy) &= \rho(Z^*(yxy))=\rho\big(-\zeta(2,1)-\zeta(3)+\zeta(2)T\big)\\ &= -\zeta(2,1)-\zeta(3)+\zeta(2)T\end{aligned}$$

これより $\zeta(3)=\zeta(2,1)$ を得る. この例では $T$ について 1 次なので $\rho$ が実質的な役割を果たしていないが, 次に $\boldsymbol{k}=(1,1,2)$ $(w=y^2xy)$ ととろう. すると

$$\begin{aligned}Z^{ш}_{1,1,2}(T) &= \frac{1}{2}\zeta(2)\,T^2-2\zeta(2,1)\,T+3\zeta(2,1,1),\\ Z^*_{1,1,2}(T) &= \frac{1}{2}\zeta(2)\,T^2-\big(\zeta(3)+\zeta(2,1)\big)\,T+\frac{1}{2}\zeta(4)+\zeta(3,1)+\zeta(2,1,1),\end{aligned}$$

と計算され (確かめよ), $Z^{ш}_{1,1,2}(T)=\rho(Z^*_{1,1,2}(T))$ および $\rho(T^2)=T^2+\zeta(2)$ から, 1 次の係数を比べて再び (三度, 四度?) $\zeta(2,1)=\zeta(3)$ を得, 定数項を比べて

$$3\zeta(2,1,1)=\frac{1}{2}\zeta(2)^2+\frac{1}{2}\zeta(4)+\zeta(3,1)+\zeta(2,1,1)$$

を得る.

### 1.4.7 正規化された複シャッフル関係式

定理 1.4.18 から 「一般複シャッフル関係式」(“regularlized double shuffle relation”, なお, Racinet [Rac] による別の定式化がある) とその系を導く.

**定理 1.4.22 (一般複シャッフル関係式, regularized double shuffle relation, [IKZ])**

(i) 任意の $w_1 \in \mathfrak{H}^1$, および $w_0 \in \mathfrak{H}^0$ に対し

$$Z^{ш}(w_1 ш w_0 - w_1 * w_0) = 0$$

が成り立つ. 特にその定数項である

(56) $$Z\left(\mathrm{reg}_{ш}(w_1 ш w_0 - w_1 * w_0)\right) = 0 \quad (\forall w_1 \in \mathfrak{H}^1,\ \forall w_0 \in \mathfrak{H}^0).$$

(ii) 任意の $w_1 \in \mathfrak{H}^1$, および $w_0 \in \mathfrak{H}^0$ に対し

$$Z^{*}(w_1 ш w_0 - w_1 * w_0) = 0$$

が成り立つ. 特にその定数項である

(57) $$Z\left(\mathrm{reg}_{*}(w_1 ш w_0 - w_1 * w_0)\right) = 0 \quad (\forall w_1 \in \mathfrak{H}^1,\ \forall w_0 \in \mathfrak{H}^0).$$

式 (56) および (57) は命題 1.4.4 を特別な場合として含むことに注意する.

**証明)** (i) $w_1 \in \mathfrak{H}^1$, $w_0 \in \mathfrak{H}^0$ とする. 定理 1.4.18 の式

$$Z^{ш}(w_1) = \rho(Z^{*}(w_1))$$

の両辺に $Z(w_0)\,(= Z^{ш}(w_0) = Z^{*}(w_0) \in \mathbf{R})$ を掛けると, $Z^{ш}$, $Z^{*}$ はそれぞれ積 ш, $*$ について準同型であり, $\rho$ は $\mathbf{R}$-線形であることから

$$Z^{ш}(w_1 ш w_0) = \rho(Z^{*}(w_1 * w_0))$$

を得る. ここで右辺にふたたび定理 1.4.18 を用いれば

$$Z^{ш}(w_1 ш w_0) = Z^{ш}(w_1 * w_0)$$

となり, (i) が得られた. 同様に, 定理 1.4.18 を

$$Z^{*}(w_1) = \rho^{-1}(Z^{ш}(w_1))$$

の形で用いれば (ii) が示される. ∎

この定理で $w_1 = y^m$ $(m \geq 1)$ とおくと次が得られる. (i) では $\mathrm{reg}_{ш}(y^m) = 0$ に注意する.

**系 1.4.23** (i) 任意の自然数 $m \geq 1$ と $w_0 \in \mathfrak{H}^0$ に対して

(58) $$Z\left(\mathrm{reg}_{ш}(y^m * w_0)\right) = 0$$

が成り立つ.

(ii) 任意の自然数 $m \geq 1$ と $w_0 \in \mathfrak{H}^0$ に対して

(59) $$Z\left(\mathrm{reg}_{*}(y^m ш w_0 - y^m * w_0)\right) = 0$$

が成り立つ.

**例 1.4.24** $w_1 = y^2$, $w_0 = xy$ とすると

$$\begin{aligned} y^2 ш xy &= 3xy^3 + 2yxy^2 + y^2xy, \\ y^2 * xy &= x^2y^2 + xy^3 + yx^2y + yxy^2 + y^2xy. \end{aligned}$$

(56) を用いれば

$$Z^{ш}(y^2 ш xy - y^2 * xy) = Z^{ш}(2xy^3 + yxy^2 - x^2y^2 - yx^2y) = 0.$$

ここで

$$\begin{aligned} Z^{ш}(yxy^2) &= \zeta(2,1)T - 3\zeta(2,1,1) \\ Z^{ш}(yx^2y) &= \zeta(3)T - \zeta(2,2) - 2\zeta(3,1) \end{aligned}$$

より

$$(\zeta(2,1) - \zeta(3))\,T + \zeta(3,1) + \zeta(2,2) - \zeta(2,1,1) = 0.$$

これより

$$\zeta(2,1) = \zeta(3), \quad \zeta(3,1) + \zeta(2,2) = \zeta(2,1,1)$$

が得られる.

(58) を用いるなら,

$$\mathrm{reg}_{ш}(yx^2y) = -xyxy - 2x^2y^2,\ \mathrm{reg}_{ш}(yxy^2) = -3xy^3,\ \mathrm{reg}_{ш}(y^2xy) = 3xy^3$$

より,

$$Z(\mathrm{reg}_{ш}(y^2 * xy)) = Z(xy^3 - xyxy - x^2y^2) = \zeta(2,1,1) - \zeta(2,2) - \zeta(3,1) = 0.$$

多重ゼータ値の関係式について，次が予想されている.

**予想**　多重ゼータ値のすべての (**Q** 上の ) 代数関係式は (19), (20), 定理 1.4.18 から導かれる.

この予想は, 積をすべて和に直して考えれば, そして上の定理にある同値性から, 次と同値である.

**予想**　多重ゼータ値のすべての (**Q**-) 線形関係式は, (56) または (57) から導かれる. あるいは, 命題 1.4.4 および, (58) または (59) から導かれる.

**演習問題 22** (56) または (57) のみを用いて, 重さ 5 の多重ゼータ値の空間の次元 $\leq 2$ を示せ. より高い重さについても, 計算できる範囲で (56) や (58) (と命題 1.4.4) などから従う関係式を求めよ.

フランス Lille の Petitot, Minh らのグループは, 命題 1.4.4 と, (58) の $m = 1$ の場合 (Hoffman の関係式) だけで十分であると予想している. 彼らは計算機で重さ 16 以下のときこれ (予想次元まで落ちること) を確かめている. なお最近 [KNT] によって，重さ 20 まではこれらで十分であるということが検証された.

### 1.4.8　和公式の導出

この節では, 一般複シャッフル関係式を用いて和公式 (11) を導いてみる. 実際, 系 1.4.23 の特別な場合として次の関係が得られる.

**命題 1.4.25** $S(k,m)$ で $\mathfrak{H}^0$ の重さ $k$, 深さ $m$ の単項式すべての和を表す. $k > m+1 \geq 2$ である任意の $k$ と $m$ に対し,

$$(-1)^m \mathrm{reg}_{ш}(y^m * x^{k-m-1}y) = S(k,m+1) - S(k,m).$$

両辺に $Z$ を施すと, (58) より左辺は 0 となる. 従って右辺も 0 で, これより, 定まった重さ, 深さを持つ多重ゼータ値の和は深さによらないことが結論される. すなわちその和は深さ 1 の Riemann ゼータ値に等しく, 和公式がいえたことになる.

**証明)**　調和積 $y^m * x^{k-m-1}y$ を計算する. これは多重ゼータ値の積 $\zeta(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m})\zeta(k-m)$ に対応するので容易に計算できて

$$y^m * x^{k-m-1}y = \sum_{i=0}^{m} y^i x^{k-m-1} y^{m+1-i} + \sum_{j=0}^{m-1} y^j x^{k-m} y^{m-j}$$

となる. (27) より,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{reg}_{ш}(y^m * x^{k-m-1}y)\\
&= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i x(y^i ш x^{k-m-2}y^{m+1-i}) + \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j x(y^j ш x^{k-m-1}y^{m-j})\\
&= x^{k-m-1}y^{m+1} + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i x\left\{(y^i ш x^{k-m-2}y^{m-i})y + (y^{i-1} ш x^{k-m-2}y^{m+1-i})y\right\}\\
&\quad + x^{k-m}y^m + \sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j x\left\{(y^j ш x^{k-m-1}y^{m-1-j})y + (y^{j-1} ш x^{k-m-1}y^{m-j})y\right\}\\
&= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i x(y^i ш x^{k-m-2}y^{m-i})y + \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{i+1} x(y^i ш x^{k-m-2}y^{m-i})y\\
&\quad + \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j x(y^j ш x^{k-m-1}y^{m-1-j})y + \sum_{j=0}^{m-2}(-1)^{j+1} x(y^j ш x^{k-m-1}y^{m-1-j})y\\
&= (-1)^m x(y^m ш x^{k-m-2})y + (-1)^{m-1} x(y^{m-1} ш x^{k-m-1})y\\
&= (-1)^m (S(k,m+1) - S(k,m)).
\end{aligned}$$

∎

**注意 1.4.26** 双対性を一般複シャッフル関係式から導くことが, 一般にはまだ出来ていない. 梶川 [Kaj] によって

$$\zeta(m+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}) = \zeta(n+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{m-1})$$

の形の双対性，またそれを,「与えられた重さ，深さ，高さをもつ多重ゼータ値の和とその双対が等しい」という形に一般化したもの（上記はその高さ１の場合）が一般複シャッフル関係式から導かれることは証明されている.

### 1.4.9　多重ゼータ関数の極

正規化の別の応用として, ある多重ゼータ関数の極での主要部を与える.

(収束とは限らない) インデックス $\mathbf{k}$ に対し, 次の多重ゼータ関数を考えよう.

$$\zeta(\mathbf{k};s)=\zeta(k_1+s,k_2,\ldots,k_n):=\sum_{m_1>\cdots>m_n>0}\frac{1}{m_1^{k_1+s}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}}$$

この $\zeta(\mathbf{k};s)$ は $s$ の有理型関数として全 $s$ 平面に解析接続されることが知られている ([AK1], より一般には [AET]). $k_1>1$ なら $\zeta(\mathbf{k};s)$ は $s=0$ で正則で $\zeta(\mathbf{k};0)=\zeta(\mathbf{k})$ である.

**定理 1.4.27** (i)　多項式 $Z^{ш}_{\mathbf{k}}(T)$ を

$$Z^{ш}_{\mathbf{k}}(T)=\sum_{j=0}^{\nu}c_j\frac{T^j}{j!}$$

と表すとき, 関数 $\Gamma(s+1)\zeta(\mathbf{k};s)$ の $s=0$ での主要部が次で与えられる :

$$\Gamma(s+1)\zeta(\mathbf{k};s)=\sum_{j=0}^{\nu}\frac{c_j}{s^j}+O(s),\qquad (s\to 0).$$

(ii)　多項式 $Z^{*}_{\mathbf{k}}(T)$ を

$$Z^{*}_{\mathbf{k}}(T)=\sum_{j=0}^{\nu}b_j\frac{(T-\gamma)^j}{j!}$$

と表すとき ($\gamma=$ Euler 定数), 関数 $\zeta(\mathbf{k};s)$ の $s=0$ での主要部が次で与えられる :

$$\zeta(\mathbf{k};s)=\sum_{j=0}^{\nu}\frac{b_j}{s^j}+O(s),\qquad (s\to 0).$$

**証明)**　(i) $\mathbf{k}=(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n})$ のときは $Z^{ш}_{\mathbf{k}}(T)$ は $T^n/n!$ に等しい（$y^n=y^{ш n}/n!$）. このときは (i) の式は

$$\Gamma(s+1)\zeta(s+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1})=\frac{1}{s^n}+O(s),\qquad (s\to 0). \tag{60}$$

詳細は省略するが, これは [AK1, Proposition 4, (ii)] で示された. 次に, 多重 poly-log 関数 $Li_{\mathbf{k}}(z)$ を用いて

$$\Gamma(s)\zeta(\mathbf{k};s)=\int_0^\infty t^{s-1}Li_{\mathbf{k}}(e^{-t})\,dt \tag{61}$$

はスタンダードな方法で示すことができる．一方命題 1.4.15 (i) により，ある正定数 $C, \delta$ が存在し

$$\left| Li_{\mathbf{k}}(e^{-t}) - Z^{ш}_{\mathbf{k}}(-\log(1-e^{-t})) \right| < C\bigl(1-e^{-t}\bigr)^{\delta}, \qquad (t \to +0)$$

となるので，$\Gamma(s+1)\zeta(\mathbf{k};s) = s\Gamma(s)\zeta(\mathbf{k};s)$ の $s=0$ での主要部は，関数

$$s\int_0^\infty t^{s-1} Z^{ш}_{\mathbf{k}}(-\log(1-e^{-t}))\,dt = s\sum_{j=0}^{\nu}\frac{c_j}{j!}\int_0^\infty t^{s-1}(-\log(1-e^{-t}))^j\,dt$$

の $s=0$ での主要部と一致する．$\bigl(-\log(1-e^{-t})\bigr)^j/j! = Li_{\underbrace{1,\ldots,1}_{j}}(e^{-t})$ であるので (61), (60) を用いて

$$s\int_0^\infty t^{s-1}\frac{\bigl(-\log(1-e^{-t})\bigr)^j}{j!}\,dt = \Gamma(s+1)\zeta(s+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1}) = \frac{1}{s^j} + O(s), \qquad (s \to 0).$$

故に

$$s\int_0^\infty t^{s-1} Z^{ш}_{\mathbf{k}}(-\log(1-e^{-t}))\,dt = \sum_{j=0}^{\nu}\frac{c_j}{s^j} + O(s), \qquad (s \to 0).$$

かくして (i) は示された．

(ii) は省略するが，(i) と写像 $\rho$ の定義から導かれる．

**演習問題 23** (ii) の証明を与えよ．

## 1.5 導分関係式と一般複シャッフル関係式

### 1.5.1 導分関係式

$\mathfrak{H} = \mathbf{Q}\langle x, y\rangle$ の導分 (derivation) とは，$\mathbf{Q}$-線形写像 $\partial : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H}$ で，任意の $w, w' \in \mathfrak{H}$ に対し

$$\partial(ww') = \partial(w)w' + w\partial(w')$$

を満たすものである．$\mathfrak{H}$ は $x$ と $y$ で生成されているので，$\partial$ は $\partial(x)$ と $\partial(y)$ で決まってしまう．また，$\partial(x)$ と $\partial(y)$ を自由に与えたとき，そのような導分が唯一定まる．

**定義 1.5.1** $\tau$ を $\mathfrak{H}$ の $\mathbf{Q}$-反自己同型 ($\tau(ww') = \tau(w')\tau(w)$ をみたすもの) で $\tau(x) = y$, $\tau(y) = x$ なるものとする．

双対性 (定理 1.2.8) は，すべての $w_0 \in \mathfrak{H}^0$ に対して

$$Z(w_0) = Z(\tau(w_0))$$

が成り立つこと，と言うことができる．

**定義 1.5.2** 正の整数 $n \geq 1$ に対して，$\mathfrak{H}$ の導分 $\partial_n$ を

$$\partial_n(x) = x(x+y)^{n-1}y, \quad \partial_n(y) = -x(x+y)^{n-1}y$$

で定義する．

$x(x+y)^{n-1}y$ は $x$ で始まり $y$ で終わる $n+1$ 次の単項式すべての和であるから, 特に $\partial_n$ は $\mathfrak{H}^0$ を保つ.

**定理 1.5.3 (導分関係式, derivation relation)** 任意の自然数 $n \geq 1$ と任意の $\omega_0 \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$Z(\partial_n(w_0)) = 0. \tag{62}$$

**例 1.5.4**

$$\begin{aligned}\partial_2(xy) &= \partial_2(x)y + x\partial_2(y) = (x(x+y)y)\,y + x\,(-x(x+y)y)\\ &= x^2y^2 + xy^3 - x^3y - x^2y^2 = xy^3 - x^3y.\end{aligned}$$

より,

$$Z(\partial_2(xy)) = Z(xy^3 - x^3y) = \zeta(2,1,1) - \zeta(4) = 0.$$

また

$$\begin{aligned}\partial_2(x^2y) &= \partial_2(x)xy + x\partial_2(x)y + x^2\partial_2(y)\\ &= (x^2y+xy^2)xy + x(x^2y+xy^2)y - x^2(x^2y+xy^2)\\ &= x^2yxy + xy^2xy + x^2y^3 - x^4y.\end{aligned}$$

より

$$Z(\partial_2(x^2y)) = Z(x^2yxy + xy^2xy + x^2y^3 - x^4y) = \zeta(3,2) + \zeta(2,1,2) + \zeta(3,1,1) - \zeta(5) = 0.$$

**演習問題 24** この定理の $n=1$ の場合が Hoffman の関係式 (10) に他ならないことを示せ.

### 1.5.2　定理 1.5.3 の証明

以下 $\mathfrak{H}$ をその完備化である 2 変数非可換べき級数環 $\widehat{\mathfrak{H}} := \mathbf{Q}\langle\langle x, y\rangle\rangle$ に埋め込んで考える. $\mathfrak{H}$ のときと同様に $\widehat{\mathfrak{H}}^1 := \mathbf{Q} + \widehat{\mathfrak{H}}y,\ \widehat{\mathfrak{H}}^0 := \mathbf{Q} + x\widehat{\mathfrak{H}}y$ とする. 積 $*$, ш はそれぞれ自然に $\widehat{\mathfrak{H}}^1$, $\widehat{\mathfrak{H}}$ に延長され, $*$ に関して $\widehat{\mathfrak{H}}^0$ は部分代数, ш に関して $\widehat{\mathfrak{H}}^1$, $\widehat{\mathfrak{H}}^0$ は部分代数となっている. また, $\mathfrak{H}$ の導分 $\partial_n$ は自然に $\widehat{\mathfrak{H}}$ に延長され, それも同じ文字で表す.

はじめに, 両定理の証明にとって基本的な等式を与えておく. $z_n := x^{n-1}y\ (n \geq 1)$ とおいたことを思い出す.

**命題 1.5.5** 可換環 $\widehat{\mathfrak{H}}^1_*$ 上の冪級数環 $\widehat{\mathfrak{H}}^1_*[[u]]$ において等式

$$\exp_*\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z_n u^n\right) = 1 + yu + y^2u^2 + y^3u^3 + \cdots \tag{63}$$

が成り立つ. $\exp_*$ は $\widehat{\mathfrak{H}}^1_*[[u]]$ における exp で, 通常通り $f \in u\widehat{\mathfrak{H}}^1_*[[u]]$ に対し

$$\exp_*(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!},$$

ただし係数の積が $*$ であることを明記する為に記号 $*$ をつけている.

**証明)** 　両辺の $\log_*$ をとって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z_n u^n = \log_*(1 + yu + y^2u^2 + \cdots),$$

更にこれの $u \cdot \partial/\partial u$ をとった

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z_n u^n\right) * \left(1 + yu + y^2u^2 + \cdots\right) = yu + 2y^2u^2 + 3y^3u^3 + \cdots \tag{64}$$

を示せばよい. ところでこの式を対応する (形式的) 多重ゼータ値で書くと ($Z^*$ をとったわけではない. 単に見やすくするための形式的記号として $\zeta(1)$ 等を理解する)

$$\begin{aligned} & \left(\zeta(1)u - \zeta(2)u^2 + \zeta(3)u^3 - \cdots\right) * (1 + \zeta(1)u + \zeta(1,1)u^2 + \zeta(1,1,1)u^3 + \cdots) \\ = \ & \zeta(1)u + 2\zeta(1,1)u^2 + 3\zeta(1,1,1)u^3 + \cdots \end{aligned}$$

となり, 帰納的に調和積を計算して確かめることができる. ∎

**演習問題 25** これを実行せよ.

**注意 1.5.6** (i) (63) において $u = \pm 1$ とおくと ( 或は, 展開して $u^n$ の係数を比べたものを再び $\widehat{\mathfrak{H}}$ での等式にまとめる, と思えばよい ), $\widehat{\mathfrak{H}}^1_*$ における等式

$$\exp_*\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z_n\right) = \frac{1}{1-y}, \qquad \exp_*\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{n}\right) = \frac{1}{1+y} \tag{65}$$

を得る. ただし右辺はそれぞれ $1 + y + y^2 + y^3 + \cdots$ , $1 - y + y^2 - y^3 + \cdots$ を表している.

(ii) 実は, 式 (63), (64), (65) などは, 基本対称式, 完全対称式, 巾和対称式の関係を与えるスタンダードな関係式として解釈することができる ( たとえば (64) は Newton の公式 ). Hoffman [H2] 参照のこと. そこでは更に, $\mathfrak{H}^1_*$ は "quasi-symmetric functions" のなす代数と同一視できることが述べられている.

(iii) またこの (63) から定理 1.4.18 の特別な場合を導くことが出来る. まず両辺に $Z^*$ を施す :

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} Z^*(y^n)u^n = e^{Tu} \cdot A(u)^{-1}. \tag{66}$$

この両辺に $\rho$ を施すと

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho\left(Z^*(y^n)\right) u^n = e^{Tu}$$

を得るが, 右辺の $u^n$ の係数 $T^n/n!$ は $Z^{Ш}(y^n)$ に他ならないから,

$$Z^{Ш}(y^n) = \rho\left(Z^*(y^n)\right) \tag{67}$$

である. つまり, 定理 1.4.18 の $\boldsymbol{k} = (1,1,\ldots,1)$ の場合はこのように代数的に証明される.

(iv) (66) と, ガンマ関数の Weierstrass の無限積 (34) とから, $Z^*(y^n)$ ( これはまた (67) より $\rho^{-1}(T^n/n!)$ でもあることに注意 ) の具体的な公式が得られる. すなわち, $A(u)$ の定義と (34) より

$$A(u)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)e^{-u/n}$$

であるが, 各因子を

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{u}{n}\right)e^{-u/n} &= \left(1+\frac{u}{n}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{u^k}{k!n^k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{u^k}{k!n^k}+\frac{u^{k+1}}{k!n^{k+1}}\right)\\ &= 1+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)u^k}{k!n^k}\end{aligned}$$

と展開し, さらに積を展開すると,

$$\begin{aligned}&A(u)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)u^k}{k!n^k}\right)\\ &= 1+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left(\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=k\\ m\geq 1, k_i\geq 2}}(-1)^m\frac{(k_1-1)(k_2-1)\cdots(k_m-1)}{k_1!k_2!\cdots k_m!}\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_m)\right)u^k.\end{aligned}$$

従って, (66) より,

$$\begin{aligned}&Z^*(y^n) = \rho^{-1}\left(\frac{T^n}{n!}\right)\\ &= \frac{T^n}{n!}+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=k\\ m\geq 1, k_i\geq 2}}(-1)^m\frac{(k_1-1)\cdots(k_m-1)}{k_1!\cdots k_m!}\zeta(k_1,\ldots,k_m)\cdot\frac{T^{n-k}}{(n-k)!}.\end{aligned}$$

ところで, この表示は, 代数的に ( すなわち $\mathfrak{H}^1\simeq\mathfrak{H}^0[y]$ のレベルで ) 計算して得られる $Z^*(y^n)$ の表示式と一致するであろうか ( 計算機で $n=10$ まで計算したところ一致した ). Weierstass の無限積は解析的な式であるが, (ii) で述べたような解釈を通して代数的な意味付けが出来るのであろうか.

さて, まず定理 1.5.3 を, (62) と (58) が同値であることを示すことで証明する.

新しく二つの導分を定義し, $\partial_n$ との関係をみる. まず, 各 $z_n = x^{n-1}y \quad (n=1,2,3,\ldots)$ に対し, $\delta_n : \mathfrak{H}^1\to\mathfrak{H}^1$ を,

$$\delta_n(w) := z_n w - z_n * w \quad (w\in\mathfrak{H}^1)$$

で定義する.

**命題 1.5.7** $\delta_n$ は $\mathfrak{H}^1$ の導分である. 更に, $\delta_n$ は $\mathfrak{H}$ の導分に延長され, 生成元への作用は

(68) $$\delta_n(x)=0,\quad \delta_n(y) = -(x+y)z_n$$

で与えられる.

**証明)** 任意の $w, w' \in \mathfrak{H}^1$ に対し,

$$z_n * (ww') = (z_n * w)w' + w(z_n * w') - wz_nw'$$

が成り立つことは, 調和積の定義からすぐにわかる. これより,

$$z_nww' - z_n * (ww') = (z_nw - z_n * w)w' + w(z_nw' - z_n * w').$$

よって $\delta_n$ は $\mathfrak{H}^1$ の導分である.

また, $\mathfrak{H}$ の導分 $\delta'$ を (68) と同じ作用で定義すると,

$$\begin{aligned}\delta'(z_k) &= \delta'(x^{k-1}y) = -x^{k-1}(x+y)z_n = -z_{k+n} - z_kz_n \\ &= z_nz_k - z_n * z_k = \delta_n(z_k).\end{aligned}$$

すなわち $\delta'$ と $\delta_n$ は $\mathfrak{H}^1$ の生成元での値が同じだから, $\mathfrak{H}^1$ 上一致する. ∎

今, $\widehat{\mathfrak{H}}$ の導分 $\delta$ を

$$\delta := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{n}$$

で定義すると, (68) より

$$\delta(x) = 0,\ \delta(y) = -(x+y)t, \quad ただし\ t := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{n}$$

である. $\delta$ は $\widehat{\mathfrak{H}}^1$, $\widehat{\mathfrak{H}}^0$ を保つことに注意.

$\widehat{\mathfrak{H}}$ の自己同型 $\Phi$ を

$$\Phi := \exp(\delta) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{n}\right)$$

で定義する. 一般に $\partial$ が $\widehat{\mathfrak{H}}$ の次数を上げる導分であれば $\exp(\partial)$ は $\widehat{\mathfrak{H}}$ の (次数 2 以上を法として恒等的な) 自己同型となる. それは, 導分の Leibniz 則

$$\partial^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \partial^i(u)\partial^{n-i}(v)$$

から積についての準同型性

$$\begin{aligned}\exp(\partial)(uv) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n(uv)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 0}} \frac{n!}{i!j!} \partial^i(u)\partial^j(v) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^i(u)}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial^j(v)}{j!} = (\exp(\partial)(u))\,(\exp(\partial)(v))\end{aligned}$$

が従うことに基づく.

**命題 1.5.8** 自己同型 $\Phi$ は

$$\Phi(x) = x, \quad \Phi(x+y) = (x+y)(1+y)^{-1} \tag{69}$$

をみたし, $\mathfrak{H}^1$ 上では

$$\Phi(w) = (1+y)\left(\frac{1}{1+y} * w\right) \quad (w \in \mathfrak{H}^1) \tag{70}$$

で与えられる.

**証明)** $w \in \mathfrak{H}^1$ に対し $\delta(w) = tw - t * w$ である. また,

$$\delta((x+y)w) = -(x+y)tw + (x+y)\delta(w) = -(x+y)(t * w)$$

より, 帰納的に, 任意の $n \geq 1$ に対し

$$\delta^n(x) = 0, \quad \delta^n(x+y) = (-1)^n(x+y)t^{*n}$$

が分かる. $n!$ で割って和をとることにより

$$\Phi(x) = x, \quad \Phi(x+y) = (x+y)\exp_*(-t)$$

を得るが, (65) より $\exp_*(-t) = (1+y)^{-1}$ であるので, (69) を得る.
　また (70) であるが, まず,

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= (x+y)(1+y)^{-1} - x \\ &= y - (xy + y^2) + (xy^2 + y^3) - (xy^3 + y^4) + \cdots \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \Phi(z_k) = x^{k-1}\Phi(y) &= x^{k-1}y - (x^k y + x^{k-1}y^2) + (x^k y^2 + x^{k-1}y^3) - \cdots \\ &= z_k - (z_{k+1} + z_k y) + (z_{k+1}y + z_k y^2) - (z_{k+1}y^2 + z_k y^3) + \cdots \\ &= z_k + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(z_{k+1}y^{i-1} + z_k y^i). \end{aligned}$$

一方, 調和積の定義より $i \geq 1$ に対し

$$y^i * z_k = y(y^{i-1} * z_k) + z_k y^i + z_{k+1}y^{i-1}.$$

これに $(-1)^i$ をかけて和をとれば

$$\frac{1}{1+y} * z_k - z_k = -y\left(\frac{1}{1+y} * z_k\right) + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(z_k y^i + z_{k+1}y^{i-1}).$$

移項して

$$(1+y)\left(\frac{1}{1+y} * z_k\right) = \Phi(z_k)$$

を得る．すなわち (70) は $w=z_k$ については正しい．次に, $\mathfrak{H}^1$ の word $w$ に対し

$$(1+y)\left(\frac{1}{1+y}*z_pw\right)=(1+y)\left(\frac{1}{1+y}*z_p\right)(1+y)\left(\frac{1}{1+y}*w\right) \tag{71}$$

を示す．まず

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+y}*z_p&=\left(1-\frac{y}{1+y}\right)*z_p\\&=z_p-\left(z_1\cdot\frac{1}{1+y}\right)*z_p\\&=z_p-z_1\left(\frac{1}{1+y}*z_p\right)-z_p\left(z_1\cdot\frac{1}{1+y}\right)-z_{p+1}\cdot\frac{1}{1+y}\\&=z_p\cdot\frac{1}{1+y}-z_1\left(\frac{1}{1+y}*z_p\right)-z_{p+1}\cdot\frac{1}{1+y}\end{aligned}$$

となるので, 第 2 項を左辺に移行し両辺に右から $(1+y)\left(\frac{1}{1+y}*w\right)$ を掛けると

$$(1+y)\left(\frac{1}{1+y}*z_p\right)(1+y)\left(\frac{1}{1+y}*w\right)=(z_p-z_{p+1})\left(\frac{1}{1+y}*w\right) \tag{72}$$

を得る．一方,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+y}*z_pw&=z_pw-\left(z_1\cdot\frac{1}{1+y}\right)*z_pw\\&=z_pw-z_1\left(\frac{1}{1+y}*z_pw\right)-z_p\left(z_1\cdot\frac{1}{1+y}*w\right)-z_{p+1}\left(\frac{1}{1+y}*w\right)\\&=z_p\left(\frac{1}{1+y}*w\right)-z_1\left(\frac{1}{1+y}*z_pw\right)-z_{p+1}\left(\frac{1}{1+y}*w\right)\end{aligned}$$

より第 2 項を左辺に移行すると

$$(1+y)\left(\frac{1}{1+y}*z_pw\right)=(z_p-z_{p+1})\left(\frac{1}{1+y}*w\right) \tag{73}$$

を得る．したがって (72), (73) より等式 (71) は成り立つ．よって, 帰納的に

$$\begin{aligned}&(1+y)\frac{1}{1+y}*z_{k_1}z_{k_2}\cdots z_{k_n}\\&=(1+y)\left(\frac{1}{1+y}*z_{k_1}\right)(1+y)\left(\frac{1}{1+y}*z_{k_2}\right)\cdots(1+y)\left(\frac{1}{1+y}*z_{k_n}\right)\end{aligned}$$

を得る．すなわち，写像

$$w\mapsto(1+y)\left(\frac{1}{1+y}*w\right)$$

は $\mathfrak{H}^1$ 上の準同型である．$\mathfrak{H}^1$ は $z_k$ で代数的に生成されるから, これで (70) が示された． ∎

こんどはシャッフル積について類似の命題を用意する．計算はこちらの方が易しいので演習問題とする．

**命題 1.5.9** 写像 $d:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ を $d(w)=yw-y\,ш\,w$ で定義すると $d$ は $\mathfrak{H}$ の導分で, $\Psi:=\exp(d)$ とすると ($\Psi$ は $\widehat{\mathfrak{H}}$ の自己同型), $w\in\mathfrak{H}$ に対し

$$\Psi(w)=(1+y)\left(\frac{1}{1+y}ш\,w\right) \tag{74}$$

が成り立つ. 特に,

$$\Psi(x)=x(1+y)^{-1},\quad \Psi(y)=y(1+y)^{-1}. \tag{75}$$

**証明)** 導分になることは ш の定義から容易に分かる. また (74) は

$$\frac{1}{n!}d^n(w)=(-1)^n\left(y^n ш\, w-y(y^{n-1}ш\, w)\right)\quad (n\ge 1,\, w\in\mathfrak{H})$$

を帰納法で示す. ∎

**演習問題 26** この証明を完成させよ.

さて, $\widehat{\mathfrak{H}}$ の自己同型 $\Delta$ を

$$\Delta=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial_n}{n}\right)$$

で定義する. このとき次が成り立つ.

**命題 1.5.10** $\widehat{\mathfrak{H}}$ 上

$$\Phi=\Psi\circ\Delta. \tag{76}$$

**証明)** 生成元の行き先が一致することを見るのだが, $\widehat{\mathfrak{H}}$ の (skew) 商体にまで延長して考える方が計算が簡単になる[†].

$z:=x+y$ とおく. この記号で $\partial_n(x)=xz^{n-1}y,\ \partial_n(y)=-xz^{n-1}y$ である. まず $\partial_n(z)=0$ より, $\Delta(z)=z$ である. また,

$$\partial_n(x^{-1})=-x^{-1}\partial_n(x)x^{-1}=-z^{n-1}yx^{-1}=-z^n(x^{-1}-z^{-1})$$

より, (積の非可換性より「商の微分] は, 一般に導分 $\partial$ に対し, $0=\partial(ww^{-1})=\partial(w)w^{-1}+w\partial(w^{-1})$ より $\partial(w^{-1})=-w^{-1}\partial(w)w^{-1}$ となる)

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial_n}{n}\right)(x^{-1}-z^{-1})=\log(1-z)(x^{-1}-z^{-1}).$$

これより

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial_n}{n}\right)^m(x^{-1}-z^{-1})=(\log(1-z))^m(x^{-1}-z^{-1})$$

で, よって

$$\Delta(x^{-1}-z^{-1})=(1-z)(x^{-1}-z^{-1}).$$

[†]このことは落合啓之さんがはじめに指摘した.

これらと, (75) とより $(\Psi\circ\Delta)(z) = z(1+y)^{-1}$ および

$$\begin{aligned}(\Psi\circ\Delta)(x^{-1}-z^{-1}) &= \Psi\left((1-z)(x^{-1}-z^{-1})\right)\\ &= \left(1-z(1+y)^{-1}\right)\left((1+y)x^{-1}-(1+y)z^{-1}\right)\\ &= (1+y)x^{-1}-zx^{-1}-(1+y)z^{-1}+1\\ &= x^{-1}-(1+y)z^{-1}.\end{aligned}$$

一方 (69) より $\Phi(z) = z(1+y)^{-1}$, $\Phi(x^{-1}-z^{-1}) = x^{-1}-(1+y)z^{-1}$ となるので, $\widehat{\mathfrak{H}}$ の生成元 $x$, $z$ での $\Psi\circ\Delta$ と $\Phi$ の値は一致する. ∎

**系 1.5.11** $w\in\mathfrak{H}^1$ に対し

$$\frac{1}{1+y}*w = \frac{1}{1+y}ш\Delta(w). \tag{77}$$

**証明)** これは (70), (74), (76) から得られる等式の左から $(1+y)^{-1}$ をかけたものに他ならない. ∎

この式を使って (62) と (58) の同値性が証明される. すなわち, (77) において $w = w_0\in\mathfrak{H}^0$ とし, 両辺の $\mathrm{reg}_ш$ をとる. $\mathrm{reg}_ш(y^n) = 0$ $(n\geq 1)$ であるので $\mathrm{reg}_ш(1/(1+y)) = 1$ となり,

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\mathrm{reg}_ш(y^m*w_0) = \Delta(w_0),$$

左辺 $m=0$ の項を移項して

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\mathrm{reg}_ш(y^m*w_0) = (\Delta-1)(w_0)$$

を得る. 今, $w_0$ は斉次だとして（そう仮定してよい）, 右辺の exp を展開し両辺の斉次部分を比較する．次数の低いところか順に見ていけば，まず

$$\partial_1(w_0) = -\mathrm{reg}_ш(y*w_0)$$

から，系 1.4.23(58) より $Z(\partial_1(w_0)) = 0$ が得られ，あとは帰納的に，$\partial_n(w_0)$ が $\mathrm{reg}_ш(y^m*w_0)$ たちと，$n'<n$ なる $\partial_{n'}(w_0)$ たちによって書かれることから，(62) $Z(\partial_n(w_0)) = 0$ が得られる．また逆に (62) から (58) が出ることも同じくこの式から分かる. ∎

### 1.5.3 導分関係式と大野の関係式

定理 1.5.3 は双対性のもとで大野の関係式と同値である. より詳しく言うと, (16) の右辺の双対をとった形の関係式が (62) と同値である. これを説明する.

新しく $\mathfrak{H}$ 上の導分 $D_n$ $(n\geq 1)$ を

$$D_n(x) = 0,\quad D_n(y) = x^n y$$

で定義し, $\overline{D}_n := \tau D_n \tau$ とする. $\overline{D}_n$ は

$$\overline{D}_n(x) = xy^n, \quad \overline{D}_n(y) = 0$$

となる $\mathfrak{H}$ 上の導分である. 各 $l \geq 0$ に対し, $\mathbf{Q}$-線形写像 $\sigma_l, \overline{\sigma}_l : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H}$ を, 同型

$$\sigma := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{n}\right), \quad \overline{\sigma} := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{D}_n}{n}\right)$$

の $l$ 次斉次成分とする:

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{n}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l, \quad \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{D}_n}{n}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\sigma}_l\,.$$

いま $D = \sum_{n=1}^{\infty} D_n/n$ とおく. $D(x) = 0$ および

$$D(y) = (x + x^2/2 + x^3/3 + \cdots)y = (-\log(1-x))y$$

より, $D^n(x) = 0, D^n(y) = (-\log(1-x))^n y$ となるから,

$$\sigma(x) = x \quad \text{および} \quad \sigma(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\log(1-x))^n y/n! = (1-x)^{-1}y$$

となる. よって, ($\sigma$ は準同型なので)

$$\begin{aligned} \sigma(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y\cdots x^{k_n-1}y) &= x^{k_1-1}(1-x)^{-1}yx^{k_2-1}(1-x)^{-1}y\cdots x^{k_n-1}(1-x)^{-1}y \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\substack{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n=l \\ \varepsilon_i \geq 0}} x^{k_1+\varepsilon_1-1}yx^{k_2+\varepsilon_2-1}y\cdots x^{k_n+\varepsilon_n-1}y, \end{aligned}$$

つまり

$$\sigma_l(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y\cdots x^{k_n-1}y) = \sum_{\substack{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n=l \\ \varepsilon_i \geq 0}} x^{k_1+\varepsilon_1-1}yx^{k_2+\varepsilon_2-1}y\cdots x^{k_n+\varepsilon_n-1}y.$$

従って，大野の関係式は, すべての $l \geq 0$ と $w_0 \in \mathfrak{H}^0$ に対して

$$Z((\sigma_l - \sigma_l\tau)(w_0)) = 0$$

が成り立つこと, と言える.

ここで次が成り立つ.

**定理 1.5.12**

$$\Delta = \overline{\sigma}\sigma^{-1}.$$

**証明)** 前節で

$$\Delta(z) = z, \quad \Delta(x^{-1} - z^{-1}) = (1-z)(x^{-1} - z^{-1})$$

を示した $(z = x + y)$. $\sigma(x) = x, \sigma(y) = (1-x)^{-1}y$ より $\sigma(z) = x + (1-x)^{-1}y$, これらから

$$\sigma^{-1}(x) = x, \quad \sigma^{-1}(z) = x + (1-x)y, \quad \sigma^{-1}(x^{-1} - z^{-1}) = x^{-1} - (x + (1-x)y)^{-1}$$

と計算される. また $\sigma$ の計算と同様にして

$$\overline{\sigma}(x) = x(1-y)^{-1}, \quad \overline{\sigma}(y) = y, \quad \overline{\sigma}(z) = x(1-y)^{-1} + y$$

であるので,

$$\begin{aligned}(\overline{\sigma}\sigma^{-1})(z) &= \overline{\sigma}(x + (1-x)y) \\ &= x(1-y)^{-1} + (1 - x(1-y)^{-1})y \\ &= x(1-y)^{-1}(1-y) + y \\ &= z,\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}(\overline{\sigma}\sigma^{-1})(x^{-1} - z^{-1}) &= \overline{\sigma}(x^{-1} - (x + (1-x)y)^{-1}) \\ &= (1-y)x^{-1} - \big(x(1-y)^{-1} + (1 - x(1-y)^{-1})y\big)^{-1} \\ &= (1 - z + x)x^{-1} - z^{-1} \\ &= (1-z)(x^{-1} - z^{-1}).\end{aligned}$$

これで定理が証明された.

**系 1.5.13** 導分関係式 (62) は,

$$Z((\sigma_l - \overline{\sigma}_l)(w_0)) = 0, \quad (\forall l \geq 1, \forall w_0 \in \mathfrak{H}^0)$$

と同値.

**証明)** これは, 定理からすぐ導かれる等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial_n}{n} = \log(\Delta) = \log(1 - (\sigma - \overline{\sigma})\sigma^{-1})$$

および

$$\sigma - \overline{\sigma} = (1 - \Delta)\sigma$$

よりわかる. ∎

$\overline{\sigma}_l = \tau\sigma_l\tau$ であるから, この系は大野の関係式の右辺の双対をとったものである.

# 2 多重 $L$ 値

多重ゼータ値の拡張として 2 種類の多重 $L$ 値を, 一方は反復積分表示を持ち, 他方は級数の積がうまく振る舞う（調和積）ように導入する. この 2 種類の多重 $L$ 値を用いて, 複シャッフル関係式とその正規化, 導分関係式などが多重ゼータ値のときと同様に得られる. これらを簡単に述べる. 詳細は [AK2] を参照.

## 2.1　多重 $L$ 値の定義

正整数 $m$ を固定し, $R=R_m:=\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ とおく. $\mathcal{F}(R;\mathbf{C})$ を $R$ 上の $\mathbf{C}$ 値関数の成す $\mathbf{C}$-ベクトル空間とする. 1 の原始 $m$ 乗根 $\zeta=\zeta_m:=\exp(2\pi i/m)$ を固定し, 各 $a\in R$ に対し関数 $\varphi_a\in\mathcal{F}(R;\mathbf{C})$ を

$$\varphi_a(x)=\zeta^{ax}\quad(x\in R).$$

で定義する. $\{\varphi_a\}$ $(a\in R)$ は $\mathcal{F}(R;\mathbf{C})$ の一組の基底を成す.

**定義 2.1.1 (多重 $L$ 値, multiple $L$-values)**　$f_1,\ldots,f_r\in\mathcal{F}(R;\mathbf{C})$ と正整数 $k_1,\ldots,k_r$ に対し,

$$\begin{aligned}
L_{\text{Ш}}(k_1,\ldots,k_r;f_1,\ldots,f_r) &= \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_r>0}\frac{f_1(n_1-n_2)\cdots f_{r-1}(n_{r-1}-n_r)f_r(n_r)}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}}\\
&= \sum_{\nu_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_r=1}^{\infty}\frac{f_1(\nu_1)f_2(\nu_2)\cdots f_r(\nu_r)}{(\nu_1+\cdots+\nu_r)^{k_1}(\nu_2+\cdots+\nu_r)^{k_2}\cdots(\nu_r)^{k_r}}.
\end{aligned}$$

別の型の $L$ 値も定義する.

$$L_*(k_1,\ldots,k_r;f_1,\ldots,f_r)=\sum_{n_1>n_2>\cdots>n_r>0}\frac{f_1(n_1)f_2(n_2)\cdots f_r(n_r)}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}}.$$

$k_1\geq 2$ なら, これらの多重 $L$ 値（右辺の無限級数）は収束する.
$k_1=1$ のときは, 次で定義する :

$$\begin{aligned}
L_{\text{Ш}}(1,k_2,\ldots,k_r;f_1,\ldots,f_r) &= \lim_{R\to\infty}\sum_{R>n_1>\cdots>n_r>0}\frac{f_1(n_1-n_2)\cdots f_{r-1}(n_{r-1}-n_r)f_r(n_r)}{n_1n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}},\\
L_*(1,k_2,\ldots,k_r;f_1,\ldots,f_r) &= \lim_{R\to\infty}\sum_{R>n_1>\cdots>n_r>0}\frac{f_1(n_1)f_2(n_2)\cdots f_r(n_r)}{n_1n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}}.
\end{aligned}$$

$r=1$ の場合は, $L_{\text{Ш}}(k,f)=L_*(k,f)$ で, これは普通の Dirichlet 級数である. $k_1=1$ の場合の収束条件は次の命題で与えられる. 各 $f\in\mathcal{F}(R;\mathbf{C})$ は Fourier 展開

$$f(x)=\sum_{a\in R}\widehat{f}(a)\zeta^{ax},\qquad \widehat{f}(a)=\frac{1}{m}\sum_{y\in R}f(y)\zeta^{-ay}$$

を持つ.

**命題 2.1.2**　$k_1=1$ とする. このとき $L_{\text{Ш}}(1,k_2,\ldots,k_r;f_1,\ldots,f_r)$ と $L_*(1,k_2,\ldots,k_r;f_1,\ldots,f_r)$ が収束するための必要十分条件は $\widehat{f_1}(0)=0$ (すなわち $\sum_{y\in R}f_1(y)=0$ ) である.

証明は Abel の級数総和法に基づく.

二つの $L_{\text{Ш}}$ 値と $L_*$ 値はお互いに他の線形結合として書ける.

**命題 2.1.3** (i) $k_1=1$ のときは $\widehat{f_1}(0)=0$ とする.

$$\begin{aligned}
&L_*(k_1,\ldots,k_r;f_1,\ldots,f_r)\\
=&\sum_{a_1,\ldots,a_r\in R}\widehat{f_1}(a_1)\cdots\widehat{f_r}(a_r)L_Ш(k_1,\ldots,k_r;\varphi_{a_1},\varphi_{a_1+a_2},\ldots,\varphi_{a_1+\cdots+a_r}),\\
&L_Ш(k_1,\ldots,k_r;f_1,\ldots,f_r)\\
=&\sum_{a_1,\ldots,a_r\in R}\widehat{f_1}(a_1)\cdots\widehat{f_r}(a_r)L_*(k_1,\ldots,k_r;\varphi_{a_1},\varphi_{a_2-a_1},\ldots,\varphi_{a_r-a_{r-1}}).
\end{aligned}$$

(ii) とくに $a_1,\ldots,a_r\in R,\ a_1\neq 0$ に対し,

$$L_*(k_1,\ldots,k_r;\varphi_{a_1},\ldots,\varphi_{a_r})=L_Ш(k_1,\ldots,k_r;\varphi_{a_1},\varphi_{a_1+a_2},\ldots,\varphi_{a_1+\cdots+a_r}),$$

$$L_Ш(k_1,\ldots,k_r;\varphi_{a_1},\ldots,\varphi_{a_r})=L_*(k_1,\ldots,k_r;\varphi_{a_1},\varphi_{a_2-a_1},\ldots,\varphi_{a_r-a_{r-1}}).$$

簡潔に

$$L_Ш(\mathbf{k};\mathbf{a})=L_Ш(k_1,\ldots,k_r;a_1,\ldots,a_r):=L_Ш(k_1,\ldots,k_r;\varphi_{a_1},\ldots,\varphi_{a_r})$$

などと書く. $(\mathbf{k};\mathbf{a})=(k_1,\ldots,k_r;a_1,\ldots,a_r)$ を MLV(=Multiple $L$-value) のインデックス という. $a_1=\cdots=a_r=0$ のときが, 多重ゼータ値である.

$$L_Ш(k_1,\ldots,k_r;0,\ldots,0)=L_*(k_1,\ldots,k_r;0,\ldots,0)=\zeta(k_1,\ldots,k_r).$$

$L_Ш$ 値は反復積分表示を持つ. §1.2 における Drinfel'd 積分を一般化して, $|\varepsilon_j|\leq 1\ (1\leq j\leq n)$, $\varepsilon_1\neq 1,\ \varepsilon_n\neq 0$ なる $\varepsilon_j\in\mathbf{C}$ に対し

$$I(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=\int\cdots\int_{1>t_1>\cdots>t_n>0}A_{\varepsilon_1}(t_1)A_{\varepsilon_2}(t_2)\cdots A_{\varepsilon_n}(t_n)\,dt_1\cdots dt_n,$$

ただし

$$A_0(t)=\frac{1}{t},\qquad A_\varepsilon(t)=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon t}\quad(\varepsilon\neq 0,\ |\varepsilon|\leq 1).$$

とする. この記号の下で

$$L(k_1,\ldots,k_r;a_1,\ldots,a_r)=I(\underbrace{0,\ldots,0,\zeta^{a_1}}_{k_1},\underbrace{0,\ldots,0,\zeta^{a_2}}_{k_2},\ \cdots\ ,\underbrace{0,\ldots,0,\zeta^{a_r}}_{k_r}).$$

ここで, 2 つの Drinfel'd 積分の積はまた Drinfel'd 積分の $\mathbf{Q}$-線形結合で書ける (シャッフル積) ので

$\star$ $L_Ш$ 値の積は $L_Ш$ 値の $\mathbf{Q}$-線形結合で書ける. 積のルールはシャッフル積で記述される.

**例 2.1.4** $L(1;a)^n=n!L(\underbrace{1,\ldots,1}_{n};a,\ldots,a),\quad a\in R,\ a\neq 0.$

## 2.2　代数的定式化と複シャッフル関係式

各 $a \in R$ ごとに変数 $y_a$ を準備し $m+1$ 変数の非可換多項式環 $\mathcal{A} := \mathbf{Q}\langle x,\, y_a\,(a \in R_m)\rangle$ とその部分代数 $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_0$ を考える:

$$\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_1 = \mathbf{Q} + \sum_{a \in R_m} \mathcal{A} y_a \supset \mathcal{A}_0 = \mathbf{Q} + \sum_{a \in R_m} x\mathcal{A} y_a + \sum_{a,\, b \in R_m,\, b \neq 0} y_b \mathcal{A} y_a.$$

$m$ を特記する必要のあるときは $\mathcal{A}^{(m)}$, $\mathcal{A}_1^{(m)}$, $\mathcal{A}_0^{(m)}$ と記す. $m'$ を $m$ の約数とし $\ell = m/m'$ とおく. $\mathcal{A}^{(m')}$ は自然に, 単項式の対応

$$x^{k_1-1}y_{b_1}x^{k_2-1}y_{b_2}\cdots x^{k_n-1}y_{b_n} \longmapsto x^{k_1-1}y_{\ell b_1}x^{k_2-1}y_{\ell b_2}\cdots x^{k_n-1}y_{\ell b_n},$$

によって $\mathcal{A}^{(m)}$ に埋め込まれる. ただし $(b_1,\ldots,b_n) \in R_{m'}^n$ であり, $(\ell b_1,\ldots,\ell b_n)$ は $R_m^n$ の元とみなされる. この埋め込みにより $\mathcal{A}^{(m')}$ は $\mathcal{A}^{(m)}$ の部分代数になる. $m=1$ のときが多重ゼータ値の場合で $\mathcal{A}^{(1)} = \mathfrak{H}$, $\mathcal{A}_1^{(1)} = \mathfrak{H}^1$, $\mathcal{A}_0^{(1)} = \mathfrak{H}^0$ である.

法 $m$ の場合に戻る. インデックス $(\mathbf{k};\mathbf{a}) = (k_1,\ldots,k_r;a_1,\ldots,a_r)$ は $k_1 \geq 2$ または $k_1 = 1$ かつ $a_1 \neq 0$ のとき, 収束インデックス (admissible) と呼ばれる. 2種類の多重 $L$ 値を利用して写像 $\mathcal{L}_{ш}, \mathcal{L}_* : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathbf{C}$ を次で定義する:

単項式に対し

$$\mathcal{L}_{ш}(x^{k_1-1}y_{a_1}\cdots x^{k_r-1}y_{a_r}) = L_{ш}(k_1,\ldots,k_r;a_1,\ldots,a_r),$$

$$\mathcal{L}_*(x^{k_1-1}y_{a_1}\cdots x^{k_r-1}y_{a_r}) = L_*(k_1,\ldots,k_r;a_1,\ldots,a_r),$$

とし, これを $\mathbf{Q}$-線形に $\mathcal{A}_0$ まで延長する.

次の 3 点が肝要.

**($\star$1)** $L_{ш}(\mathbf{k};\mathbf{a})$ にはシャッフル積があり, それに対応して $\mathcal{A}_0$ 上に, さらにもっと広く $\mathcal{A}$ 上にシャッフル積 ш を定義できる. このとき積の定義から

$$\mathcal{L}_{ш}(w_1 ш w_2) = \mathcal{L}_{ш}(w_1)\mathcal{L}_{ш}(w_2) \quad (\forall w_1,\ w_2 \in \mathcal{A}_0).$$

**($\star$2)** $L_*(\mathbf{k};\mathbf{a})$ は調和積 (級数による積) に従う. 例えば収束インデックス $(k_1;a_1)$, $(k_2;a_2)$ に対し

$$L_*(k_1;a_1)L_*(k_2;a_2) = L_*(k_1,k_2;a_1,a_2) + L_*(k_1+k_2;a_1+a_2) + L_*(k_2,k_1;a_2,a_1).$$

これに対応するように $\mathcal{A}_0$ 上に, 調和積 $*$ を定義でき $\mathcal{A}_1$ まで自然に延ばせる (Hoffman の $\mathfrak{H}^1$ の場合と同様にする). 上の関係は

$$x^{k_1-1}y_{a_1} * x^{k_2-1}y_{a_2} = x^{k_1-1}y_{a_1}x^{k_2-1}y_{a_2} + x^{k_1+k_2-1}y_{a_1+a_2} + x^{k_2-1}y_{a_2}x^{k_1-1}y_{a_1}$$

と記述される. このとき

$$\mathcal{L}_*(w_1 * w_2) = \mathcal{L}_*(w_1)\mathcal{L}_*(w_2) \quad (\forall w_1,\ w_2 \in \mathcal{A}_0).$$

**($\star$3)** $L_{ш}$ 値と $L_*$ 値の間の関係を通して, 写像 $\mathcal{L}_{ш}$ と $\mathcal{L}_*$ の間には簡明な関係

$$\mathcal{L}_*(w_0) = \mathcal{L}_{ш}(\mathcal{I}(w_0)) \quad \forall w_0 \in \mathcal{A}_0 \quad (\text{すなわち } \mathcal{A}_0 \text{ 上で } \mathcal{L}_* = \mathcal{L}_{ш} \circ \mathcal{I})$$

がある. ただし $\mathcal{I}: \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_1$ は

$$\mathcal{I}(x^{k_1-1}y_{a_1}x^{k_2-1}y_{a_2}\cdots x^{k_n-1}y_{a_n}) = x^{k_1-1}y_{a_1}x^{k_2-1}y_{a_1+a_2}\cdots x^{k_n-1}y_{a_1+\cdots+a_n}$$

を $\mathbf{Q}$-線形に延ばして得られる $\mathbf{Q}$-線形な可逆写像である.

上記 ($\star$1) $\sim$ ($\star$3) により

**命題 2.2.1 (有限複シャッフル関係式, finite double shuffle relation)** 任意の $w_1,\ w_2 \in \mathcal{A}_0$ に対し

$$\mathcal{L}_{ш}(\mathcal{I}(w_1) ш \mathcal{I}(w_2) - \mathcal{I}(w_1 * w_2)) = 0.$$

この命題がどんなことをしているのかみておこう.

**例 2.2.2** 収束インデックス $(k_1; a_1)$, $(k_2; a_2)$ に対し

$$L_{ш}(k_1;a_1)L_{ш}(k_2;a_2) =$$
$$\sum_{j=0}^{k_2-1}\binom{k_1-1+j}{j}L_{ш}(k_1+j,k_2-j;a_1,a_2) + \sum_{j=0}^{k_1-1}\binom{k_2-1+j}{j}L_{ш}(k_2+j,k_1-j;a_2,a_1).$$

一方左辺は

$$L_*(k_1;a_1)L_*(k_2;a_2) = L_*(k_1,k_2;a_1,a_2) + L_*(k_1+k_2;a_1+a_2) + L_*(k_2,k_1;a_2,a_1)$$
$$= L_{ш}(k_1,k_2;a_1,a_1+a_2) + L_{ш}(k_1+k_2;a_1+a_2) + L_{ш}(k_2,k_1;a_2,a_1+a_2)$$

これより右辺が等しく

$$\sum_{j=0}^{k_2-1}\binom{k_1-1+j}{j}L_{ш}(k_1+j,k_2-j;a_1,a_2) + \sum_{j=0}^{k_1-1}\binom{k_2-1+j}{j}L_{ш}(k_2+j,k_1-j;a_2,a_1)$$
$$= L_{ш}(k_1,k_2;a_1,a_1+a_2) + L_{ш}(k_1+k_2;a_1+a_2) + L_{ш}(k_2,k_1;a_2,a_1+a_2).$$

この例で $k_1 = 1,\ a_1 = 0$ の場合は, 左辺が収束せず扱えないが, 実際には, 最後の等式は発散する部分が打ち消しあって, 次が成立する.

$$(78) \qquad \sum_{j=1}^{k_2-1} L_{ш}(j+1,k_2-j;0,a_2) + L_{ш}(k_2,1;a_2,0) = L_{ш}(1+k_2;a_2) + L_{ш}(k_2,1;a_2,a_2).$$

このあたりの事情も多重ゼータ値の場合と同様であって, こういうことを一般的に定式化するのが次の正規化である.

## 2.3 正規化と一般複シャッフル関係式

部分代数 $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ はシャッフル積 ш で閉じており, それぞれを積 ш による可換代数と見たものを $\mathcal{A}_0^{ш}, \mathcal{A}_1^{ш}$ と記す. このとき $\mathcal{A}_1^{ш} \simeq \mathcal{A}_0^{ш}[y_0]$ となるので, これにより, 次の条件をみたすように $\mathcal{L}_{ш} : \mathcal{A}_0^{ш} \longrightarrow \mathbf{C}$ を $\widehat{\mathcal{L}}_{ш} : \mathcal{A}_1^{ш} \longrightarrow \mathbf{C}[T]$ に自然に拡張することができる:

(i) $\widehat{\mathcal{L}}_{ш}\Big|_{\mathcal{A}_0^{ш}} = \mathcal{L}_{ш}$, (ii) $\widehat{\mathcal{L}}_{ш}(y_0) = T$,

(iii) $\widehat{\mathcal{L}}_{ш}$ は代数準同型.

調和積 $*$ に関しても, 同様の意味で記号 $\mathcal{A}_0^*, \mathcal{A}_1^*$ を用いる. このときやはり $\mathcal{A}_1^* \simeq \mathcal{A}_0^*[y_0]$ で, 次の条件をみたすように $\mathcal{L}_* : \mathcal{A}_0^* \longrightarrow \mathbf{C}$ を $\widehat{\mathcal{L}}_* : \mathcal{A}_1^* \longrightarrow \mathbf{C}[T]$ に自然に拡張することができる:

(i) $\widehat{\mathcal{L}}_*\Big|_{\mathcal{A}_0^*} = \mathcal{L}_*$, (ii) $\widehat{\mathcal{L}}_*(y_0) = T$,

(iii) $\widehat{\mathcal{L}}_*$ は代数準同型.

$\mathbf{C}$-線形写像 $\rho : \mathbf{C}[T] \longrightarrow \mathbf{C}[T]$ を §1.4.6 をそのまま $\mathbf{C}$ に係数拡大したものとする. 即ち冪級数 $A(u)$ を

$$A(u) = \exp\Big(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) u^n\Big)$$

で定義し,

$$\rho(e^{Tu}) = A(u) e^{Tu}$$

として定める.

**定理 2.3.1** $\mathcal{A}_1$ 上で

$$\widehat{\mathcal{L}}_{ш} \circ \mathcal{I} = \rho \circ \widehat{\mathcal{L}}_*.$$

証明は定理 1.4.18 と同様に行える.

**例 2.3.2** $w = y_0 y_a$ $(a \in R_m,\ a \neq 0)$ とする. $y_0 * y_a = y_0 y_a + y_a y_0 + x y_a$ より

$$y_0 y_a = y_0 * y_a - (y_a y_0 + x y_a), \qquad y_a y_0 + x y_a \in \mathcal{A}_0.$$

これから

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}_*(y_0 y_a) &= L_*(1; a) T - (L_*(1,1; a, 0) + L_*(2; a)) \\ &= L_{ш}(1; a) T - (L_{ш}(1,1; a, a) + L_{ш}(2; a)) \end{aligned}$$

一方 $y_0 y_a = y_0 ш y_a - y_a y_0$ だから

$$\widehat{\mathcal{L}}_{ш}\big(\mathcal{I}(y_0 y_a)\big) = \widehat{\mathcal{L}}_{ш}(y_0 y_a) = T L_{ш}(1; a) - L_{ш}(1,1; a, 0).$$

$\rho(1) = 1,\ \rho(T) = T$ だから 比較して

$$L_{ш}(1,1,a,a) + L_{ш}(2,a) = L_{ш}(1,1,a,0).$$

これは (78) 式で, 形式的に $k_2 = 1$ としたものである.

多重ゼータ値の一般複シャッフル関係式 (定理 1.4.22, 系 1.4.23) にあたるものが次の定理である. 証明は, 写像 $\mathcal{I}$ が関わる箇所に注意すれば多重ゼータの場合と同様である ([AK2]). $\mathrm{reg}_{ш}$ は $\mathcal{A}_1^{ш} \simeq \mathcal{A}_0^{ш}[y_0]$ の $y_0$ に関する "定数項" をとる写像とする. (ш に関する命題のみ述べる.)

**定理 2.3.3** 次が成り立つ. またこれらの一つから定理 2.3.1 を導くことができる.

(i) 任意の $w_1 \in \mathcal{A}_1$, $w_0 \in \mathcal{A}_0$ に対し

$$\widehat{\mathcal{L}}_{ш}\big(\mathcal{I}(w_1)ш\mathcal{I}(w_0) - \mathcal{I}(w_1 * w_0)\big) = 0.$$

特にその定数項

$$\mathcal{L}_{ш}\Big(\mathrm{reg}_{ш}\big(\mathcal{I}(w_1)ш\mathcal{I}(w_0) - \mathcal{I}(w_1 * w_0)\big)\Big) = 0, \quad (w_1 \in \mathcal{A}_1,\, w_0 \in \mathcal{A}_0).$$

(ii) 任意の $m \geq 1$, $w_0 \in \mathcal{A}_0$ に対し

$$\mathcal{L}_{ш}\Big(\mathrm{reg}_{ш}\big(\mathcal{I}(y_0^m * w_0)\big)\Big) = 0.$$

## 2.4 導分関係式

多重ゼータ値の導分関係式 (62) は, 次のように多重 $L$ 値にも一般化される.

**定義 2.4.1** $\mathcal{A}$ 上の導分 $\partial_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を

$$\begin{cases} \partial_n(x) = x(x+y_0)^{n-1}y_0, \\ \partial_n(y_a) = -x(x+y_0)^{n-1}y_a + y_a(x+y_0)^{n-1}y_0 - y_a(x+y_0)^{n-1}y_a \quad (a \in R_m). \end{cases}$$

で定義する.

**定理 2.4.2** 任意の $w_0 \in \mathcal{A}_0$ と $n \geq 1$ に対し

$$\mathcal{L}_{ш}\big(\partial_n(w_0)\big) = 0.$$

証明は [AK2] に譲る. 基本的には多重ゼータ値の場合の証明を踏襲する. $n = 1$ の場合の証明は九大の小浦友廣君の修士論文 (2001.2) でなされた.

**例 2.4.3** $a \neq 0$ ($R$ において) とする. 等式

$$\partial_1(y_a^2) = -xy_a^2 - y_axy_a + y_ay_0y_a + y_a^2y_0 - 2y_a^3$$

および

$$\partial_2(y_a) = -x^2y_a - xy_0y_a + y_axy_0 - y_axy_a + y_ay_0y_0 - y_ay_0y_a,$$

より, それぞれ

$$\begin{aligned} &L_{ш}(2,1;a,a) + L_{ш}(1,2;a,a) \\ &\qquad = L_{ш}(1,1,1;a,0,a) + L_{ш}(1,1,1;a,a,0) - 2L_{ш}(1,1,1;a,a,a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &L_{ш}(3;a) + L_{ш}(2,1;0,a) + L_{ш}(1,2;a,a) + L_{ш}(1,1,1;a,0,a) \\ &\qquad = L_{ш}(1,2;a,0) + L_{ш}(1,1,1;a,0,0) \end{aligned}$$

を得る.

## 2.5 多重 $L$ 関数の極での主要部

多重ゼータ関数の極の主要部に関する定理 1.4.27 も一般化出来る.

admissible とは限らないインデックス $(\mathbf{k};\mathbf{a})=(k_1,\dots,k_n;a_1,\dots a_n)$ に対し二つの多重 $L$ 関数 $L^*_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(s)$, $L^{ш}_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(s)$ を Dirichlet 級数

$$L^*_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(s)=\sum_{m_1>m_2>\cdots>m_n>0}\frac{\varphi_{a_1}(m_1)\varphi_{a_2}(m_2)\cdots\varphi_{a_n}(m_n)}{m_1^{k_1+s}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}}$$

および

$$L^{ш}_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(s)=\sum_{m_1>m_2>\cdots>m_n>0}\frac{\varphi_{a_1}(m_1-m_2)\cdots\varphi_{a_{n-1}}(m_{n-1}-m_n)\varphi_{a_n}(m_n)}{m_1^{k_1+s}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}}$$

で定義する. これらは $\mathrm{Re}(s)>0$ で絶対収束し, [AK1] の方法で全平面に有理型に解析接続できる. $(\mathbf{k};\mathbf{a})$ が admissible ならば, $s=0$ で正則で

$$L^*_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(0)=L_*(\mathbf{k};\mathbf{a}),\qquad L^{ш}_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(0)=L_{ш}(\mathbf{k};\mathbf{a}).$$

admissible でないときは $s=0$ は極となるが, その主要部が次で与えられる.

**定理 2.5.1** (i) 多項式 $\mathcal{L}^*_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(T)$ を

$$\mathcal{L}^*_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(T)=\sum_{j=0}^{\nu}b_j\frac{(T-\gamma)^j}{j!}$$

と書くとき ($\gamma=$ Euler 定数 ), $L^*_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(s)$ の $s=0$ での主要部は

$$L^*_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(s)=\sum_{j=0}^{\nu}\frac{b_j}{s^j}+O(s)\quad(s\to 0)$$

で与えられる.
(ii) 多項式 $\mathcal{L}^{ш}_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(T)$ を

$$\mathcal{L}^{ш}_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(T)=\sum_{j=0}^{\nu}c_j\frac{T^j}{j!}$$

と書くとき, $\Gamma(s+1)L^{ш}_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(s)$ の $s=0$ での主要部は

$$\Gamma(s+1)L^{ш}_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(s)=\sum_{j=0}^{\nu}\frac{c_j}{s^j}+O(s)\quad(s\to 0)$$

で与えられる.

## 2.6 ガウス－ヤコビ和

$p$ を奇素数とし $\chi_1$, $\chi_2$ を, 法 $p$ の原始的 Dirichlet 指標とする．$L_*(k_1,k_2;\chi_1,\chi_2)$ を $L_{\text{Ш}}$ 値 $L_{\text{Ш}}(k_1,k_2;\chi_1,\chi_2)$ で表そうとすると, 次のような和が現れる（ただし，途中の計算に現れるだけで，最終的な表示の係数に現れるというわけではないから，動機としてはやや弱いかも知れない）：

$$H(\chi_1,\chi_2;x) := \sum_{\substack{u \bmod p \\ u\not\equiv 0,1 \bmod p}} \chi_1(u)\chi_2(1-u)\zeta^{ux}, \qquad (\zeta = e^{2\pi i/p}).$$

これは, $\chi_2$ が単位指標ならば Gauss 和であるし, $x=0$ のときは Jacobi 和であるから, "Gauss-Jacobi 和" とでも呼ぶべきものである．このようなものが数論的にどれだけ面白いものかよく分からないが, 例えば $\chi = \left(\frac{*}{p}\right)$ (Legendre 記号) の場合に $F(\chi,\chi;x)$ のノルムを数値計算してみると次のようになる.

$$GJ(p) := \prod_{x=1}^{p-1} H(\chi,\chi;x)$$

とおく．いくつかの $GJ(p)$ についてその素因数分解と, 素因子の法 $p$ での値を表にしておく.

$$\begin{aligned}
&GJ(11) = 23^2, && 23 \equiv 1 \pmod{11},\\
&GJ(13) = 53^2, && 53 \equiv 1 \pmod{13},\\
&GJ(17) = 6733^2, && 6733 \equiv 1 \pmod{17},\\
&GJ(19) = 33023^2, && 33023 \equiv 1 \pmod{19},\\
&GJ(23) = 47^4, && 47 \equiv 1 \pmod{23},\\
&GJ(29) = 792725789^2, && 792725789 \equiv 1 \pmod{29},\\
&GJ(31) = 20065307^2, && 20065307 \equiv -1 \pmod{31},\\
&GJ(37) = 1481^2 \cdot 247901^2, && 1481 \equiv 1,\ 247901 \equiv 1 \pmod{37},\\
&GJ(41) = 163^2 \cdot 22529418493^2, && 163 \equiv -1,\ 22529418493 \equiv 1 \pmod{41},\\
&GJ(43) = 3381251598559^2, && 3381251598559 \equiv 1 \pmod{43},\\
&GJ(47) = 941^2 \cdot 2819^2 \cdot 3470009^2, && 941 \equiv 1,\ 2819 \equiv -1,\ 3470009 \equiv -1 \pmod{47},\\
&GJ(53) = 4133^2 \cdot 36781^2 \cdot 11809249^2, && 4133 \equiv -1,\ 36781 \equiv -1,\ 11809249 \equiv 1 \pmod{53},\\
&GJ(59) = 245108102289708272689^2, && 245108102289708272689 \equiv 1 \pmod{59}.
\end{aligned}$$

ここから読み取れること (例えば, なぜ $GJ(43)$ や $GJ(59)$ はかくも大きな素数の平方なのか?) は何か面白い現象の存在を示唆しているのであろうか. 少くとも色々と数値実験をするのは面白いかもしれない.

九州大学の松尾弘法君が 2008 年度修士論文の研究にこの Gauss-Jacobi 和を取り上げ, Kloosterman 和との関係など，いくつか興味深いことを見つけた．以下にその内容を採録する．

奇素数 $p$ を以後固定する．法 $p$ のディリクレ指標 $\chi$ とは，$\mathbf{Z}$ から $\mathbf{C}$ への写像で，乗法群 $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ の指標 $\widetilde{\chi}$ の持ち上げになっているもの，すなわち $\chi$ は $\chi(a) = \widetilde{\chi}(a \bmod p)$, $\forall a \in \mathbf{Z}$ をみたす．$\widetilde{\chi}$ が単位指標でなければ $p \mid a$ のとき $\chi(a) = 0$ とおき，$\widetilde{\chi}$ が単位指標ならば任意

の $a \in \mathbf{Z}$ にたいし $\chi(a) = 1$ とおく．このときの（正確には法 1 の）単位ディリクレ指標を $\varepsilon$ とかく．

ディリクレ指標 $\chi$ と $t \in \mathbf{Z}$ に対し，ガウス和 $G(\chi; t)$ を

$$G(\chi; t) := \sum_{u=0}^{p-1} \chi(u) e_p(tu)$$

で定義する．ここに $e_p(a) = e^{2\pi i a/p}$ で，値は $a \bmod p$ にしかよらないから，しばしば $a$ を $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ の元として同じ記号を使う．$G(\chi; 1)$ をとくに $G(\chi)$ と書くことにする．$\chi$ が自明でないディリクレ指標のとき，

$$G(\chi; t) = \sum_{u=0}^{p-1} \chi(u) e_p(tu) = \sum_{u=0}^{p-1} \overline{\chi}(t)\chi(tu) e_p(tu) = \overline{\chi}(t) G(\chi)$$

（$\overline{\chi}$ は $\chi$ の複素共役）であり，これより（$\chi$ を $\overline{\chi}$ に変えて）

$$\chi(t) = G(\overline{\chi})^{-1} \sum_{u=0}^{p-1} \overline{\chi}(u) e_p(tu) \tag{79}$$

を得る．これは以後よく使う等式である．また，二つのディリクレ指標 $\chi_1, \chi_2$ に対して定義されるヤコビ和

$$J(\chi_1, \chi_2) := \sum_{u=0}^{p-1} \chi_1(u) \chi_2(1-u)$$

も思い出しておく．

**定義 2.6.1 (Gauss-Jacobi sum)** 任意のディリクレ指標 $\chi_1$, $\chi_2$ と $t \in \mathbf{Z}$ (又は $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$) に対し「ガウスーヤコビ和」$H(\chi_1, \chi_2; t)$ を

$$H(\chi_1, \chi_2; t) := \sum_{u=0}^{p-1} \chi_1(u) \chi_2(1-u) e_p(tu)$$

と定義する．

はじめに述べたようにこれはガウス和，ヤコビ和を同時に一般化した指標和である．まず基本的なこととして次が成り立つ．

**命題 2.6.2** 以下が成り立つ．

(1) $H(\chi, \varepsilon; t) = G(\chi; t)$. 特に，$t \neq 0$ ならば $H(\varepsilon, \varepsilon; t) = 0$ で，$H(\varepsilon, \varepsilon; 0) = p$.

(2) $H(\varepsilon, \chi; t) = e_p(t) G(\chi; -t)$.

(3) $H(\chi_1, \chi_2; 0) = J(\chi_1, \chi_2)$.

(4) $H(\chi_2, \chi_1; t) = e_p(t) H(\chi_1, \chi_2; -t)$.

(5) $\chi_1$ および $\chi_2$ がともに非自明であるとすると

$$H(\chi_1, \chi_2; t) = \frac{G(\chi_1)}{G(\overline{\chi_2})} \sum_{u=0}^{p-1} \overline{\chi_1}(t-u) \overline{\chi_2}(u) e_p(u).$$

**証明)**　(1) これは定義から明らか．$\varepsilon$ については $\varepsilon(0)=1$ であることに注意．
(2) 定義において $u$ を $1-u$ におきかえると，

$$H(\varepsilon,\chi;t)=\sum_{u=0}^{p-1}\chi(u)e_p(t(1-u))=e_p(t)\sum_{u=0}^{p-1}\chi(u)e_p(-tu)=e_p(t)G(\chi;-t).$$

(3) これも定義からすぐ．
(4) 定義において $u$ を $1-u$ におきかえる．

$$\begin{aligned}H(\chi_2,\chi_1;t)&=\sum_{u=0}^{p-1}\chi_2(u)\chi_1(1-u)e_p(tu)=\sum_{u=0}^{p-1}\chi_1(u)\chi_2(1-u)e_p(t(1-u))\\&=e_p(t)H(\chi_1,\chi_2;-t).\end{aligned}$$

(5) 式 (79) より

$$\chi_2(1-u)=G(\overline{\chi_2})^{-1}\sum_{v=0}^{p-1}\overline{\chi_2}(v)e_p((1-u)v).$$

これを定義に代入して

$$\begin{aligned}H(\chi_1,\chi_2;t)&=\sum_{u=0}^{p-1}\chi_1(u)G(\overline{\chi_2})^{-1}\sum_{v=0}^{p-1}\overline{\chi_2}(v)e_p((1-u)v))e_p(tu)\\&=G(\overline{\chi_2})^{-1}\sum_{v=0}^{p-1}\overline{\chi_2}(v)e_p(v)\sum_{u=0}^{p-1}\chi_1(u)e_p((t-v)u)\\&=G(\overline{\chi_2})^{-1}\sum_{v=0}^{p-1}\overline{\chi_2}(v)e_p(v)\overline{\chi_1}(t-v)G(\chi_1)\\&=\frac{G(\chi_1)}{G(\overline{\chi_2})}\sum_{v=0}^{p-1}\overline{\chi_1}(t-v)\overline{\chi_2}(v)e_p(v).\end{aligned}$$

∎

ガウス－ヤコビ和は実は（「半分の」）クルースターマン（Kloosterman）和も一般化していることを示す．クルースターマン和は次で定義される．

**定義 2.6.3** 法 $p$ のディリクレ指標 $\chi$ と $a,\, b\in\mathbf{Z}$ に対し,（一般）クルースターマン和 $K(\chi;a,b)$ は

$$K(\chi;a,b):=\sum_{u=1}^{p-1}\chi(u)e_p(au+bu^{-1})$$

で定義される．ここに，$u^{-1}$ は $uu^{-1}\equiv 1 \pmod p$ を満たすような整数を意味するものとする（取り方には依存しない）．

単位指標に対する $K(\varepsilon;a,b)$ を特に $K(a,b)$ と書く．これが一番古典的なクルースターマン和である．

**定理 2.6.4** 法 $p$ に関する任意の非自明なディリクレ指標 $\chi$ と任意の $t\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ に対し

$$H(\chi,\chi;t)=\chi(-1)e_p(2^{-1}t)\frac{G(\chi)}{G(\psi)}K(\overline{\chi}\psi;4^{-1},4^{-1}t^2) \tag{80}$$

が成り立つ．ここに $\psi$ はルジャンドル指標（位数 2 の唯一の非自明指標）を表すとする．$2^{-1}$ や $4^{-1}$ は $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ の元と見る．

特に，$\chi=\psi$ のときは

$$H(\psi,\psi;t)=\psi(-1)e_p(2^{-1}t)K(4^{-1},4^{-1}t^2)$$

が成り立つ．

**注意 2.6.5** 定理より，$\chi\neq\psi$ で $ab\in(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{\times 2}$ のときのクルースターマン和 $K(\chi;a,b)$ はガウス－ヤコビ和で書き表されることが分かる．実際，すぐに分かる式

$$K(\chi;a,b)=\chi(b)K(\chi;ab,1)$$

より，$t$ を $4^{-2}t^2\equiv ab \pmod p$ なるように取れば，$K(\chi;a,b)$ は式 (80) の右辺に現れる．とくに，古典的なクルースターマン和 $K(a,b)$ で $ab$ が法 $p$ の平方 $ab\equiv m^2 \pmod p$ であるものは

$$K(a,b)=\psi(-1)e_p(-2m)H(\psi,\psi;4m)$$

と書かれる．すなわち，ガウス－ヤコビ和はこのようなクルースターマン和も特別な場合として含む．

**証明)** まず，Salié [Sa, (51,52)] で $\chi=\varepsilon$ の場合が，Davenport [Da, Theorem 5] で一般の場合が証明された，次の補題を用意する．便宜のため証明をつける．

**補題 2.6.6** $\chi$ をルジャンドル指標 $\psi$ とは異なるディリクレ指標とする．このとき一般クルースターマン和 $K(\chi;a,b)$ $(ab\neq 0)$ は

$$K(\chi;a,b)=\chi(b)\frac{G(\psi)}{G(\overline{\chi}\psi)}\sum_{u=0}^{p-1}\overline{\chi}\psi(u^2-ab)e_p(2u)$$

と書かれる．

**証明)** まず $\chi=\varepsilon$ とする．与えられた $u\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ に対し，$av+bv^{-1}\equiv 2u \pmod p$ の解 $v$ の個数は，これが $(av-u)^2\equiv u^2-ab \pmod p$ と同値であることに注意すると $\psi(u^2-ab)+1$ である．したがって

$$K(a,b)=\sum_{v=1}^{p-1}e_p(av+bv^{-1})=\sum_{u=0}^{p-1}e_p(2u)(\psi(u^2-ab)+1)$$

$$=\sum_{u=0}^{p-1}\psi(u^2-ab)e_p(2u) \tag{81}$$

となり，これが $\chi=\varepsilon$ の場合の求める式である．次に $\chi\neq\varepsilon$ とする．式 (79) である

$$\chi(u)=G(\overline{\chi})^{-1}\sum_{t=1}^{p-1}\overline{\chi}(t)e_p(ut)$$

を $K(\chi;a,b)$ の定義に代入し，今証明した等式 (81) をつかうと，

$$\begin{aligned}
K(\chi;a,b) &= G(\overline{\chi})^{-1}\sum_{t=1}^{p-1}\overline{\chi}(t)\sum_{u=1}^{p-1}e_p((t+a)u+bu^{-1}) \\
&= G(\overline{\chi})^{-1}\sum_{t=1}^{p-1}\overline{\chi}(t)K(t+a,b) \\
&= G(\overline{\chi})^{-1}\sum_{t=1}^{p-1}\overline{\chi}(t)\sum_{u=0}^{p-1}\psi(u^2-(t+a)b)e_p(2u) \\
&= G(\overline{\chi})^{-1}\sum_{u=0}^{p-1}e_p(2u)\sum_{t=1}^{p-1}\overline{\chi}(t)\psi(u^2-ab-tb) \\
&= G(\overline{\chi})^{-1}\chi(b)\sum_{u=0}^{p-1}e_p(2u)\sum_{t=1}^{p-1}\overline{\chi}(t)\psi(u^2-ab-t)
\end{aligned}$$

となる．$u^2-ab=0$ のとき，$\chi\neq\psi$ という仮定から $\overline{\chi}\psi$ が非自明なので，内側の $t$ に関する和は消える．$u^2-ab\neq 0$ のときは $t$ を $(u^2-ab)t$ におきかえて

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{p-1}\overline{\chi}(t)\psi(u^2-ab-t) &= \overline{\chi}\psi(u^2-ab)\sum_{t=1}^{p-1}\overline{\chi}(t)\psi(1-t) = \overline{\chi}\psi(u^2-ab)J(\overline{\chi},\psi) \\
&= \overline{\chi}\psi(u^2-ab)\frac{G(\overline{\chi})G(\psi)}{G(\overline{\chi}\psi)}.
\end{aligned}$$

（ここでヤコビ和とガウス和の間のスタンダードな関係を使った (*cf.* [BEW], [IR]).）この式は $u^2-ab=0$ でも成り立ち（$\overline{\chi}\psi$ が非自明なので）従って

$$K(\chi;a,b)=\chi(b)\frac{G(\psi)}{G(\overline{\chi}\psi)}\sum_{u=0}^{p-1}e_p(2u)\overline{\chi}\psi(u^2-ab)$$

を得る． ∎

定理の証明であるが，まず

$$\begin{aligned}
H(\chi,\chi;t) &= \sum_{u=0}^{p-1}\chi(u)\chi(1-u)e_p(tu) = \sum_{u=0}^{p-1}\chi(u-u^2)e_p(tu) \\
&= \chi(-1)\sum_{u=0}^{p-1}\chi((u-2^{-1})^2-4^{-1})e_p(tu) \\
&= \chi(-1)\sum_{u=0}^{p-1}\chi(u^2-4^{-1})e_p(t(u+2^{-1})) \quad (u\to u+2^{-1}) \\
&= \chi(-1)\sum_{u=0}^{p-1}\chi(4u^2-4^{-1})e_p(t(2u+2^{-1})) \quad (u\to 2u) \\
&= \chi(-4)e_p(2^{-1}t)\sum_{u=0}^{p-1}\chi(u^2-16^{-1})e_p(2tu) \\
&= \chi(-4t^{-2})e_p(2^{-1}t)\sum_{u=0}^{p-1}\chi(u^2-16^{-1}t^2)e_p(2u) \quad (u\to t^{-1}u). \qquad (82)
\end{aligned}$$

仮定 $\chi \neq \varepsilon$ より，補題 2.6.6 を $\chi$ を $\overline{\chi}\psi$ に変えて適用すると

$$\sum_{u=0}^{p-1} \chi(u^2 - ab)e_p(2u) = \chi\psi(b)\frac{G(\chi)}{G(\psi)}K(\overline{\chi}\psi; a, b)$$

を得る．これの $a = 4^{-1}$, $b = 4^{-1}t^2$ としたものを (82) に代入して

$$H(\chi, \chi; t) = \chi(-1)e_p(2^{-1}t)\frac{G(\chi)}{G(\psi)}K(\overline{\chi}\psi; 4^{-1}, 4^{-1}t^2)$$

を得る． ∎

ガウスーヤコビ和の一般化として，ヤコビ和で行うように指標を増やすことが考えられる．しかし実はこうやっても本質的には一般化にならないことを示す．

**定義 2.6.7 (一般ガウスーヤコビ和)** ディリクレ指標 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n$ と $t \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, 及び $1 \leq k < n$ なる整数 $k$ に対し，一般ガウスーヤコビ和を

$$H(\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n; k; t) = \sum_{\substack{u_1+u_2+\cdots+u_n \equiv 1 \bmod p \\ 0 \leq u_1, u_2, \ldots, u_n \leq p-1}} \chi_1(u_1)\chi_2(u_2)\cdots\chi_n(u_n)e_p((u_1 + u_2 + \cdots + u_k)t)$$

で定義する．

**命題 2.6.8** それぞれの指標 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n$，および積 $\theta_1 := \chi_1\chi_2\cdots\chi_k$ と $\theta_2 := \chi_{k+1}\chi_{k+2}\cdots\chi_n$ がすべて非自明であると仮定する．このとき

$$H(\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n; k; t) = \frac{G(\chi_1)G(\chi_2)\cdots G(\chi_n)}{G(\theta_1)G(\theta_2)}H(\theta_1, \theta_2; t)$$

が成り立つ．

**注意 2.6.9** 右辺は一般ヤコビ和を用いて

$$J(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k)J(\chi_{k+1}, \chi_{k+2}, \ldots, \chi_n)H(\theta_1, \theta_2; t)$$

とも書ける．

**証明)** まず,

$$\begin{aligned}
H(\chi_1, \ldots, \chi_n; k; t) &= \sum_{u_1+\ldots+u_n=1} \chi_1(u_1)\ldots\chi_n(u_n)e_p((u_1 + \ldots + u_k)t) \\
&= \sum_{0 \leq u_1, \ldots, u_{n-1} \leq p-1} \chi_1(u_1)\ldots\chi_{n-1}(u_{n-1})\chi_n(1 - u_1 - \ldots - u_{n-1})e_p((u_1 + \ldots + u_k)t)
\end{aligned}$$

である．ここで式 (79) を用いて $\chi_n(1 - u_1 - \ldots - u_{n-1})$ を $G(\overline{\chi_n})^{-1}\sum_{u=1}^{p-1}\overline{\chi_n}(u)e_p((1 - u_1 -$

$\ldots - u_{n-1})u)$ で置き換えると

$$\begin{aligned}
&H(\chi_1, \ldots, \chi_n; k; t) \\
&= G(\overline{\chi_n})^{-1} \sum_{u=1}^{p-1} \overline{\chi_n}(u) \sum_{u_1=0}^{p-1} \cdots \sum_{u_{n-1}=0}^{p-1} \chi_1(u_1) \ldots \chi_{n-1}(u_{n-1}) \\
&\times e_p(u + (t-u)(u_1 + \ldots + u_k) - u(u_{k+1} + \ldots u_{n-1})) \\
&= G(\overline{\chi_n})^{-1} \sum_{u=1}^{p-1} \overline{\chi_n}(u) e_p(u) \prod_{l=1}^{k} \sum_{u_l=0}^{p-1} \chi_l(u_l) e_p((t-u)u_l) \prod_{m=k+1}^{n-1} \sum_{u_m=0}^{p-1} \chi_m(u_m) e_p(-uu_m) \\
&= \frac{G(\chi_1) \ldots G(\chi_{n-1})}{G(\overline{\chi_n})} \sum_{u=1}^{p-1} \overline{\chi_n}(u) \overline{\chi_1 \cdots \chi_k}(t-u) \overline{\chi_{k+1} \cdots \chi_{n-1}}(-u) e_p(u) \\
&= \chi_n(-1) \frac{G(\chi_1) \ldots G(\chi_{n-1})}{G(\overline{\chi_n})} \sum_{u=1}^{p-1} \overline{\theta_1}(t-u) \overline{\theta_2}(-u) e_p(u)
\end{aligned}$$

となる．命題 2.6.2 (5) より，最後の和は $\theta_2(-1)G(\theta_1)^{-1}G(\overline{\theta_2})H(\theta_1, \theta_2; t)$ に等しい．このことと $G(\chi_n)G(\overline{\chi_n}) = \chi_n(-1)p$，および $G(\theta_2)G(\overline{\theta_2}) = \theta_2(-1)p$ により命題が証明された． ∎

今後の問題として二つのことをあげておく．

**1) 佐藤-Tate 型分布**

楕円曲線のフロベニウス固有値の分布に関する佐藤-Tate 予想が R. Taylor らによって解決されて話題を呼んだが，クルースターマン和の絶対値についての「水平型」分布については Katz [Kat] の仕事以来知られている．(一般クルースターマン和については [Fi] 参照.）これはすなわち $p$ を固定したときの $\cos\theta = K(a,b)/2\sqrt{p}$ を満たす偏角 $\theta$ の，$a, b$ を動かすときの分布である．これに対して「垂直型」，つまり $a, b \in \mathbf{Z}$ を固定して素数 $p$ を動かすときの分布（佐藤-Tate 予想の類似）の方は難しく，今も未解決である．

これらの分布の問題は当然ガウスーヤコビ和についても考えることが出来る.（絶対値が $2\sqrt{p}$ で押さえられるという Weil 型の評価は古典的な Weil による方法で証明がされる.）まだ十分な実験を行ってはいないが，佐藤-Tate 型の分布に従う様が観察されるようである．

ガウスーヤコビ和は一般には実数ではないが，その偏角は少なくとも符号を除いて，以下のようにガウス和の偏角により決定される．

**命題 2.6.10** $\chi_1$ および $\chi_2$ を法 $p$ の非自明なディリクレ指標とし，$t \in \mathbf{Z}$ とする．このとき $H(\chi_1, \chi_2; t)^2$ の偏角は $e_p(t)G(\chi_1; t)G(\chi_2; -t)$ の偏角に等しい．

**証明)**　命題 2.6.2 (5) より

$$\begin{aligned}
\overline{H(\chi_1,\chi_2;t)} &= \frac{\overline{G(\chi_1)}}{\chi_2(-1)G(\chi_2)}\sum_{u=0}^{p-1}\chi_1(t-u)\chi_2(u)e_p(-u) \quad (\overline{G(\overline{\chi_2})}=\chi_2(-1)G(\chi_2))\\
&= \frac{\overline{G(\chi_1)}}{\chi_2(-1)G(\chi_2)}\chi_1(t)\chi_2(t)\sum_{u=0}^{p-1}\chi_1(1-u)\chi_2(u)e_p(-tu) \quad (u\to tu)\\
&= \frac{\overline{G(\chi_1;t)}}{\chi_2(-1)G(\chi_2;t)}H(\chi_2,\chi_1;-t)\\
&= \frac{\overline{G(\chi_1;t)}}{G(\chi_2;-t)}e_p(-t)H(\chi_1,\chi_2;t) \quad (\text{命題 } 2.6.2(4)).
\end{aligned}$$

これから

$$H(\chi_1,\chi_2;t)\overline{H(\chi_1,\chi_2;t)}^{-1} = \frac{e_p(t)G(\chi_1;t)G(\chi_2;-t)}{p}$$

となり，命題が従う． ∎

**注意 2.6.11** ヤコビ和の合同を使うと $H(\chi_1,\chi_2;t)\neq 0$ であることが証明出来る．ここでは割愛する．

## 2) ノルム

ガウスーヤコビ和 $H(\chi_1,\chi_2;t)$ は円分体 $F=\mathbf{Q}(e^{2\pi i/p(p-1)})$ の整数で，その（絶対）ノルムは有理整数である．これを $N(\chi_1,\chi_2;t)$ と書く．

今 $p$ の上にある $F$ の素イデアルを $\wp$ とすると，

$$H(\chi_1,\chi_2;t)\equiv J(\chi_1,\chi_2) \pmod{\wp}$$

が成り立つ．これと $J(\chi,\overline{\chi})=-\chi(-1)$ より，非自明な $\chi$ と任意の $t\in(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ にたいし

$$N(\chi,\overline{\chi};t)\equiv 1 \pmod{p}$$

が成り立つ．

積 $\chi_1\chi_2$ が非自明のとき，ヤコビ和のある合同式を使って上と同様の議論を行うと $N(\chi_1,\chi_2;t)$ は $p$ で割れることが分かる．

数値実験を行うと，$N(\chi_1,\chi_2;t)$ を割り切る $p$ の冪にはある規則が見られる．たとえば $\chi_1$ と $\chi_2$ の位数がそれぞれ 2 および奇素数 $q$ (これは $p-1$ の約数) とすると，

$$N(\chi_1,\chi_2;t) \text{ に含まれる } p \text{ の冪は } \left(\frac{q-1}{2}\right)^2\cdot\frac{p-1}{2q} \text{ に等しい．}$$

他に観察されることとして，$N(\chi_1,\chi_2;t)$ は平方数で，その素因子はしばしば非常に大きな素数のみである．そうして，非常にしばしば，$p$ 以外の各素因子は $p$ および $\chi_i$ の位数を法として $\pm1$ である．これらはまだ観察（せいぜい $p<100$ 程度）に留まり証明はない．

# 3 付録：ダイガンマ関数

$\psi(x)$ をいわゆる digamma 関数，つまりガンマ関数の対数微分とする．

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

§1.4.5 で見たように，$\psi(x)$ の 1 の周りでのテイラー展開と，無限遠での漸近展開は極めて似た形で記述される．まず 1 におけるテイラー展開であるが，これは $\gamma$ をオイラー定数として，

$$\psi(1+x) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n) x^{n-1} \quad (|x| < 1)$$

である．ここで $\gamma$ は "$\zeta(1)$" を正規化した値だと思ってこれを

$$\psi(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \zeta(n) x^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta(1+n) x^n \quad (|x| < 1) \tag{83}$$

と書く．一方，$x \to \infty$ における漸近展開を $\zeta(s)$ の負の整数点での値を使って書くと，

$$\psi(1+x) \sim \log x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(1-n)}{x^n} \quad (x \to \infty)$$

となり，調和級数 $\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n}$ が $\log x$ の大きさで発散することから便宜上 $\zeta(1)$ で $\log x$ を表すことにすれば，この式は

$$\psi(1+x) \sim \sum_{n=0}^{-\infty} (-1)^n \zeta(1+n) x^n \quad (x \to \infty) \tag{84}$$

とも書くことが出来る（$n$ は 0 から負の整数をわたる）．

$\Gamma(1+x)$ の Weierstrass 無限積から

$$\psi(1+x) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right)$$

であるから，$1/(n+x)$ を $x$ が小，大のときにそれぞれ展開すれば，形式的には (83) と (84) が類似の形をとることは見て取れるが，この両式はやはり面白い．$\psi(x)$ はリーマンゼータ関数の整数点（正，負とも）を一身に体した母関数なのである．

次に，$\psi(x)$ の有理数点での値から二次体（実，虚とも) の類数（実二次体のときは類数×単数基準）が紡ぎ出される様を見よう[‡] まず記号を用意する．

$D$ を二次体の基本判別式（正でも負でもよい，基本判別式でなくとも（導手つきでも）しかるべく定式化出来るはずだが面倒がってやってない)，$h_D^+$ を狭義の類数（$D < 0$ なら普通の類数 $h_D$)，$\varepsilon_D^+$ をノルムが 1 の基本単数，つまり，$D > 0$ でノルムが $-1$ の単数がなければ基本単数，あれば基本単数の二乗，また $D < 0$ のときは単数のノルムは皆 1 であるので，単数群の標準的な生成元すなわち $D = -3$ なら $e^{\pi i/3}$, $D = -4$ なら $i = \sqrt{-1}$, それ以外

[‡] もともとこの節の内容は，2006 年春に浅井哲也氏に送ったノートを元にしている．その後以下とほぼ同じ議論が [HKT] に出た．

の $D<-4$ のときは $-1$ を意味するものと約束する．これはまた，$w_D$ で単数群の位数を表すことにすれば，

$$\varepsilon_D^+ = e^{\frac{2\pi i}{w_D}} \qquad (D<0)$$

である．これの対数は「主値」をとるものとし，

$$\log \varepsilon_D^+ = \frac{2\pi i}{w_D}$$

と約束する．また $D<0$ のとき $\sqrt{D}=i\sqrt{|D|}$ とする． $\chi_D$ で当該の二次体に対応する Kronecker 指標，$L(s,\chi_D)$ をディリクレの $L$-関数とする．このとき解析的類数公式は

$$L(1,\chi_D) = \frac{1}{\sqrt{D}}\, h_D^+ \log \varepsilon_D^+ \tag{85}$$

と書くことが出来る．これは，余り注意されないが，上に書いた如くに記号を理解すれば，実，虚，どちらの二次体でも通用する統一的な公式である．

さて，二次体の類数公式に到達するには $L(1,\chi_D)$ を有限の形に書く必要がある．その際に $\psi(x)$ を経由し，$\psi(x)$ の有理数点での値に関するガウスの公式を用いる，というのがここで記したい方法である．まず，

$$L(1,\chi_D) = -\frac{1}{|D|}\sum_{m=1}^{|D|-1} \chi_D(m)\,\psi\big(\frac{m}{|D|}\big). \tag{86}$$

これは容易で，$\zeta(s;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^s}$ をフルヴィッツのゼータ関数とするとよくやる変形で

$$L(s,\chi_D) = \frac{1}{|D|^s}\sum_{m=1}^{|D|-1}\chi_D(m)\zeta(s;\frac{m}{|D|}).$$

これに

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s;x)-\frac{1}{s-1}\right) = -\psi(x)$$

（Whittaker-Watson 参照），および

$$\sum_{m=1}^{|D|-1}\chi_D(m)=0$$

を用いればよい．

(85)，(86) から，類数公式を $\psi(x)$ を使って書いた形

$$\sum_{m=1}^{|D|-1}\chi_D(m)\,\psi\big(\frac{m}{|D|}\big) = -\sqrt{D}\,h_D^+ \log\varepsilon_D^+$$

を得る．

さてここでガウスの公式を述べる（彼の有名な超幾何級数の論文 [Gau] 中にある）．

**Theorem (Gauss).** $m,n,\ (0<m<n)$ を自然数とするとき，

$$\psi\big(\frac{m}{n}\big) = -\gamma - \log n - \frac{\pi}{2}\cot\frac{m\pi}{n} + \sum_{l=1}^{n-1}\cos\frac{2ml\pi}{n}\log\big(2\sin\frac{l\pi}{n}\big).$$

面白いことに，この左辺は比 $m/n$ にしかよらないのに右辺は $m \to mr,\ n \to nr$ とすると見かけが変わる．勿論値は変わらないが，そのことを確かめるのはちょっとした演習問題である．

この公式で $n$ を $|D|$ として $\sum_{m=1}^{|D|-1} \chi_D(m)\,\psi\big(\frac{m}{|D|}\big)$ に代入して計算する． まず $D<0$ としよう．すると $\chi_D$ は奇指標であり，一方 $\cos$ は偶関数であるから，

$$\sum_{m=1}^{|D|-1} \chi_D(m) \cos\frac{2ml\pi}{|D|} = 0$$

となる．また $\sum_{m=1}^{|D|-1} \chi_D(m) = 0$ であるから，結局 $\cot$ の項だけが生き残って，

$$\sum_{m=1}^{|D|-1} \chi_D(m)\,\psi\big(\frac{m}{|D|}\big) = -\frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{|D|-1} \chi_D(m)\,\cot\frac{m\pi}{|D|}.$$

これと (85)，(86) を組み合わせれば

$$h_D = \frac{w_D}{4\sqrt{|D|}}\sum_{m=1}^{|D|-1} \chi_D(m)\,\cot\frac{m\pi}{|D|}.$$

次に $D>0$ のとき，今度は $\chi_D$ が偶指標で $\cot$ が奇関数なので，$\cos$ の方が生き残る． ガウス和

$$\sum_{m=1}^{D-1} \chi_D(m)\,\cos\frac{2ml\pi}{D} = \chi_D(l)\sqrt{D}$$

に注意すると，

$$\sum_{m=1}^{|D|-1} \chi_D(m)\,\psi\big(\frac{m}{|D|}\big) = \sqrt{D}\sum_{l=1}^{D-1} \chi_D(l)\log(2\sin\frac{l\pi}{D})$$

となり，(85)，(86) と併せて

$$h_D^+\,\log\varepsilon_D^+ = -\sum_{l=1}^{D-1} \chi_D(l)\log(2\sin\frac{l\pi}{D})$$

を得る．

$\psi(x)$ は他にも整数論的に面白い性質を内包していないであろうか？

# 4　おまけ：等号付き多重ゼータ値（by 若林徳子）

## 4.1　級数による定義といくつかの具体的な値

**定義 4.1.1 (等号付き多重ゼータ値, multiple zeta-star value)**　正の整数 $k_1, k_2, \ldots, k_n \geq 1$, ただし $k_1 \geq 2$，に対して, 等号付き多重ゼータ値 $\zeta^\star(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ を次の級数で定める :

$$\zeta^\star(k_1, k_2, \ldots, k_n) := \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}.$$

「通常の」多重ゼータ値とは，和をとる際に等号を許す点が異なっている．Euler が考えたのは $\zeta^\star(k_1, k_2)$ である．

ここで, 多重ゼータ値の場合と同様に, $k := k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ を等号付き多重ゼータ値 $\zeta^\star(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ の重さ (weight), $n$ を深さ (depth), $s := \sharp\{i | k_i \geq 2\}$ を高さ (height) という.

定義からも分かるように, §1.1 で定義した多重ゼータ値，上記の等号付多重ゼータ値は互いに他の線形和で書くことができる. 例えば,

$$\begin{aligned}
\zeta^\star(k_1, k_2) &= \zeta(k_1, k_2) + \zeta(k_1 + k_2), \\
\zeta(k_1, k_2) &= \zeta^\star(k_1, k_2) - \zeta^\star(k_1 + k_2), \\
\zeta^\star(k_1, k_2, k_3) &= \zeta(k_1, k_2, k_3) + \zeta(k_1 + k_2, k_3) + \zeta(k_1, k_2 + k_3) + \zeta(k_1 + k_2 + k_3), \\
\zeta(k_1, k_2, k_3) &= \zeta^\star(k_1, k_2, k_3) - \zeta^\star(k_1 + k_2, k_3) - \zeta^\star(k_1, k_2 + k_3) + \zeta^\star(k_1 + k_2 + k_3), \\
&\cdots
\end{aligned}$$

などである. $n = 1$ のときは Riemann ゼータ値となる. どちらの多重ゼータ値も, 殆どの場合, 無理性などの数としての性質は分かっていない. §1.1 で述べたように, 多重ゼータ値にはいくつか具体的な値が知られているものがある. これらの等号付き多重ゼータ値版に対応するものも具体的な値が知られている. 例えば,

- ⋆ (Hoffman[H1], Zlobin[Zl], 宗田 [Mu2])

$$\zeta^\star(\underbrace{2k, 2k, \ldots, 2k}_{n\ \text{個}}) = (\text{有理数}) \times \pi^{2kn},$$

- ⋆ (宗田 [Mu2])

$$\zeta^\star(\underbrace{3, 1, 3, 1, \ldots, 3, 1}_{2n\ \text{個}}) = (\text{有理数}) \times \pi^{4n},$$

- ⋆ (宗田 [Mu2])

$$\sum_{\substack{j_0 + j_1 + \cdots + j_{2n} = 1 \\ j_0, j_2, \ldots, j_{2n} \geq 0}} \zeta^\star(\{2\}^{j_0}, 3, \{2\}^{j_1}, 1, \{2\}^{j_2}, \ldots, 3, \{2\}^{j_{2n-1}}, 1, \{2\}^{j_{2n}}) = (\text{有理数}) \times \pi^{4n+2},$$

- ⋆ (今富-田中-田坂-若林 [ITTW]),

$$\sum_{\substack{j_0 + j_1 + \cdots + j_{2n} = 2 \\ j_0, j_2, \ldots, j_{2n} \geq 0}} \zeta^\star(\{2\}^{j_0}, 3, \{2\}^{j_1}, 1, \{2\}^{j_2}, \ldots, 3, \{2\}^{j_{2n-1}}, 1, \{2\}^{j_{2n}}) = (\text{有理数}) \times \pi^{4n+4},$$

などがある. また, 最後の式の一般化が最近, 近藤宏樹, 斎藤新悟, 田中立志の共同研究によって得られている.

## 4.2 いろいろな関係式

この節では, §1.3 で紹介した和公式の等号付き多重ゼータ値版を紹介し, 和公式を細分化する関係式として知られている巡回和公式を紹介する. また, §1.2 で紹介した双対性の等号付き多重ゼータ値版に相当する類似物を紹介する.

**和公式 (sum formula)**. 重さ $k$, 深さ $n$ $(1 \le n < k)$ を固定して, その重さ, 深さを持つ等号付き多重ゼータ値すべての和をとると Riemann ゼータ値の整数倍となる:

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=k \\ \forall k_i \ge 1, k_1 \ge 2}} \zeta^\star(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \binom{k-1}{n-1}\zeta(k).$$

多重ゼータ値の和公式は, Moen と Hoffman によって予想され, Granville と Zagier によって独立に証明されたが, それよりも以前に Hoffman によって多重ゼータ値の和公式と等号付き多重ゼータ値の和公式が互いに同値であることが証明されていた. そのことから, Granville と Zagier の証明によってこの等号付き多重ゼータ値の和公式も証明されたことになる. これらの和公式を均等に細分化した関係式が巡回和公式である.

**多重ゼータ値の巡回和公式 (cyclic sum formula for multiple zeta value)** (Hoffman-Ohno [HO]). ある番号 $q$ に対して $k_q > 1$ である $k_1, k_2, \ldots, k_n \ge 1$ に対して,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k_j-1} \zeta(k_j - i + 1, k_{j+1}, \ldots, k_n, k_1, \ldots, k_{j-1}, i) = \sum_{j=1}^{n} \zeta(k_j + 1, k_{j+1}, \ldots, k_n, k_1, \ldots, k_{j-1}).$$

**等号付き多重ゼータ値の巡回和公式 (cyclic sum formula for multiple zeta-star value)** (Ohno-Wakabayashi [OW]). ある番号 $q$ に対して $k_q > 1$ である $k_1, k_2, \ldots, k_n \ge 1$ に対して,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k_j-1} \zeta^\star(k_j - i + 1, k_{j+1}, \ldots, k_n, k_1, \ldots, k_{j-1}, i) = k\zeta(k+1),$$

ここで, $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ である. また左辺内側の和はともに, $k_j = 1$ のときは $0$ とする.
(**注意**: [HO] や [OW] とは表記が異なるが同じことを意味している.)

どちらの巡回和公式も, 多重ゼータ値あるいは等号付き多重ゼータ値の級数表示と部分分数分解を用いて直接計算するという証明方法である. この 2 つの巡回和公式が同値であることは自明ではないが, 井原-梶川-大野-奥田 [IKOO] により直接計算により, 田中-若林 [TW] では川島の関係式 [Kaw] と呼ばれる多重ゼータ値間の関係式族に帰着させることにより代数的に証明されている.

双対性と呼ばれる関係式については §1.2 で紹介した. 等号付き多重ゼータ値には多重ゼータ値の双対性に対応する関係式が存在しないと思われていた. しかし, リーマンゼータ値で生成される代数を法とすれば, 等号付き多重ゼータ値にもある種の双対性と思える関係式が

存在することが金子 [K] によって予想され, 金子-大野 [KO] によって証明された.

**等号付き多重ゼータ値の「双対性」 (“duality” for multiple zeta-star value)** (金子 [K], 金子-大野 [KO]). 自然数 $m,\ n \geq 2$ に対し,

$$\zeta^\star(n, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-1}) - (-1)^{n+m}\zeta^\star(m, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}) \in \mathbf{Q}[\zeta(2), \zeta(3), \zeta(5), \ldots] \tag{87}$$

が成り立つ.

これは, 適当なインデックスの組で等号付き多重ゼータ値の和をとることにより, Riemann ゼータ値の多項式で書けるというものである. 通常の多重ゼータ値の高さ 1 における双対性は

$$\zeta(n+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-1}) = \zeta(m+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1})$$

と表されるため, (87) は高さ 1 における等号付き多重ゼータ値の双対性とみなせる関係式である. 金子-大野 [KO] では, 以下で述べる 4 つの既存の関係式を組み合わせることで証明されている. 荒川-金子のゼータ関数 [AK1]

$$\xi_k(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} Li_k(1 - e^{-t}) \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

について知られている以下の関係式を用いる. 荒川-金子のゼータ関数は次のような多重ゼータ関数（のひとつのインデックスのみ変数にしたもの）の和で表わされるということが知られている.

**Arakawa-Kaneko**([AK1]). 任意の正の整数 $k$ に対して,

$$\begin{aligned}\xi_k(s) =& (-1)^{k-1} \left\{ \sum_{i=0}^{k-2} \zeta(s, \underbrace{1, \ldots, 1}_{i}, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-2-i}) + s\zeta(s+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-1}) \right\} \\ &+ \sum_{j=1}^{k-2} (-1)^j \zeta(k-j) \zeta(s, \underbrace{1, \ldots, 1}_{j})\end{aligned}$$

が成り立つ.

また, 荒川-金子のゼータ関数の正整数点での値が高さ 1 の等号付き多重ゼータ値で表わされるという関係式も知られている.

**大野**([O]). 任意の整数 $k \geq 2,\ n \geq 1$ に対し

$$\xi_{k-1}(n) = \zeta^\star(k, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1})$$

となる.

これら2つの関係式を組み合わせると, (87) の左辺を多重ゼータ値を用いて表す式を得るが, そこに §1.3 で紹介した大野関係式 [O] を用いるとそれが高さ1の多重ゼータ値で現されることが分かる．そこで, §1.4.5 の定理 1.4.16 から従う，高さ1の多重ゼータ値に関する結果

$$\zeta(k,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}) \in \mathbf{Q}[\zeta(2),\zeta(3),\zeta(5),\ldots]$$

を用いれば (87) が証明される．また, 次の節で述べるある (等号付き) 多重ゼータ値を係数とする母関数を用いた別証明も山崎 [Y] によって知られている．

## 4.3 多重ゼータ値および等号付き多重ゼータ値のある和の母関数

この節では, 大野-Zagier[OZ] および青木-昆布-大野 [AKO] により得られた，多重ゼータ値及び等号付き多重ゼータ値のある和の母関数について紹介する．

任意の整数 $k,n,s,(k,n,s\geq 0)$ に対し, インデックスの集合 $I, I_0$ を

$$I(k,n,s)=\{\text{ 重さ } k, \text{深さ } n, \text{高さ } s \text{ のインデックス } \mathbf{k} \text{ の集合 }\},$$

$$I_0(k,n,s)=\{\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)\mid \mathbf{k}\in I(k,n,s), k_1\geq 2\},$$

と定義する．

大野-Zagier[OZ] では, 重さ, 深さ, 高さを固定した多重ゼータ値の和の母関数が以下のようにGauss の超幾何関数の1での特殊値を用いて表され, さらにそれが，Riemann ゼータ値の有理数係数多項式を係数とする表示をもつことが示されている．

**大野-Zagier**([OZ])

$$\begin{aligned}\sum_{k,n,s\geq 0}\left(\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,n,s)}\zeta(\mathbf{k})\right)x^{k-n-s}y^{n-s}z^{s-1} &= \frac{1}{xy-z}\left(1-{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha-x,\beta-x\\1-x\end{matrix};1\right)\right)\\ &= \frac{1}{xy-z}\left\{1-\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)}{n}(x^n+y^n-\alpha^n-\beta^n)\right)\right\},\end{aligned} \tag{88}$$

ただし, $\alpha,\beta$ は $\alpha+\beta=x+y$, $\alpha\beta=z$ とする．

§1.3 でも述べたように, (88) を特殊化することにより Le-Murakami の関係式 [LM1] を導くことができる．実際, 大野-Zagier[OZ] では, $y=-x$ で (88) を特殊化し, Euler の公式 (1) を用いることで得られている．大野-Zagier[OZ] までは, Le-Murakami の関係式 [LM1] は結び目の不変量の方面からしか得られていなかった．(88) を特殊化することで様々な関係式が得られている．$z=xy$ とすると和公式が得られ, $z=0$ で特殊化すると,

$$\sum_{a,b>0}\zeta(a+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{b-1})x^{b-1}y^{a-1}=\frac{1}{xy}\left(1-\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty}\zeta(n)\frac{x^n+y^n-(x+y)^n}{n}\right)\right)$$

となり, これは定理 1.4.16 で紹介した Aomoto[Ao], Drinfel'd[Dr], Zagier の結果である. また, $x=y=0$ とすると $\zeta(\underbrace{2,\ldots,2}_{n})=\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$ を得ることもできる.

大野-Zagier[OZ] の等号付き多重ゼータ値版に対応する母関数の研究も青木-昆布-大野 [AKO] によってなされている.

**青木-昆布-大野**([AKO]).

(89)

$$\sum_{k,n,s\geq 0}\left(\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,n,s)}\zeta^{\star}(\mathbf{k})\right)x^{k-n-s}y^{n-s}z^{2s-2}=\frac{1}{(1-x)(1-y)-z^2}\ {}_3F_2\left({1-x,1,1 \atop 2-\alpha,2-\beta};1\right),$$

ここで, $\alpha,\beta$ は $\alpha+\beta=x+y$, $\alpha\beta=xy-z^2$ であり, ${}_3F_2\left({a_1,a_2,a_3 \atop b_1,b_2};t\right)$ は

$${}_3F_2\left({a_1,a_2,a_3 \atop b_1,b_2};t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n(a_3)_n}{(b_1)_n(b_2)_n}\frac{t^n}{n!}$$

で定義される一般超幾何関数である.

つまり, 重さ, 深さ, 高さを固定した等号付き多重ゼータ値の和を係数とする母関数が, 一般超幾何関数の 1 での特殊値を用いて表されるというものである. (89) をさらに特殊化することにより, 様々な関係式を導くこともできる. 例えば, $y=x$ とすると青木-大野 [AO] で得られている関係式

$$\sum_{\mathbf{k}\in\bigcup_n I_0(k,n,s)}\zeta^{\star}(\mathbf{k})=2\binom{k-1}{2s-1}(1-2^{1-k})\zeta(k)$$

が得られ, さらに $x=0$ とすると $\zeta^{\star}(\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n\text{ 個}})=(\text{有理数})\times\pi^{2n}$ を得ることが可能である.

(89) は次のように書き表わすこともできる.

$$\begin{aligned}&\sum_{k,n,s\geq 0}\left(\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,n,s)}\zeta^{\star}(\mathbf{k})\right)x^{k-n-s}y^{n-s}z^{2s-2}\\&=\int_0^1\left\{s^{-\beta}(1-s)^{y-1}\frac{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(x-\alpha-\beta+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(x-\alpha+1)}{}_2F_1\left({\alpha,\alpha-x \atop \alpha-\beta+1};s\right)\right.\\&\quad\left.+s^{-\alpha}(1-s)^{y-1}\frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(x-\alpha-\beta+1)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(x-\beta+1)}{}_2F_1\left({\beta,\beta-x \atop \beta-\alpha+1};s\right)\right\}ds.\end{aligned}$$

前節で紹介した等号付き多重ゼータ値の双対性は, 山崎 [Y] によって青木-昆布-大野 [AKO] の母関数のこの表示を用いる別証明が与えられている.

# 5　演習問題略解

**1.** 重さ $k$, 深さ $n$ の多重ゼータ値の個数は $k_1+k_2+\cdots+k_n=k$, $k_1\geq 2$, $k_2,k_3,\ldots,k_n\geq 1$ の整数解の個数である．すなわち $k_1'+k_2'+\cdots+k_n'=k-n-1$, $k_1',k_2',\ldots,k_n'\geq 0$ の整数解の個数となる．したがって, ${}_nH_{k-n-1}={}_{k-2}C_{k-n-1}={}_{k-2}C_{n-1}$個. 重さ $k$ の多重ゼータ値の個数は $\sum_{1\leq n\leq k-1}\binom{k-2}{n-1}=2^{k-2}$個.

**2.** $\pi^2=9.86\ldots\fallingdotseq 10$ かつ $k$ が十分大ならば $\zeta(2k)\fallingdotseq 1$ であるため.

**3.**

$$
\begin{aligned}
&\zeta(k-1,1)+\zeta(k)\\
&=\sum_{m\geq n>0}\frac{1}{m^{k-1}n}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\right)\frac{1}{m^{k-1}}=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}\right)\frac{1}{m^{k-1}}\\
&=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{k-2}n(m+n)}=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{n+m}{m^{k-2}n(m+n)^2}\\
&=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m^{k-3}n(m+n)^2}+\frac{1}{m^{k-2}(m+n)^2}\right)=\cdots\\
&=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m^{k-4}n(m+n)^3}+\frac{1}{m^{k-3}(m+n)^3}+\frac{1}{m^{k-2}(m+n)^2}\right)=\cdots\\
&=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{mn(m+n)^{k-2}}+\frac{1}{m^2(m+n)^{k-2}}+\cdots+\frac{1}{m^{k-2}(m+n)^2}\right)=\cdots\\
&=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(m+n)^{k-1}}+\frac{1}{m(m+n)^{k-1}}+\frac{1}{m^2(m+n)^{k-2}}+\cdots+\frac{1}{m^{k-2}(m+n)^2}\right)\\
&=2\zeta(k-1,1)+\zeta(k-2,2)+\cdots+\zeta(2,k-2).
\end{aligned}
$$

**4.**　$x^3-x-1=0$ の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると, $d_k$ の満たす 3 項漸化式から

$$d_k=-\frac{\alpha^{k+2}(\beta-\gamma)+\beta^{k+2}(\gamma-\alpha)+\gamma^{k+2}(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

を得る．これを見るには母関数を使って（$(1-x^2-x^3)\sum_{k=0}^{\infty}d_kx^k=1$ が漸化式と等価）

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}d_kx^k&=\frac{1}{1-x^2-x^3}=\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)}\\
&=-\frac{1}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\left\{\frac{\alpha^2(\beta-\gamma)}{1-\alpha x}+\frac{\beta^2(\gamma-\alpha)}{1-\beta x}+\frac{\gamma^2(\alpha-\beta)}{1-\gamma x}\right\}
\end{aligned}
$$

と部分分数分解をし，右辺の各項を等比級数に展開して係数を較べればよい．

$\alpha$ を（唯一の）実数根 $\alpha=1.3247179572\ldots$ とすると，残りの $\beta,\gamma$ は $=-0.6623589786\pm 0.5622795120\ldots\sqrt{-1}$ で，その絶対値は $|\beta|=|\gamma|=0.8688369618\ldots<1$ である．したがって，

$$
\begin{aligned}
d_k=-\frac{\alpha^{k+2}(\beta-\gamma)+\beta^{k+2}(\gamma-\alpha)+\gamma^{k+2}(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}&\underset{k:\text{十分大}}{\approx}\frac{\alpha^{k+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\\
&=0.41149\times(1.3247\ldots)^k(\ll 2^k).
\end{aligned}
$$

**5.** 多重ゼータ値の級数表示における積の規則より, $n \geq 2$ に対し,

$$\zeta(2k)\zeta(\underbrace{2k,\ldots,2k}_{n-1}) = n\zeta(\underbrace{2k,\ldots,2k}_{n}) + \sum_{i=1}^{n-1}\zeta(\underbrace{2k,\ldots,2k}_{i-1},4k,\underbrace{2k,\ldots,2k}_{n-i-1})$$

$$\zeta(4k)\zeta(\underbrace{2k,\ldots,2k}_{n-2}) = \sum_{i=1}^{n-1}\zeta(\underbrace{2k,\ldots,2k}_{i-1},4k,\underbrace{2k,\ldots,2k}_{n-i-1}) + \sum_{i=1}^{n-2}\zeta(\underbrace{2k,\ldots,2k}_{i-1},6k,\underbrace{2k,\ldots,2k}_{n-i-2})$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\zeta(2nk-2k)\zeta(2k) = \zeta(2nk-2k,2k) + \zeta(2k,2nk-2k) + \zeta(2nk).$$

これらの辺々を交代的に加えると,

$$\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^m\zeta(2mk)\zeta(\underbrace{2k,\ldots,2k}_{n-m}) = -n\zeta(\underbrace{2k,\ldots,2k}_{n}) + (-1)^{n-1}\zeta(2nk). \tag{90}$$

これを用いて

$$\zeta(\underbrace{2k,2k,\ldots,2k}_{n}) = C_n^{(k)}(2\pi i)^{2nk}/(2nk)!$$

(ただし, $C_0^{(k)} = 1, \quad C_n^{(k)} = \frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\binom{2nk}{2mk}B_{2mk}C_{n-m}^{(k)}\ (n \geq 1)$) を $n$ に関する帰納法で示す. $n=0$ のときは明らか. $n=1$ のとき, Euler の公式 (1) を用いると

$$右辺 = C_1^{(k)}\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k)!} = -\frac{B_{2k}(2\pi i)^{2k}}{2(2k)!} = \zeta(2k) = 左辺.$$

$n-1$ のまで成り立つと仮定する. (90), Euler の公式 (1) および帰納法の仮定より,

$$\begin{aligned}
\zeta(\underbrace{2k,\ldots,2k}_{n}) &= -\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^m\zeta(2mk)\zeta(\underbrace{2k,\ldots,2k}_{n-m}) - \frac{1}{n}(-1)^n\zeta(2nk)\\
&= -\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^m\left(-\frac{1}{2}\frac{B_{2mk}}{(2mk)!}(2\pi i)^{2mk}\right)\frac{C_{n-m}^{(k)}(2\pi i)^{2(n-m)k}}{(2(n-m)k)!}\\
&\quad -\frac{1}{n}(-1)^n\left(-\frac{1}{2}\frac{B_{2nk}}{(2nk)!}(2\pi i)^{2nk}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\binom{2nk}{2mk}B_{2mk}C_{n-m}^{(k)}\right)\frac{(2\pi i)^{2nk}}{(2nk)!}\\
&= C_n^{(k)}\frac{(2\pi i)^{2nk}}{(2nk)!}.
\end{aligned}$$

**6.** （今冨耕太郎君による）

$$\sum_{n=0}^{\infty} Li_{\underbrace{3,1,\ldots,3,1}_{2n\ 個}}(x)\,t^{4n} = F\Big(\frac{t}{1+i},\frac{-t}{1+i};1;x\Big)F\Big(\frac{t}{1-i},\frac{-t}{1-i};1;x\Big)$$

が, 微分作用素

$$\Big((1-x)\frac{d}{dx}\Big)^2\Big(x\frac{d}{dx}\Big)^2 - t^4$$

で消えることを導く. $A := x\frac{d}{dx}$, $B := (1-x)\frac{d}{dx}$ とおくと,

$$(B^2A^2 - t^4)\left(\sum_{n=0}^{\infty} Li_{\underbrace{3,1,\ldots,3,1}_{2n\text{ 個}}}(x)\, t^{4n}\right) = 0$$

は明らか. したがって,

$$(B^2A^2 - t - 4)\left(F\big(\frac{t}{1+i}, \frac{-t}{1+i}; 1; x\big)F\big(\frac{t}{1-i}, \frac{-t}{1-i}; 1; x\big)\right) = 0$$

を示す. ここで, $\Phi = \Phi(t;x) = y_1y_2$, ただし $y_1 = F\big(\frac{t}{1+i}, \frac{-t}{1+i}; 1; x\big)$, $y_2 = F\big(\frac{t}{1-i}, \frac{-t}{1-i}; 1; x\big)$ とすると,

$$(A^2y_1)y_2 + y_1(A^2y_2) = 0 \tag{91}$$

(後で証明) より,

$$A^2\Phi = (A^2y_1)y_2 + 2(Ay_1)(Ay_2) + y_1(A^2y_2) = 2(Ay_1)(Ay_2)$$

となり,

$$B^2A^2\Phi = 2(B^2Ay_1)(Ay_2) + 4(BAy_1)(BAy_2) + 2(Ay_1)(B^2Ay_2) \tag{92}$$

を得る.

**注意 5.0.1** $F = F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ は微分方程式

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2} + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}\frac{dF}{dx} - \alpha\beta F = 0$$

を満たす.

このことを用いると, $y_1$, $y_2$ はそれぞれ微分方程式

$$x(1-x)y_1'' + (1-x)y_1' = -\frac{t^2}{2i}y_1 \tag{93}$$

$$x(1-x)y_2'' + (1-x)y_2' = \frac{t^2}{2i}y_2 \tag{94}$$

を満たす. ここで, $BA\varphi = x(1-x)\varphi'' + (1-x)\varphi'$ より $BAy_1 = -\frac{t^2}{2i}y_1$, $BAy_2 = \frac{t^2}{2i}y_2$ を得る. これを (92) に代入すると,

$$B^2A^2 = t^4\Phi + it^2\{(By_1)(Ay_2) - (Ay_1)(By_2)\}$$

となり,

$$(By_1)(Ay_2) - (Ay_1)(By_2) = 0 \tag{95}$$

(後で証明) より,

$$(B^2A^2 - t^4)\Phi = 0$$

を得る.
(91) の証明：$A^2\varphi = x^2\varphi'' + x\varphi'$ および (93) より

$$x^2y_1'' + xy_1' = -\frac{t^2}{2i}\frac{x}{1-x}y_1,\ x^2y_2'' + xy_2' = \frac{t^2}{2i}\frac{x}{1-x}y_2$$

なので,

$$A^2y_1 = -\frac{t^2}{2i}\frac{x}{1-x}y_1,\ A^2y_2 = -\frac{t^2}{2i}\frac{x}{1-x}y_2$$

を得る. したがって,

$$(A^2y_1)y_2 + y_1(A^2y_2) = \left(-\frac{t^2}{2i}\frac{x}{1-x}y_1\right)y_2 + y_1\left(\frac{t^2}{2i}\frac{x}{1-x}y_2\right)$$

となる.
(95) の証明：

$$(By_1)(Ay_2) = (1-x)\frac{dy_1}{dx}x\frac{dy_2}{dx} = x\frac{dy_1}{dx}(1-x)\frac{dy_2}{dx} = (Ay_1)(By_2)$$

より従う.

等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} Li_{\underbrace{3,1,\ldots,3,1}_{2n\text{ 個}}}(x)\,t^{4n} = F\Big(\frac{t}{1+i},\frac{-t}{1+i};1;x\Big)F\Big(\frac{t}{1-i},\frac{-t}{1-i};1;x\Big)$$

の両辺を 1, 2, 3 回微分しそれぞれ $x=0$ を代入すると,

$$\begin{array}{ll}
(\text{左辺})|_{x=0} = 1, & (\text{右辺})|_{x=0} = 1, \\
\frac{d}{dx}(\text{左辺})|_{x=0} = 0, & \frac{d}{dx}(\text{右辺})|_{x=0} = 0, \\
\frac{d^2}{dx^2}(\text{左辺})|_{x=0} = \frac{t^4}{4}, & \frac{d^2}{dx^2}(\text{右辺})|_{x=0} = \frac{t^4}{4}, \\
\frac{d^3}{dx^3}(\text{左辺})|_{x=0} = -t^4, & \frac{d^3}{dx^3}(\text{右辺})|_{x=0} = -t^4
\end{array}$$

となり, すべてが一致するので結論を得る.

**7.** $\mathbf{k}$ の重さ $= \sum_{i=1}^{s}(a_i+b_i) = \mathbf{k}'$の重さ, $\mathbf{k}$ の深さ $= \sum_{i=1}^{s} b_i$, $\mathbf{k}'$の深さ $= \sum_{i=1}^{s} a_i$ より.

**8.** 省略

**9.**

$$
\begin{aligned}
&Li_1(z)Li_4(z) = Li_{1,4}(z) + Li_{2,3}(z) + Li_{3,2}(z) + 2Li_{4,1}(z)\\
&Li_1(z)Li_{1,3}(z) = 2Li_{1,3,1}(z) + 2Li_{1,1,3}(z) + Li_{1,2,2}(z)\\
&Li_1(z)Li_{2,2}(z) = 2Li_{2,2,1}(z) + 2Li_{2,1,2}(z) + Li_{1,2,2}(z)\\
&Li_1(z)Li_{3,1}(z) = 3Li_{3,1,1}(z) + Li_{1,3,1}(z) + Li_{2,2,1}(z)\\
&Li_1(z)Li_{1,1,2}(z) = 2Li_{1,1,2,1}(z) + 3Li_{1,1,1,2}(z)\\
&Li_1(z)Li_{1,2,1}(z) = 3Li_{1,2,1,1}(z) + 2Li_{1,1,2,1}(z)\\
&Li_1(z)Li_{2,1,1}(z) = 4Li_{2,1,1,1}(z) + Li_{1,2,1,1}(z)\\
&Li_1(z)Li_{1,1,1,1}(z) = 5Li_{1,1,1,1,1}(z)\\
&Li_2(z)Li_3(z) = Li_{2,3}(z) + 3Li_{3,2}(z) + 6Li_{4,1}(z)\\
&Li_2(z)Li_{1,2}(z) = 2Li_{1,2,2}(z) + 2Li_{2,1,2}(z) + 2Li_{2,2,1}(z) + 4Li_{1,3,1}(z)\\
&Li_2(z)Li_{2,1}(z) = Li_{2,1,2}(z) + 3Li_{2,2,1}(z) + 6Li_{3,1,1}(z)\\
&Li_2(z)Li_{1,1,1}(z) = Li_{1,1,1,2}(z) + 2Li_{1,1,2,1}(z) + 3Li_{1,2,1,1}(z) + 4Li_{2,1,1,1}(z)\\
&Li_{1,1}(z)Li_{1,2}(z) = 3Li_{1,2,1,1}(z) + 4Li_{1,1,2,1}(z) + 3Li_{1,1,1,2}(z)\\
&Li_{1,1}(z)Li_{2,1}(z) = Li_{1,1,2,1}(z) + 3Li_{1,2,1,1}(z) + 6Li_{2,1,1,1}(z)\\
&Li_{1,1}(z)Li_{1,1,1}(z) = 10Li_{1,1,1,1,1}(z)\\
&Li_3(z)Li_{1,1}(z) = Li_{1,1,3}(z) + 2Li_{1,3,1}(z) + 3Li_{3,1,1}(z) + Li_{1,2,2}(z) + Li_{2,1,2}(z) + 2Li_{2,2,1}(z)
\end{aligned}
$$

重さ 2, 3, 4 までの積およびこれらから,

$$Li_1(z)Li_{\underbrace{1,\ldots,1}_{k-1}}(z) = kLi_{\underbrace{1,\ldots,1}_{k}}(z)$$

や

$$Li_2(z)Li_{\underbrace{1,\ldots,1}_{k-1}}(z) = \sum_{i=1}^{k} iLi_{\underbrace{1,\ldots,1}_{k-i},2,\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1}}(z)$$

が推測できる.

**10.** $n$ に関する帰納法で証明する. $n=1$ のとき, $Li_1(z) = Li_1(z)$. $n=k-1$ のとき成り立つと仮定する. $n=k$ のとき, 補題 1.2.3 より

$$\frac{d}{dz}(Li(z)^k) = k\left(\frac{d}{dz}Li_1(z)\right)Li_1(z)^{k-1} = \frac{k}{1-z}Li_1(z)^{k-1}.$$

帰納法の仮定および補題 1.2.3 より,

$$\frac{d}{dz}(Li(z)^k) = \frac{k!}{1-z}Li_{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k-1\text{ 個}}}(z) = k!\frac{d}{dz}Li_{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k\text{ 個}}}(z).$$

したがって, $Li(z)^k = k!Li_{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k\text{ 個}}}(z)$.

**11.** 重さは $\dfrac{dt}{1-t}$ と $\dfrac{dt}{t}$ の個数, 深さは $\dfrac{dt}{1-t}$ の個数であるため.

**12.**

$$Li_m(z)Li_n(z) = \left(\int_0^z \underbrace{\frac{dt}{t}\circ\ldots\circ\frac{dt}{t}}_{m-1}\circ\frac{dt}{1-t}\right)\left(\int_0^z \underbrace{\frac{dt}{t}\circ\ldots\circ\frac{dt}{t}}_{n-1}\circ\frac{dt}{1-t}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(m-1+i)!}{(m-1)!i!}\int_0^z \underbrace{\frac{dt}{t}\circ\ldots\circ\frac{dt}{t}}_{m-1+i}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\ldots\circ\frac{dt}{t}}_{n-1-i}\circ\frac{dt}{1-t}$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(n-1+j)!}{(n-1)!j!}\int_0^z \underbrace{\frac{dt}{t}\circ\ldots\circ\frac{dt}{t}}_{n-1+j}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\ldots\circ\frac{dt}{t}}_{m-1-j}\circ\frac{dt}{1-t}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{m-1+i}{i}Li_{m+i,n-i}(z) + \sum_{j=0}^{m-1}\binom{n-1+j}{j}Li_{n+j,m-j}(z).$$

**13.** 変数変換 $u=\dfrac{t}{s}, v=\dfrac{1-s}{1-t}$ について逆変換を考える. 第2式を変形した式 $v(1-t)=1-s$ に, 第1式を $s=\dfrac{t}{u}$ と変形し代入すると $t=\dfrac{u(v-1)}{uv-1}$ を, $t=us$ と変形し代入すると $s=\dfrac{v-1}{uv-1}$ を得る. 次に, $s,t$ をそれぞれ $u,v$ で微分すると,

$$\frac{\partial s}{\partial u} = -v\frac{v-1}{(uv-1)^2},\ \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{u-1}{(uv-1)^2},\ \frac{\partial t}{\partial u} = -\frac{(v-1)}{(uv-1)^2}, \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{u(u-1)}{(uv-1)^2}$$

となるので, 関数行列式は,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -v\frac{v-1}{(uv-1)^2} & \frac{u-1}{(uv-1)^2} \\ -\frac{(v-1)}{(uv-1)^2} & \frac{u(u-1)}{(uv-1)^2}\end{vmatrix} = \frac{(u-1)(v-1)}{(uv-1)^4}\begin{vmatrix} -v & 1 \\ -1 & u\end{vmatrix} = -\frac{(u-1)(v-1)}{(uv-1)^3}$$

となる.

**14.** 大野の関係式において, $l=0$ とすると双対性が得られ, $l=1$ とし双対性と組み合わせると Hoffman の関係式を得る. また, 重さ $k$, 深さ $n$ で, $l=k-n-1$ とすると和公式が得られる.

**15.** $k_1 \geq 2$ に対して, 級数表示を用いて $\zeta(1)$ と $\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ の積を考えると,

$$\zeta(1)\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\right)\left(\sum_{m_1>m_2>\cdots>m_n>0}\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}}\right)$$

$$= \Bigg(\sum_{m>m_1>m_2>\cdots>m_n>0} + \sum_{m=m_1>m_2>\cdots>m_n>0} + \sum_{m_1>m>m_2>\cdots>m_n>0} + \sum_{m_1>m=m_2>\cdots>m_n>0} + \cdots$$

$$+ \sum_{m_1>m_2>\cdots>m_{n-1}>m>m_n>0} + \sum_{m_1>m_2>\cdots>m_{n-1}>m=m_n>0} + \sum_{m_1>m_2>\cdots>m_n>m>0}\Bigg)\frac{1}{mm_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}}$$

$$= \zeta(1,k_1,k_2,\ldots k_n) + \sum_{i=1}^{n}\zeta(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots,k_n) + \sum_{j=1}^{n}\zeta(k_1,\ldots,k_j,1,k_{j+1},\ldots,k_n)$$

となる. 一方, 積分表示を用いて積を計算すると,

$$
\begin{aligned}
&\zeta(1)\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)\\
&=\left(\int_0^1\frac{dt}{1-t}\right)\left(\int_0^1\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_1-1}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_2-1}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\cdots\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_n-1}\circ\frac{dt}{1-t}\right)\\
&=\int_0^1\frac{dt}{1-t}\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_1-1}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_2-1}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\cdots\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_n-1}\circ\frac{dt}{1-t}\\
&\quad+\sum_{i=0}^{k_1-2}\int_0^1\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_1-1-i}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{i}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_2-1}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\cdots\\
&\qquad\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_n-1}\circ\frac{dt}{1-t}\\
&\quad+\int_0^1\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_1-1}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_2-1}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\cdots\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_n-1}\circ\frac{dt}{1-t}\\
&\quad+\sum_{i=0}^{k_2-2}\int_0^1\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_1-1}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_2-1-i}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{i}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\cdots\\
&\qquad\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_n-1}\circ\frac{dt}{1-t}\\
&\quad+\int_0^1\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_1-1}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_2-1}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\cdots\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_n-1}\circ\frac{dt}{1-t}\\
&\quad+\cdots\\
&\quad+\sum_{i=0}^{k_n-2}\int_0^1\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_1-1}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_2-1}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\cdots\\
&\qquad\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_n-1-i}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{i}\circ\frac{dt}{1-t}\\
&\quad+\int_0^1\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_1-1}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_2-1}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\cdots\circ\underbrace{\frac{dt}{t}\circ\cdots\circ\frac{dt}{t}}_{k_n-1}\circ\frac{dt}{1-t}\circ\frac{dt}{t}\\
&=\zeta(1,k_1,k_2,\ldots,k_n)+\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{j=0\\k_l\geq 2}}^{k_l-2}\zeta(k_1,\ldots,k_{l-1},k_l-j,j+1,k_{l+1},\ldots,k_n)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\zeta(k_1,\ldots,k_i,1,k_{i+1},\ldots,k_n)
\end{aligned}
$$

を得る. 両者が等しいと見ると, 第 1 項および第 2 項同士が打ち消しあい, Hoffman の関係式

を得る．

**16.** 例 1.4.3 の第 2 式は, $n$ に関する帰納法で証明する．$n=1$ のときは明らか．$n=2$ のとき, $y ш y = y(1 ш y) + y(y ш 1) = 2y^2$ で成り立つ．$n-1$ まで成り立つと仮定する．ここで, $y ш y^{k-1} = ky^k$ である．なぜならば, $k=1$ のときは明らか．$k-1$ まで成り立つと仮定すると, $k$ のとき,

$$y ш y^{k-1} = y(1 ш y^{k-1}) + y(y ш y^{k-2}) = y^k + y((k-1)y^{k-1}) = ky^k$$

となる．これを用いると, $n$ のとき帰納法の仮定より,

$$y^{ш n} = y ш y^{ш(n-1)} = y ш (n-1)!y^{n-1} = (n-1)!(y ш y^{n-1}) = n!y^n$$

となる．同様に第 3 式も得られる．

第 5 式を $q$ に関する帰納法で証明する．$q=1$ のときは第 2 式より明らか．$q-1$ まで成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} z_1 ш z_q &= z_1 z_q + x(z_1 ш z_{q-1}) \\ &= z_1 z_q + x\left( z_{q-1}z_1 + \sum_{i=0}^{q-2} z_{1+i}z_{q-1-i} \right) \\ &= z_1 z_q + z_q z_1 + \sum_{i=0}^{q-2} z_{2+i}z_{q-1-i} = z_q z_1 + \sum_{i=0}^{q-1} z_{1+i}z_{q-i} \end{aligned}$$

となる．

第 4 式は, $n=p+q$ に関する帰納法で示す．$n=2$ のときは第 2 式より明らか．$n=p+q-1$ のとき成り立つと仮定する．$p,q \geq 2$ ならば, 帰納法の仮定より,

$$\begin{aligned} z_p ш z_q =& x(z_{p-1} ш z_q) + x(z_p ш z_{q-1}) \\ =& \sum_{i=0}^{q-1} \binom{p-2+i}{i} z_{p+i}z_{q-i} + \sum_{j=0}^{p-2} \binom{q-1+j}{j} z_{q+j-1}z_{p-j-1} \\ &+ \sum_{i=0}^{q-2} \binom{p-1+i}{i} z_{p+i+1}z_{q-i-1} + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{q-2+j}{j} z_{q+j}z_{p-j} \\ &= z_p z_q + \sum_{i=1}^{q-1} \left( \binom{p-2+i}{i} + \binom{p-2+i}{i-1} \right) z_{p+i}z_{q-i} \\ &+ z_q z_p + \sum_{j=1}^{p-1} \left( \binom{q-2+j}{j} + \binom{q-2+j}{j-1} \right) z_{q+j}z_{p-j} \\ =& \sum_{i=0}^{q-1} \binom{p-1+i}{i} z_{p+i}z_{q-i} + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{q-1+j}{j} z_{q+j}z_{p-j} \end{aligned}$$

を得る．$p=1$, $q \geq 1$ の場合は第 5 式で得られているので，これらを合わせると $p,q \geq 1$ に対して

$$z_p ш z_q = \sum_{i=0}^{q-1} \binom{p-1+i}{i} z_{p+i}z_{q-i} + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{q-1+j}{j} z_{q+j}z_{p-j}$$

が成り立つ. また, シャッフル積の意味を考えると, $\underbrace{x\cdots x}_{p-1}y$ と $\underbrace{x\cdots x}_{q-1}y$ のどちらかの $y$ が先にくるかで和が 2 つに分かれ, "$x\cdots xyx\cdots y$" の形の作り方と思うと直接得られる.

**17.** 収束インデックス $\mathbf{k}$ に対し,

$$|\zeta_M(\mathbf{k})-\zeta(\mathbf{k})| = O(M^{-1}\log^J M) \quad (M\to\infty,\ J\text{ はある正数})$$

を示せばよい. まず, $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\dots k_n), k_1\geq 2, k_2,\dots,k_n\geq 1$ に対し,

$$\begin{aligned}
\zeta(\mathbf{k})-\zeta_M(\mathbf{k}) &= \left(\sum_{m_1>\cdots>m_n>0} - \sum_{M>m_1>\cdots>m_n>0}\right)\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}} \\
&= \sum_{m_1=M}^{\infty}\sum_{m_1>\cdots m_n>0}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}} \\
&= \sum_{m_1=M}^{\infty}\frac{1}{m_1^{k_1}}\sum_{m_2>\cdots m_n>0}\frac{1}{m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}}.
\end{aligned}$$

ここで,

$$A(m_1)=\sum_{m_2>\cdots m_n>0}\frac{1}{m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}}$$

とおくと,

$$A(m_1)\leq \sum_{m_2,\dots,m_n=1}^{m_1-1}\frac{1}{m_2\cdots m_n} = \left(\sum_{r=1}^{m_1-1}\frac{1}{r}\right)^{n-1}$$

および

$$\sum_{r=1}^{m_1-1}\frac{1}{r}=\zeta_{m_1}(1)=\log m_1+\gamma+O\left(\frac{1}{m_1}\right)=\log m_1+O(1)=O(\log m_1)$$

より, ある定数 $C$ が存在し

$$A(m_1)<C(\log m_1)^{n-1}$$

となるので,

$$|\zeta(\mathbf{k})-\zeta_M(\mathbf{k})|\leq \sum_{m_1=M}^{\infty}\frac{C(\log m_1)^{n-1}}{m_1^{k_1}} < C\left(\int_M^{\infty}\frac{(\log x)^{n-1}}{x^{k_1}}dx+\frac{(\log M)^{n-1}}{M^{k_1}}\right).$$

部分積分を繰り返すことにより

$$\int_M^{\infty}\frac{(\log x)^{n-1}}{x^{k_1}}dx = O(M^{-(k_1-1)}(\log M)^{n-1}) \quad (M\to\infty)$$

となるので,

$$M|\zeta(\mathbf{k})-\zeta_M(\mathbf{k})| = O(M^{-k_1+2}(\log M)^{n-1}) \quad (M\to\infty).$$

したがって, $-k_1+2\leq 0$ より

$$|\zeta(\mathbf{k})-\zeta_M(\mathbf{k})| = M^{-1}O(\log^J M) = O(M^{-1}\log^J M) \quad (M\to\infty,\ J:\text{ある正数})$$

を得る.

**18.** (42) の両辺を 2 乗した

$$\pi = \lim_{N\to\infty} \frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N)!(2N)!N}$$

を用いる.

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{4n^2}{4n^2-1} &= \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{(2n)^2(2n)^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n)} \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N)!(2N)!(2N+1)} \\
&= \lim_{N\to\infty}\left\{\left(\frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N)!(2N)!(2N+1)}\frac{2N+1}{N}\right)\frac{N}{2N+1}\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2} &= \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{4n(2n)^2(n+1)}{(2n+1)(2n)(2n+1)(2n)} \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{2^{2N}(2^N)^2(N!)^3(N+1)!}{(2N)!(2N)!(2N+1)^2} \\
&= \lim_{N\to\infty}\left\{\left(\frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N)!(2N)!N}\right)\frac{N(N+1)}{(2N+1)^2}\right\} \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

**19.** (32) を

$$\begin{aligned}
\Gamma(1+x) &= \lim_{N\to\infty}\frac{N^x}{(1+x)(1+\frac{x}{2})(1+\frac{x}{3})\cdots(1+\frac{x}{N})} \\
&= \lim_{N\to\infty}\exp\left(\log\frac{N^x}{(1+x)(1+\frac{x}{2})(1+\frac{x}{3})\cdots(1+\frac{x}{N})}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\exp\left(-\log\left((1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{N}\right)\right)+\log N^x\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\exp\left(-\sum_{r=1}^{N}\log\left(1+\frac{x}{r}\right)+x\log N\right)
\end{aligned}$$

と変形する. Euler-Maclaurin の公式の一番簡単な形

$$\sum_{r=1}^{N}f(r) = \int_1^N f(t)dt + \frac{1}{2}(f(N)+f(1)) + \int_1^N \widetilde{B}_1(t)f'(t)dt$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
&-\sum_{r=1}^{N}\log\left(1+\frac{x}{r}\right)+x\log N \\
&= -\int_1^N\log\left(1+\frac{x}{t}\right)dt - \frac{1}{2}\left(\log\left(1+\frac{x}{N}\right)+\log(1+x)\right) - \int_1^N\widetilde{B}_1(t)\left(\log\left(1+\frac{x}{t}\right)'\right)dt \\
&\quad + \log N^x.
\end{aligned}$$

ここで, 部分積分を用いると

$$\int_1^N \log\left(1+\frac{x}{t}\right)dt = \log\left(1+\frac{x}{N}\right)^{N+x} - \log(1+x)^{1+x} + \log N^x$$

が得られるので,

$$\begin{aligned}
&-\sum_{r=1}^{N}\log\left(1+\frac{x}{r}\right) + x\log N \\
=&-\log\left(1+\frac{x}{N}\right)^{N+x} + \log(1+x)^{1+x} - \log N^x \\
&\quad -\log\left(1+\frac{x}{N}\right)^{\frac{1}{2}} - \log(1+x)^{\frac{1}{2}} - \int_1^N \widetilde{B}_1(t)\left(\frac{1}{t+x}-\frac{1}{t}\right)dt + \log N^x \\
=&-\log\left(1+\frac{x}{N}\right)^{N+x+\frac{1}{2}} + \log(1+x)^{x+\frac{1}{2}} - \int_1^N \widetilde{B}_1(t)\left(\frac{1}{t+x}-\frac{1}{t}\right)dt
\end{aligned}$$

となる. よって, 両辺の exp をとり $N\to\infty$ の極限をとると

$$\begin{aligned}
\Gamma(1+x) &= \exp\left(-x + \log(1+x)^{x+\frac{1}{2}} - \int_1^N \widetilde{B}_1(t)\left(\frac{1}{t+x}-\frac{1}{t}\right)dt\right) \\
&= e^{-x}(1+x)^{x+\frac{1}{2}}\exp\left(\int_1^\infty \frac{\widetilde{B}_1(t)}{t}dt\right)\exp\left(-\int_1^\infty \frac{\widetilde{B}_1(t)}{t+x}dt\right) \\
&= e^{-x}(1+x)^{x+\frac{1}{2}}\exp\left(\int_1^\infty \frac{\widetilde{B}_1(t)}{t}dt\right)\exp\left(-\int_0^\infty \frac{\widetilde{B}_1(t)}{t+x}dt\right)\exp\left(\int_0^1 \frac{\widetilde{B}_1(t)}{t+x}dt\right)
\end{aligned}$$

を得る. ここで,

$$\exp\left(\int_0^1 \frac{\widetilde{B}_1(t)}{t+x}dt\right) = e\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x-\frac{1}{2}}$$

なので, $\mu(x) = -\int_0^\infty \frac{\widetilde{B}_1(t)}{t+x}dt$ とおくと

$$\begin{aligned}
\Gamma(1+x) &= e^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}\exp\left(\int_1^\infty \frac{\widetilde{B}_1(t)}{t}dt\right)e^{\mu(x)}e\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x-\frac{1}{2}} \\
&= \exp\left(1+\int_1^\infty \frac{\widetilde{B}_1(t)}{t}dt\right)e^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}e^{\mu(x)}
\end{aligned}$$

となる. ここで, $x = n \in \mathbf{N}$ のとき $\mu(n) = \mu_n$ より,

$$\Gamma(1+n) = \exp\left(1+\int_1^\infty \frac{\widetilde{B}_1(t)}{t}dt\right)e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}e^{\mu_n}$$

となり, Stirling 公式 (43) と比べることによって

$$\exp\left(1+\int_1^\infty \frac{\widetilde{B}_1(t)}{t}dt\right) = \sqrt{2\pi}$$

が分かる. したがって,

$$\Gamma(1+x)=\sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\mu(x)},\quad \mu(x)=-\int_0^\infty \frac{\widetilde{B}_1(t)}{t+x}\,dt$$

が得られる. 評価 $0<\mu(x)<1/12x$ は (40) を求めたときと同様の議論で,

$$\begin{aligned}
0&<\left(x+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x+n}\right)-1\\
&=\frac{2(x+n)+1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{1}{(2(x+n)+1)}}{1-\frac{1}{(2(x+n)+1)}}\right)-1\\
&=\frac{1}{3(2(x+n)+1)^2}+\frac{1}{5(2(x+n)+1)^4}+\frac{1}{7(2(x+n)+1)^6}+\cdots\\
&<\frac{1}{3(2(x+n)+1)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{(2(x+n)+1)^2}}\\
&=\frac{1}{12(x+n)((x+n)+1)}\\
&=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}\right)
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
0<\mu(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x+n}\right)-1\\
&<\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}\right)=\frac{1}{12x}
\end{aligned}$$

となり得られる.

**20.** $C_l\sum_{n=1}^{m}\frac{\log^l n}{n}$ と $\int_1^m x^{-1}\log^l x dx$ を比較する.

$$\int_1^m x^{-1}\log^l x dx=\frac{1}{l+1}\log^{l+1}m$$

および

$$\begin{aligned}
\int_1^m x^{-1}\log^l x dx&=\int_1^{e^l}x^{-1}\log^l x dx+\int_{e^l}^m x^{-1}\log^l x dx\\
&\le C_l\sum_{n=1}^{e^l}n^{-1}\log^l n+\sum_{n=e^l}^{m}n^{-1}\log^l n\\
&=C_l\sum_{n=1}^{m}n^{-1}\log^l n\quad (\text{ただし } C_l \text{は } m \text{ に無関係な定数})
\end{aligned}$$

より

$$\log^{l+1}m\le C_l'\sum_{n=1}^{m}n^{-1}\log^l n\quad (\text{ただし } C_l' \text{は } m \text{ に無関係な定数})$$

を得る.

**21.** 等式
$$\log\Gamma(x) = \bigl(x-\frac{1}{2}\bigr)\log x - x + \log\sqrt{2\pi} + \mu(x) \qquad (x>0)$$
を 1 回微分したものを $h(x)$ とおく. ただし,
$$\mu(x) = -\int_0^\infty \frac{\widetilde{B}_1(t)}{x+t}\,dt$$
とする. つまり,
$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \log x - \frac{1}{2x} + \mu'(x) = h(x).$$
一方,
$$\begin{aligned}\left|\frac{\mu^{(n)}(x)}{n!}\right| &= \left|-\int_0^\infty \frac{(-1)^n\widetilde{B}_1(t)}{(x+t)^{n+1}}\,dt\right| \le \int_0^\infty \left|\frac{(-1)^n\widetilde{B}_1(t)}{(x+t)^{n+1}}\right| dt \\ &\le \int_0^\infty \frac{1}{(x+t)^{n+1}}\,dt = \left[-\frac{1}{n(x+t)^n}\right]_0^\infty = \frac{1}{nx^n} = O\left(\frac{1}{x^n}\right) \qquad (x\to\infty)\end{aligned}$$
より,
$$\mu^{(n)}(x) = O\left(\frac{1}{x^n}\right) \qquad (x\to\infty)$$
が得られる. したがって,
$$h(x) = \log x + O\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to\infty)$$
および, $n\ge 1$ のとき,

(96)
$$h^{(n)}(x) = O\left(\frac{1}{x^n}\right) \qquad (x\to\infty)$$
が成り立つ. 次に,

(97)
$$\frac{\Gamma^{(l)}(x)}{\Gamma(x)} = h^{(l)}(x) + \sum_{i=1}^{l-1} h(x)^{l-1-i}f(x) \qquad (f(x)\in\mathbf{Q}[h^{'}(x), h^{(2)}(x), \ldots])$$
を帰納法で示す. $l=1$ のときは $\frac{\Gamma^{'}(x)}{\Gamma(x)} = h(x)$. $l-1$ まで成り立つと仮定すると,
$$\begin{aligned}\frac{\Gamma^{(l)}(x)}{\Gamma(x)} =& h^l(x) + (l-1)h(x)^{l-2}h^{'}(x) + h(x)\sum_{i=1}^{l-2} h(x)^{l-2-i}f(x) \\ &+ \sum_{i=1}^{l-3}(l-2-i)h(x)^{l-3-i}h^{'}(x)f(x) + \sum_{i=1}^{l-2} h(x)^{l-2-i}f^{'}(x) \\ =& h^l(x) + \sum_{i=1}^{l-1} h(x)^{l-1-i}g(x) \qquad (g(x)\in\mathbf{Q}[h^{'}(x), h^{(2)}(x), \ldots]).\end{aligned}$$

したがって, (96), (97) より,

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma^{(l)}(x)}{\Gamma(x)} &= h^{(l)}(x) + \sum_{i=1}^{l-1} h(x)^{l-1-i} \cdot O\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \log^l x + O\left(\frac{\log^{l-1} x}{x}\right) \qquad (x \to \infty).\end{aligned}$$

**22.** $y * xyxy = yxyxy + xy^2xy + xyxy^2 + x^2yxy + xyx^2y$ および $y ш xyxy = yxyxy + 2xy^2xy + 2xyxy^2$ であるので, (56) より

$$Z(\mathrm{reg}_ш(y \;ш\; xyxy - y * xyxy)) = \zeta(3,2) + \zeta(2,3) - \zeta(2,2,1) - \zeta(2,1,2) = 0$$

を得る. 同様に

$$\begin{aligned}
Z(\mathrm{reg}_ш(y \;ш\; xxxy - y * xxxy)) =& \zeta(5) - \zeta(4,1) - \zeta(3,2) - \zeta(2,3) = 0, \\
Z(\mathrm{reg}_ш(y \;ш\; xxyy - y * xxyy)) =& \zeta(4,1) + \zeta(3,2) - \zeta(3,1,1) - \zeta(2,2,1) = 0, \\
Z(\mathrm{reg}_ш(y \;ш\; xyyy - y * xyyy)) =& \zeta(3,1,1) + \zeta(2,2,1) + \zeta(2,1,2) - \zeta(2,1,1,1) = 0, \\
Z(\mathrm{reg}_ш(xy \;ш\; xxy - xy * xxy)) =& \zeta(5) - 6\zeta(4,1) - 2\zeta(3,2) = 0, \\
Z(\mathrm{reg}_ш(xy \;ш\; xyy - xy * xyy)) =& \zeta(4,1) - 6\zeta(3,1,1) + \zeta(2,3) - \zeta(2,2,1) = 0, \\
Z(\mathrm{reg}_ш(yy \;ш\; xxy - yy * xxy)) =& -\zeta(4,1) - \zeta(3,2) + \zeta(3,1,1) - \zeta(2,3) + \zeta(2,2,1) \\
& + \zeta(2,1,2) = 0, \\
Z(\mathrm{reg}_ш(yy \;ш\; xyy - yy * xyy)) =& \zeta(3,2) - \zeta(3,1,1) - 2\zeta(2,2,1) - \zeta(2,1,2) \\
& + \zeta(2,1,1,1) = 0, \\
Z(\mathrm{reg}_ш(yxy \;ш\; xy - yxy * xy)) =& -2\zeta(4,1) + 12\zeta(3,1,1) - \zeta(2,3) + 2\zeta(2,2,1) \\
& - \zeta(2,1,2) = 0, \\
Z(\mathrm{reg}_ш(yyy \;ш\; xy - yyy * xy)) =& \zeta(3,1,1) + \zeta(2,2,1) + \zeta(2,1,2) - \zeta(2,1,1,1) = 0
\end{aligned}$$

を得る. これらのうち独立な関係式の個数は 6 個であり, 一方, 重さ 5 の多重ゼータ値の個数が 8 個より, 重さ 5 の多重ゼータ値の空間の次元は 2 以下である.

(57) を用いると

$$\begin{aligned}
Z(\mathrm{reg}_*(y ш xxxy - y * xxxy)) =& \zeta(5)-\zeta(4,1)-\zeta(3,2)-\zeta(2,3)=0,\\
Z(\mathrm{reg}_*(y ш xxyy - y * xxyy)) =& \zeta(4,1)+\zeta(3,2)-\zeta(3,1,1)-\zeta(2,2,1)=0,\\
Z(\mathrm{reg}_*(y ш xyxy - y * xyxy)) =& \zeta(3,2)+\zeta(2,3)-\zeta(2,2,1)-\zeta(2,1,2)=0,\\
Z(\mathrm{reg}_*(y ш xyyy - y * xyyy)) =& \zeta(3,1,1)+\zeta(2,2,1)+\zeta(2,1,2)-\zeta(2,1,1,1)=0,\\
Z(\mathrm{reg}_*(xy ш xxy - xy * xxy)) =& \zeta(5)-6\zeta(4,1)-2\zeta(3,2)=0,\\
Z(\mathrm{reg}_*(xy ш xyy - xy * xyy)) =& \zeta(4,1)-6\zeta(3,1,1)+\zeta(2,3)-\zeta(2,2,1)=0,\\
Z(\mathrm{reg}_*(yy ш xxy - yy * xxy)) =& -\zeta(5)+\zeta(4,1)+2\zeta(3,2)+\zeta(2,3)-\zeta(2,2,1)=0,\\
Z(\mathrm{reg}_*(yy ш xyy - yy * xyy)) =& -\zeta(4,1)-\zeta(3,2)+\zeta(3,1,1)-\zeta(2,3)+\zeta(2,2,1)\\
&+\zeta(2,1,2)=0,\\
Z(\mathrm{reg}_*(yxy ш xy - yxy * xy)) =& -\zeta(5)+3\zeta(4,1)+5\zeta(3,2)+8\zeta(3,1,1)-2\zeta(2,2,1)\\
&-\zeta(2,1,2)=0,\\
Z(\mathrm{reg}_*(yyy ш xy - yyy * xy)) =& \frac{1}{2}\zeta(5)-\frac{1}{2}\zeta(4,1)-\frac{3}{2}\zeta(3,2)-\zeta(2,3)+\zeta(2,2,1)\\
&+\frac{1}{2}\zeta(2,1,2)=0
\end{aligned}$$

を得る．これらのうち独立な関係式の個数も 6 個であり, 重さ 5 の多重ゼータ値の空間の次元は 2 以下である．

**23.** 定理 1.4.18, (i) および $\rho$ の定義より

$$Z^*_{\mathbf{k}}(T)=\rho^{-1}\circ Z^{ш}_{\mathbf{k}}(T)=\rho^{-1}\left(\sum_{j=0}^{\nu}c_j\frac{T^j}{j!}\right)=\sum_{j=0}^{\nu}\frac{c_j}{j!}\rho^{-1}(T^j).$$

ここで, $T^j=\left(\frac{d}{du}\right)^j e^{Tu}\Big|_{u=0}$ を用いると,

$$\begin{aligned}
Z^*_{\mathbf{k}}(T)&=\sum_{j=0}^{\nu}\frac{c_j}{j!}\frac{d^j}{du^j}\rho^{-1}(e^{Tu})\Big|_{u=0}=\sum_{j=0}^{\nu}\frac{c_j}{j!}\frac{d^j}{du^j}\left(\frac{1}{\Gamma(1+u)}e^{(T-\gamma)u}\right)\Big|_{u=0}\\
&=\sum_{j=0}^{\nu}\frac{c_j}{j!}\left\{\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\left(\frac{d^{(j-i)}}{du^{(j-i)}}\frac{1}{\Gamma(1+u)}\right)(T-\gamma)^i e^{(T-\gamma)u}\right\}\Big|_{u=0}\\
&=\sum_{j=0}^{\nu}\frac{c_j}{j!}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\left(\frac{d^{(j-i)}}{du^{(j-i)}}\frac{1}{\Gamma(1+u)}\right)\Big|_{u=0}(T-\gamma)^i.
\end{aligned}$$

$j$ を $\nu-j$ とすると

$$\begin{aligned}
Z^*_{\mathbf{k}}(T)&=\sum_{j=0}^{\nu}\frac{c_{\nu-j}}{(\nu-j)!}\sum_{i=0}^{\nu-j}\binom{\nu-j}{i}\left(\frac{d^{(\nu-j-i)}}{du^{(\nu-j-i)}}\frac{1}{\Gamma(1+u)}\right)\Big|_{u=0}(T-\gamma)^i\\
&=\sum_{i=0}^{\nu}\left[\sum_{j=0}^{\nu-i}\frac{c_{\nu-j}}{(\nu-j)!}\binom{\nu-j}{i}\left(\frac{d^{(\nu-j-i)}}{du^{(\nu-j-i)}}\frac{1}{\Gamma(1+u)}\right)\Big|_{u=0}\right](T-\gamma)^i\\
&=\sum_{i=0}^{\nu}\left[\sum_{j=0}^{\nu-i}\frac{c_{\nu-j}}{(\nu-j-i)!}\left(\frac{d^{(\nu-j-i)}}{du^{(\nu-j-i)}}\frac{1}{\Gamma(1+u)}\right)\Big|_{u=0}\right]\frac{(T-\gamma)^i}{i!}.
\end{aligned}$$

したがって, $Z^*_{\mathbf{k}}(T)=\sum_{j=0}^{\nu} b_j \frac{(T-\gamma)^j}{j!}$ より, 両辺の $\frac{(T-\gamma)^i}{i!}$ の係数を比較することで,

$$b_j = \sum_{j=0}^{\nu-i} \frac{c_{\nu-j}}{(\nu-j-i)!} \left( \frac{d^{(\nu-j-i)}}{du^{(\nu-j-i)}} \frac{1}{\Gamma(1+u)} \right)\Bigg|_{u=0} \tag{98}$$

を得る. 一方, (i) および $\frac{1}{\Gamma(1+s)}$ の Taylor 展開

$$\frac{1}{\Gamma(1+s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{\Gamma(1+s)} \right)\Bigg|_{s=0} s^n$$

より,

$$\begin{aligned}
\zeta(\mathbf{k}:s) &= \frac{1}{\Gamma(1+s)}\Gamma(1+s)\zeta(\mathbf{k}:s) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+s)} \left( \sum_{j=0}^{\nu} \frac{c_j}{s^j} + O(s) \right) \\
&= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{\Gamma(1+s)} \right)\Bigg|_{s=0} s^n \right\} \left( \sum_{j=0}^{\nu} \frac{c_j}{s^j} + O(s) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{n=0}^{j} \frac{c_j}{n!} \left( \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{\Gamma(1+s)} \right)\Bigg|_{s=0} \frac{1}{s^{j-n}} + O(s)
\end{aligned}$$

ここで, $n$ を $j-n$ とすると,

$$\zeta(\mathbf{k}:s) = \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{n=0}^{j} \frac{c_j}{(j-n)!} \left( \frac{d^{(j-n)}}{ds^{(j-n)}} \frac{1}{\Gamma(1+s)} \right)\Bigg|_{s=0} \frac{1}{s^n} + O(s)$$

となり, $j$ を $\nu-j$ とすると,

$$\begin{aligned}
\zeta(\mathbf{k}:s) &= \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{n=0}^{\nu-j} \frac{c_{\nu-j}}{(\nu-j-n)!} \left( \frac{d^{(\nu-j-n)}}{ds^{(\nu-j-n)}} \frac{1}{\Gamma(1+s)} \right)\Bigg|_{s=0} \frac{1}{s^n} + O(s) \\
&= \sum_{n=0}^{\nu} \sum_{j=0}^{\nu-n} \frac{c_{\nu-j}}{(\nu-j-n)!} \left( \frac{d^{(\nu-j-n)}}{ds^{(\nu-j-n)}} \frac{1}{\Gamma(1+s)} \right)\Bigg|_{s=0} \frac{1}{s^n} + O(s)
\end{aligned}$$

となる. したがって, (98) を用いると,

$$\zeta(\mathbf{k}:s) = \sum_{n=0}^{\nu} \frac{b_n}{s^n} + O(s)$$

を得る.

**24.** $k_1 \geq 2$ に対し,

$$\partial_1(x^{k_1-1}y) = \sum_{i=0}^{k_1-2} x^{k_1-i-2}\partial_1(x)x^i y + x^{k_1-1}\partial_1(y) = \sum_{i=0}^{k_1-2} x^{k_1-i-1}yx^i y - x^{k_1}y$$

なので, 両辺を $Z$ で写すと

$$\sum_{i=0}^{k_1-2}\zeta(k_1-i,i+1)-\zeta(k_1+1)=0$$

となる. したがって, ある番号 $l$, $k_l\geq 2$ に対し,

$$\begin{aligned}
\partial_1(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y\cdots x^{k_n-1}y)&=\sum_{i=0}^{k_1-2}x^{k_1-i-1}yx^iyx^{k_2-1}y\cdots x^{k_n-1}y\\
&\quad+\sum_{i=0}^{k_2-2}x^{k_1-1}yx^{k_2-i-1}yx^iyx^{k_3-1}y\cdots x^{k_n-1}y\\
&\quad+\cdots\\
&\quad+\sum_{i=0}^{k_n-2}x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y\cdots x^{k_{n-1}-1}yx^{k_n-i-1}yx^iy\\
&\quad-\sum_{j=1}^{n}x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y\cdots x^{k_{j-1}-1}yx^{k_j}yx^{k_{j+1}-1}y\cdots x^{k_n-1}y\\
&=\sum_{\substack{1\leq l\leq n\\ k_l\geq 2}}\sum_{i=0}^{k_l-2}x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y\cdots x^{k_{l-1}-1}yx^{k_l-i-1}yx^iyx^{k_{l+1}-1}y\cdots x^{k_n-1}y\\
&\quad-\sum_{j=1}^{n}x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y\cdots x^{k_{j-1}-1}yx^{k_j}yx^{k_{j+1}-1}y\cdots x^{k_n-1}y
\end{aligned}$$

となる. したがって, 両辺に $Z$ を施して Hoffman の関係式 (10) を得る.

**25.** (64) の右辺

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z_nu^n*\sum_{m=0}^{\infty}(yu)^m=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(z_n*{z_1}^m)u^{n+m}$$

において, $n+m=l$ とすると,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(z_n*{z_1}^m)u^{n+m}=\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{l}(-1)^{n-1}(z_n*{z_1}^{l-n})\right\}u^l$$

となる. これが (64) の左辺 $\sum_{l=1}^{\infty}(ly^l)u^l$ と等しいことを示す. つまり, 正の整数 $l$ に対して

$$\sum_{n=1}^{l}(-1)^{n-1}z_n*{z_1}^{l-n}=l{z_1}^l$$

を示せばよい. $l$ に関する帰納法で示す. $l=1$ のとき左辺 $=z_1*{z_1}^0=z_1=$ 右辺. $l-1$ のとき成り立つ仮定する. $l$ のとき,

$$\sum_{n=1}^{l}(-1)^{n-1}z_n*{z_1}^{l-n}=\sum_{n=1}^{l-1}(-1)^{n-1}z_n*{z_1}^{l-n}+(-1)^{l-1}z_l.$$

ここで, ${z_n} * {z_1}^{l-n} = z_n{z_1}^{l-n} + z_1(z_n * {z_1}^{l-n-1}) + z_{n+1}{z_1}^{l-n-1}$ および帰納法の仮定より,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{l}(-1)^{n-1} z_n * {z_1}^{l-n} =& \sum_{n=1}^{l-1}(-1)^{n-1}(z_n{z_1}^{l-n}) + \sum_{n=1}^{l-1}(-1)^{n-1}(z_{n+1}{z_1}^{l-n-1}) \\
& + (l-1){z_1}^l + (-1)^{l-1}z_l \\
=& {z_1}^l + \sum_{n=2}^{l-1}(-1)^{n-1}(z_n{z_1}^{l-n}) + \sum_{n=1}^{l-2}(-1)^{n-1}(z_{n+1}{z_1}^{l-n-1}) + (-1)^{l-2}z_l \\
& + (l-1){z_1}^l + (-1)^{l-1}z_l \\
=& l{z_1}^l
\end{aligned}
$$

を得る.

**26.** 任意の $\mathfrak{H}$ の元 $w, w'$ に対して ш の定義より $y ш (ww') = (y ш w)w' + w(y ш w') - wyw'$ なので, $yww' - y ш (ww') = (yw - (y ш w))w' - w(yw' - (y ш w'))$ となる. ここで, $d(w) := yw - y ш w$ より $d(ww') = d(w)w' - wd(w')$ $(\forall w, w' \in \mathfrak{H})$ となり, $d$ は $\mathfrak{H}$ の導分である.
次に,(74) を証明するために

$$
\frac{1}{n!}d^n(w) = (-1)^n \left(y^n ш w - y(y^{n-1} ш w)\right) \quad (n \geq 1,\, w \in \mathfrak{H})
$$

を帰納的に証明する. $n = 1$ のときは明らか. $n - 1$ のとき成り立つと仮定する. $n$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n!}d^n(w) &= \frac{1}{n}d\left(\frac{d^{n-1}(w)}{(n-1)!}\right) \\
&= \frac{1}{n}d\left((-1)^{n-1}(y^{n-1} ш w - y(y^{n-2} ш w))\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n}\left\{d(y(y^{n-2} ш w)) - d(y^{n-1} ш w)\right\}.
\end{aligned}
$$

ここで, $d(w) := yw - y ш w$ および ш の結合法則より,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n!}d^n(w) &= \frac{(-1)^n}{n}\left\{y^2(y^{n-2} ш w)) - y ш (y(y^{n-2} ш w)) - y(y^{n-1} ш w) + y ш (y^{n-1} ш w)\right\} \\
&= \frac{(-1)^n}{n}\left\{-y((y ш y^{n-2}) ш w) - y(y^{n-1} ш w) + (y ш y^{n-1}) ш w\right\}
\end{aligned}
$$

を得る. したがって, $y ш y^i = (i+1)y^{i+1}$ を用いると,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n!}d^n(w) &= \frac{(-1)^n}{n}\left\{-y((n-1)y^{n-1} ш w) - y(y^{n-1} ш w) + (ny^n) ш w\right\} \\
&= \frac{(-1)^n}{n}\left\{-n(y(y^{n-1} ш w)) + n(y^n ш w)\right\} \\
&= (-1)^n(y^n ш w - y(y^{n-1} ш w)).
\end{aligned}
$$

上の式において両辺 $n=1$ から $\infty$ までの和をとると,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}d^n(w) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(y^n ш w) - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n y(y^{n-1} ш w) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(y^n ш w) - w + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} y(y^{n-1} ш w) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-y)^n\right) ш w - w + y\left\{\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-y)^n\right) ш w\right\} \\
&= \frac{1}{1+y} ш w - w + y\left(\frac{1}{1+y} ш w\right).
\end{aligned}$$

したがって,

$$\Psi(w) = (\exp(d))(w) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^n(w)}{n!} = (1+y)\left(\frac{1}{1+y} ш w\right)$$

を得る.

最後に (75) を示す.

$$\begin{aligned}
(1+y)\left(\frac{1}{1+y} ш x\right) &= (1+y)\left\{\left(1-\frac{y}{1+y}\right) ш x\right\} \\
&= (1+y)x - (1+y)\left(\frac{y}{1+y} ш x\right) \\
&= (1+y)x - (1+y)y\left(\frac{1}{1+y} ш x\right) - (1+y)\frac{xy}{1+y}
\end{aligned}$$

より, 右辺の第 2 項を左辺に移行し $(y+1)$ で両辺を割ると

$$(1+y)\left(\frac{1}{1+y} ш x\right) = x\left(1-\frac{y}{1+y}\right)$$

となり, $\Psi(x) = x(1+y)^{-1}$ を得る. 同様に $\Psi(y) = y(1+y)^{-1}$ も得る.

# 参考文献


[AET] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers*, Acta Arithmetica, **98** (2001), 107–116.

[AKO] T. Aoki, Y. Kombu and Y. Ohno, *A generating function for sum of multiple zeta values and its applications*, Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 387–395.

[AO] T. Aoki and Y. Ohno, *Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric functions*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **41** (2005), 329–337.

[Ao] K. Aomoto, *Special values of hyperlogarithms and linear difference schemes*, Illinois J. of Math., **34-2** (1990), 191–216.

[AIK] 荒川恒男，伊吹山知義，金子昌信， ベルヌーイ数とゼータ関数. 牧野書店 2001.

[AK1] T. Arakawa and M. Kaneko, *Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions*, Nagoya Math. J. **153** (1999), 1–21.

[AK2] T. Arakawa and M. Kaneko, *Multiple L-values*, J. Math. Soc. Japan, **56-4** (2004), 967–991.

[BEW] B. C. Berndt, R. J. Evans and K. S. Williams, *Gauss and Jacobi Sums*, A Wiley-Interscience Publication CMSSMAT.**21** (1998).

[BorB] J. M. Borwein and D. M. Bradley, *Thirty-two Goldbach variations*, Intl. J. Number Theory **2** (2006), 65–103.

[BBB] J. M. Borwein, D. M. Bradley and D. J. Broadhurst, *Evaluations of k-fold Euler/Zagier sums: a compendium of results for arbitrary k*, Electron. J. Combin., **4** (1997), Research Paper 5.

[BBBL] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst, and P. Lisoněk, *Combinatorial aspects of multiple zeta values*, Electronic J. Combinatorics **5** (1998), Research paper 38, 12 pp.(electronic)

[BM] L. Boutet de Monvel, *Remarques sur les séries logarithmiques divergentes*, lecture at the workshop “Polylogarithmes et conjecture de Deligne-Ihara”, C.I.R.M. (Luminy), April 2000.

[BowB] D. Bowman and D. M. Bradley, *The algebra and combinatorics of shuffles and multiple zeta values*, J. Combin. Theory Ser. A **97** (2002), 43–61.

[Ch] S. Chowla, *On Kloosterman's sum*, Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **40** (1967), 70–72.

[Da] H. Davenport, *On certain exponential sums*, Crelles J. **169** (1933), 158–176.

[DG] P. Deligne and A. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **38** (2005), 1–56.

[Dr] V. G. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with Gal*$(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Leningrad Math. J. **2** (1991), 829–860.

[E] L. Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus*, Novi Comm. Acad. Sci. Petropol **20** (1775), 140–186, reprinted in Opera Omnia ser. I, vol. 15, B. G. Teubner, Berlin (1927), 217–267.

[Fi] B. Fisher, *Kloosterman sums as algebraic integers* , Math. Ann. **301** (1995), 485–505.

[Gau] C. F. Gauss, *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)} xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+1)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + etc.$, Pars prior. (1812), Werke III 125–162.

[Go] A. B. Goncharov, *Periods and mixed motives*, preprint (2002).

[Gr] A. Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, in London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambridge, 1997, pp. 95–101.

[HKT] M. Hashimoto, S. Kanemitsu and M. Toda, *On Gauss' formula for* $\psi$ *and finite expressions for the L-series at 1*, J. Math. Soc. Japan, **60-1** (2008), 219–236.

[H1] M. Hoffman, *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math., **152** (1992), 275–290.

[H2] M. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. of Algebra, **194** (1997), 477–495.

[HO] M. Hoffman and Y. Ohno, *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression*, J. of Algebra, **262** (2003), 332–347.

[IKOO] K. Ihara, J. Kajikawa, Y. Ohno and J. Okuda, *MZV vs. MZSV*, preprint.

[IKZ] K. Ihara, M. Kaneko, and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math., **142** (2006), 307–338,

[IT] K. Ihara and T. Takamuki, *The quantum* $\mathfrak{g}_2$ *invariant and relations of multiple zeta values*, J. Knot Theory and its Ramifications, **10** (2001), 983–997.

[ITTW] K. Imatomi, T. Tanaka, K. Tasaka and N. Wakabayashi, *On some combinations of multiple zeta-star values*, preprint.

[IR] K. Ireland and M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer-Verlag GTM. **85** (1990).

[Kaj] J. Kajikawa, *Duality and double shuffle relations of multiple zeta values*, J. Number Theory, **121** (2006), no. 1, 1–6.

[K] M. Kaneko, *A note on poly-Bernoulli numbers and multiple zeta values*, Diophantine analysis and related fields (DARF 2007/2008), 118–124, AIP Conf. Proc. 976, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2008.

[KNT] M. Kaneko, M. Noro and K. Tsurumaki, *On a conjecture for the dimension of the space of the multiple zeta values*, Software for Algebraic Geometry, IMA **148** (2008), 47–58.

[KO] M. Kaneko and Y. Ohno, *On a kind of duality of multiple zeta-star values*, preprint.

[Kat] N. M. Katz, *Gauss sum, Kloosterman sums, and monodromy groups*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, (1988).

[Kaw] G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, J. Number Theory, **129** (2009), 755–788.

[LM1] T. Q. T. Le and J. Murakami, *Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions*, Topology and its Applications, **62** (1995), 193–206.

[LM2] T. Q. T. Le and J. Murakami, *Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math. J. **142** (1996), 39–65.

[Mal] A. V. Malysev, *A generalization of Kloosterman sums and their estimates*, Vestnik. Leningrad. Univ. **15** (1960), no.13 59–75.

[Mat] K. Matsumoto, *On the analytic continuation of various multiple-zeta functions*, Number Theory for the Millennium (Urbana, 2000), Vol. II, M. A. Bennett et. al. (eds.), A. K. Peters, Natick, MA, 2002, pp. 417–440.

[Mu1] S. Muneta, *A note on evaluations of multiple zeta values*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 931–935.

[Mu2] S. Muneta, *On some explicit evaluations of multiple star-zeta values*, J. Number Theory, **128** (2008), 2538–2548.

[O] Y. Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. of Number Th., **74** (1999), 39–43.

[OW] Y. Ohno and N. Wakabayashi, *Cyclic sum of multiple zeta values*, Acta Arithmetica, **123** (2006), 289–295.

[OZ] Y. Ohno and D. Zagier, *Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height*, Indag. Math., **12** (4), (2001), 483–487.

[OU] J. Okuda and K. Ueno, *Relations for multiple zeta values and Mellin transforms of multiple polylogarithms*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **40** (2004), 537–564.

[Rac] G. Racinet, *Doubles melanges des polylogarithmes multiples aux racines de l' unite*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **95** (2002), 185–231.

[Ree] R. Ree, *Lie elements and an algebra associated with shuffles*, Ann. of Math., **68** (1958), 210–220.

[Rem] R. Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, Springer GTM **172**, 1998.

[Reu] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, Oxford Science Publications,1993.

[Ri] T. Rivoal, *La fonction Zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math., **331** (2000), 267–270.

[Sa] H. Salié, *Über die Kloostermanschen* $S(u, v; q)$, Math. Z. **34** (1932), 91–109.

[高] 高木貞治, 解析概論, 岩波書店.

[Ta] T. Takamuki, *The Kontsevich invariant and relations of multiple zeta values*, Kobe J. Math. **16** (1999), 27–43.

[TW] T. Tanaka and N. Wakabayashi, *An algebraic proof of the cyclic sum formula for multiple zeta values*, J. of Algebra, **323** (2010), 766–778.

[寺] 寺沢寛一, 自然科学者のための 数学概論, 岩波書店.

[Te] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. **149** (2002), 339–369.

[We] A. Weil, *On some exponential sums*, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. **34** (1948), 204–207.

[WW] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press.

[Y] C. Yamazaki, *On the duality for multiple zeta-star values of height 1*, preprint.

[Z0] D. Zagier, *Periods of modular forms, traces of Hecke operators, and multiple zeta values*, Research into automorphic forms and $L$-functions (Kyoto, 1992). RIMS Kokyuroku No. 843, (1993), 162–170.

[Z1] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, in ECM volume, Progress in Math., **120** (1994), 497–512.

[Z2] D. Zagier, *Multiple zeta values*, Unpublished manuscript, Bonn (1995).

[Zh] J. Zhao, *Analytic continuation of multiple zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1275–1283.

[Zl] S. A. Zlobin, *Generating functions for a multiple zeta function*(Russian), Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 2005, 55–59; English translation in Moscow Univ. Math. Bull. **60**(2005), 44–48.

以上挙げた文献はほぼ文中で引用したものに限られ，網羅的なものでは全くない．まえがきにも書いたように，Michael Hoffman が多重ゼータ値関連の論文情報を自身のホームページにおいて “References on Multiple Zeta Values and Euler Sums”

( http://www.nadn.navy.mil/Users/math/meh/biblio.html )

として公開している．興味にしたがってこちらをご覧頂きたい．電子的に入手可能なものにはリンクが張ってあり便利である．

## 謝辞

最後に，約9ヶ月間にわたるセミナーを通して色々な助言，協力を下さった研究員, 学生の諸君，特に若林徳子，田中立志，今冨耕太郎，田坂浩二の諸氏にはここに記して感謝を捧げたい．