

マス・フォア・インダストリ研究 No.14



ドレスト光子に関する基礎的数理研究

Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

Editors 佐久間 弘文
大津 元一
小嶋 泉
福本 康秀
山本 昌宏
納谷 昌之

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

About the Mathematics for Industry Research

The Mathematics for Industry Research was founded on the occasion of the certification of the Institute of Mathematics for Industry (IMI), established in April 2011, as a MEXT Joint Usage/Research Center – the Joint Research Center for Advanced and Fundamental Mathematics for Industry – by the Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology (MEXT) in April 2013. This series publishes mainly proceedings of workshops and conferences on Mathematics for Industry (MfI). Each volume includes surveys and reviews of MfI from new viewpoints as well as up-to-date research studies to support the development of MfI.

October 2018

Osamu Saeki

Director

Institute of Mathematics for Industry

Basic mathematical studies on dressed photon

Mathematics for Industry Research No.14, Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

ISSN 2188-286X

Editors: Takashi Takiguchi

Date of issue: 18 March 2019

Publisher:

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

Motooka 744, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0395, JAPAN

Tel +81-(0)92-802-4402, Fax +81-(0)92-802-4405

URL <http://www.imi.kyushu-u.ac.jp/>

Printed by

Social Welfare Service Corporation Fukuoka Colony

1-11-1, Midorigahama, Shingu-machi Kasuya-gun, Fukuoka, 811-0119, Japan

TEL +81-(0)92-962-0764 FAX +81-(0)92-962-0768

ドレスト光子に関する基礎的数理研究

編集 : 佐久間 弘文

大津 元一

小嶋 泉

福本 康秀

山本 昌宏

納谷 昌之

ドレスト光子に関する基礎的数理研究

九州大学IMI研究集会

伊都キャンパス ウェスト1号館D棟4階

IMI コンファレンスルーム (W1-D-414)
2020年2月18日(月)～19日(火)

1/3

何を目指すのか？

- ドレスト光子を介在としたオフシェル科学を提唱

On-shell (可視的) – **Off-shell** (非可視的)

電磁気学 (可視的なセクター) : 光子 (横波)

電磁気学 (非可視) : 仮想光子

量子光学では、これを取り扱ってこなかった !!

- 昨年度までのRODrePにおける系統別アプローチ

[1] 実験結果との比較 (大津、川添、坂野 関連)

[2] 場の量子論から見たDP理論の統一的理解 (小嶋 関連)

[3] [2]の一部としての空間的運動量の寄与の重要性 (佐久間 関連)

[4] 昨年から本格化した、量子ウォークモデルの研究 (西郷、瀬川、三宮 関連)

2/3

テーマ別の発表スケジュール

- 第1日目：項目 [1] の実験的研究に関するもの（大津先生の key note speech、納谷先生招待講演、坂野先生の発表）、及び連携研究の発表（矢吹先生、福本先生）
- 第2日目：理論およびシミュレーション関連の発表。（ドレスト光子の理論研究に対する小嶋先生の key note speech、佐久間、落合先生、西郷先生、瀬川先生、三宮研究員）

九州大学 IMI 共同利用・研究集会 (II)

ドレスト光子に関する基礎的数値研究

日時： 2019年2月18日 (月) 12:50 ~ 2月19日 (火) 16:15

場所： 九州大学 伊都キャンパス ウェスト1号館 D棟4階

IMI コンファレンスルーム (W1-D-414)

1日目【2月18日(月)】

12:50 ~ 13:00

Opening remarks by H. Sakuma (Research Origin for Dressed Photon)

佐久間弘文 ((一社) ドレスト光子研究起点)

13:00 ~ 13:45

Keynote talk [I] by M. Ohtsu (Research Origin for Dressed Photon)

大津元一 ((一社) ドレスト光子研究起点)

Recent Progress in Experimental Studies on Dressed Photons and Expectation to Off-shell Science

ドレスト光子の実験研究の最新状況とオフシェル科学への期待

13:45 ~ 14:30

Invited talk by M. Naya (FUJIFILM Corporation) :

納谷昌之 (富士フイルム株式会社)

Concept of designing the optical near field system

光近接場設計の概念

14:30 ~ 15:15

Itsuki Banno (University of Yamanashi)

坂野齋 (山梨大学)

Dressed Photon Phenomena originated in Non-commutative Field

場の非可換性を起源とするドレスト光子の現象

15:15 ~ 15:45 休憩

15:45 ~ 16:30

Tetsuo Yabuki (Hokusei Gakuen University)

矢吹哲夫 (北星学園大学)

A theoretical study on the longitudinal-transverse character and off shell-on shell conditions of photon in matter fields = as a search for the dressed photon generating mechanism=

物質場の中での光子の縦波と横波、オフシェルとオンシェルの一考察=ドレスト光子のメカニズムへの一探索として=

16:30 ~ 17:15

Yasuhide Fukumoto (Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University)

Thi Thai LE (Graduate School of Mathematics, Kyushu University)

福本康秀 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)

Thi Thai LE (九州大学大学院数理学府)

Effect of side walls on the Kelvin-Helmholtz instability of a shallow-water flow

浅水流のケルヴィン・ヘルムホルツ不安定性に対する側壁の効果

17:15 ~ 18:00

1日目発表に関する総合討論

2日目【2月19日(火)】

10:00 ~ 10:45

Keynote talk [II] by Izumi Ojima (Research Origin for Dressed Photon)

小嶋泉 ((一社) ドレスト光子研究起点)

Theoretical Formulation of Dressed Photon

ドレスト光子の理論的定式化

10:45 ~ 11:30

Hirofumi Sakuma (Research Origin for Dressed Photon)

佐久間弘文 ((一社) ドレスト光子研究起点)

On the problem of quantization of Clebsch dual field and a quantized representation of dressed photon.

クレブシュ双対場の量子化に関わる問題とドレスト光子の量子的表現について

11:30 ~ 12:15

Hiroyuki Ochiai, Institute of mathematics for industry, Kyushu University

落合啓之 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)

Symmetry raised from dressed photon

ドレスト光子の対称性

12:15 ~ 13:30 昼休み

13:30 ~ 14:15

Hayato Saigo, Nagahama Institute of Bio-Science and Technology

西郷甲矢人 (長浜バイオ大学)

From Quantum Probability to Dressed Photons

量子確率論からドレスト光子へ

14:15 ~ 15:00

Etsuo Segawa, Yokohama National University

瀬川悦生 (横浜国立大学)

A characterization of the fixed point of a dynamical system induced by quantum walk

量子ウォークから誘導される力学系における固定点の特徴づけ

15:00 ~ 15:45

Suguru Sangu, Ricoh Co., Ltd

三宮俊 (株式会社リコー)

Numerical Simulation of dressed Photons: Evaluation of Energy-Transfer Dynamics and its Control

ドレスト光子シミュレーション: エネルギー移動特性の評価および制御

15:45 ~ (16:15)

Wrap up discussions

総合討論

Table of contents

ドレスト光子の実験研究の最新状況とオフシェル科学への期待	1
大津 元一 ((一社) ドレスト光子研究起点)	
光近接場設計の概念	23
納谷 昌之 (富士フイルム株式会社 R&D 統括本部 先端コア技術研究所)	
場の非可換性を起源とするドレスト光子の現象	41
坂野 斎 (山梨大学工学部)	
物質場の中での光子の縦波と横波、オフシェルとオンシェルの一考察 =ドレスト光子のメカニズムへの一探求として=	67
矢吹 哲夫 (北星学園大学 全学共通教育部門)	
浅水流のケルヴィン・ヘルムホルツ不安定性に対する側壁の効果	91
福本 康秀 (九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所) Thi Thai LE (九州大学大学院数理学府)	
ドレスト光子の理論的定式化	105
小嶋 泉 ((一社) ドレスト光子研究起点)	
クレブシュ双対場の量子化に関わる問題とドレスト光子の量子的表現について	127
佐久間 弘文 ((一社) ドレスト光子研究起点)	
ドレスト光子の対称性	149
落合 啓之 (九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所)	
量子確率論からドレスト光子へ	157
西郷 甲矢人 (長浜バイオ大学)	
量子ウォークから誘導される力学系における固定点の特徴付け	179
瀬川 悦生 (横浜国立大学)	
ドレスト光子シュミレーション：エネルギー移動特性の評価および制御	205
三宮 俊 (株式会社リコー)	

ドレスト光子の実験研究の最新状況と オフシェル科学への期待

大津元一

(一社)ドレスト光子研究起点

〒221-0022 神奈川県横浜市神奈川区守屋町 3-13-19

電子メール: ohtsu@rodrep.or.jp

Recent Progress in Experimental Studies on Dressed Photons and Expectation to Off-shell Science

Motoichi OHTSU*

* (Gen. Incor. Assoc.) Research Origin for Dressed Photon

3-13-19 Moriya-cho, Kanagawa-ku, Yokohama-shi, Kanagawa 221-0022, Japan

E-mail: ohtsu@rodrep.or.jp

概要

ナノ寸法の複合系量子場であるドレスト光子と自由光子の差異、ドレスト光子に関するこれまでの理論研究の概要、応用技術の発展について記す。これらの記述をもとにドレスト光子に起因する 16 の現象を提示し、これが光科学の 5 つの通説と背反することを指摘する。ドレスト光子を記述するには従来のオンシェル科学ではなく、オフシェル科学の理論が不可欠であることを示す。

Abstract

Recent results of the theoretical and experimental studies on dressed photon are reported by pointing out that this photon is the quantum field of the nanometric complex system. Novel sixteen phenomena, originated from the dressed photon, are presented, which are incompatible with five common views of conventional optical science. It is pointed out that novel theory based on the off-shell science is indispensable for further progress of the dressed photon study.

1 まえがき

本稿の目的はドレスト光子（以下 DP と略記）に起因する 16 の現象の提示(以下では下線と【現象 XX】で表記)、これが表 1.1 に示す光科学の 5 つの通説と背反することの指摘、従ってオフシエル科学が不可欠であることの指摘である。

表 1.1 光に関連する通説

番号	内 容
I	光は空間を伝搬する波であり空間に広がって満ちている。その寸法は光の波長に比べてずっと大きい。
II	光の波長より小さい物質の観測、加工はできない。たとえそれらの小さな物質を組み合わせても光の波長より小さい光デバイスは機能しない。
III	光で電子を励起するとき、光子エネルギーは電子の二つのエネルギー準位間のエネルギー差以上の値を持たなくてはならない。
IV	電子の二つのエネルギー準位間の遷移が電気双極子禁制の場合、光により両準位間を遷移させることはできない。
V	シリコン結晶の発光効率は低く、光デバイス材料として使用困難である。

DP^{1,2)}を生成するにはナノ物質 1 に光を照射する(図 1(a))。その時、DP はナノ物質の境界面(物質の表面など)に生成し、そこに局在する(局在量子場)【現象 1】。これは表 1.1 の光科学の通説 I と背反する。DP を観測するにはナノ物質 2 を上記の DP の場に挿入し、DP を散乱光に変換する(図 1(b))。

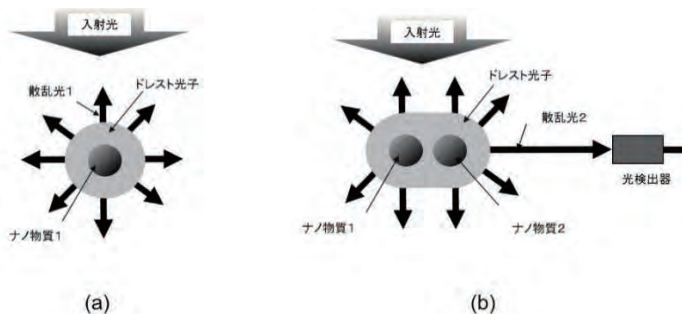


図 1 ドレスト光子 (DP)。 (a) 生成。 (b) 観測。

上記の背反性は電磁場の分散関係から理解することができる(図 2)。従来の光科学では場の運動量とエネルギーの関係は確定しており、分散関係は質量シェル上にある。すなわちオンシェル状態である。一方、DP では現象 1 によればその寸法が小さいことから、運動量の不確定性が大きい。運動量とエネルギーは互いに結びついていることから、エネルギーの不確定性も大きい(短時間で生成消滅を繰り返す仮想量子場)。運動量とエネルギーの不確定性が大きいことは上記の質量シェルから逸脱しており、オフシェル状態にあることを意味する。すなわち局在量子場と仮想量子場の統一的描像が DP である。DP を一例としオフシェル領域の量子場を記述するオフシェル科学の進展が望まれる。

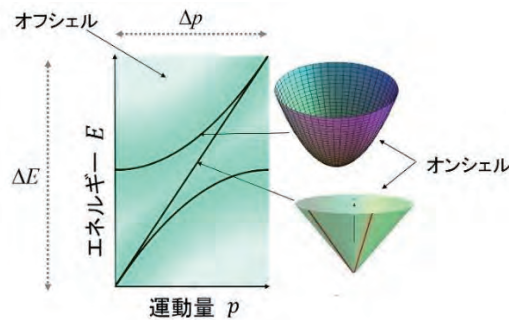


図 2 電磁場の分散関係

2 これまでの理論的検討

2.1 DP の生成・消滅、フォノンとの結合

ここでの問題は DP の寸法が光波長以下であることから、電磁場のモードが定義できないこと、ハミルトニアンが導出できないことである。当面の解決策として、電磁場を無限数のモードの重ね合わせで表現し、それがナノ物質中の無限数のエネルギー準位の励起子と相互作用すると考える。すなわちオンシェル科学の理論手法を借用してオフシェル状態の光を記述するのである。その結果、DP の生成、消滅演算子が導出された。それはナノ物質に入射する光の演算子と励起子の演算子との和で表される。すなわちナノ物質の励起エネルギーの衣をまとった光子として表されることから、この量子場を DP と称するのである。DP はさらにまた物質中の多モードのコヒーレント状態のフォノンとも結

合することが示されている。

2.2 ドレスト光子の空間的局在

二つのナノ物質とドレスト光子からなる微視系は巨視系（巨視的寸法物質と入射する巨視的電磁場からなる）に囲まれていると仮定する（これはナノ物質が真空中に置かれた場合は記述不可であることを意味する）。このとき、DP のエネルギーは一方のナノ物質から巨視系を経て他方のナノ物質に移動すると考え、繰り込みの方法により巨視系の影響を二つのナノ物質間の有効相互作用として取り込む。ここで巨視的寸法物質中の励起子ポラリトンのエネルギーが運動量の二乗に比例すると仮定する。その結果、有効相互作用エネルギーは湯川型の関数で表され、DP の局在寸法がナノ物質寸法に相当することが示される。

3 応用技術と新規現象の発見

以下では DP を応用した技術の紹介を通じて新規な現象を順次提示していく。

3.1 顕微分光技術

【現象 1】に基づき、DP 発生と観測のために多様なファイバプローブが開発され、これを用いて顕微分光装置が開発されている。この装置では DP は近接するナノ物質間で双方向に移動する【現象 2】ことが使われている。装置が開発され、バクテリアの鞭毛や単一 DNA の画像が取得されている(図 3)。これは表 1.1 の光科学の通説 II と背反する。この装置は市販され、社会の需要にこたえている。

ここで注意すべきは DP の移動の効率はナノ物質 1(ファイバプローブ先端)の寸法とナノ物質 2(測定試料)の寸法とが等しい時に最大となる【現象 3】ことである。これは DP の運動量保存則である。これにより、上記の画像の空間フーリエ周波数特性は帯域通過型フィルタ特性を示す(図 4)。中心周波数はファイバプローブ先端寸法に対応する。これはレンズを用いた従来の光学顕微鏡の性質(波長を遮断周波数とする低域通過型フィルタ特性とは異なる。すなわち DP を使った顕微鏡像は従来の光学顕微鏡像とは相関がない。なお試料観測の際に注意すべ

きは DP の場合は測定のためのプローブを挿入すると大きく乱される【現象 4】 ことである。

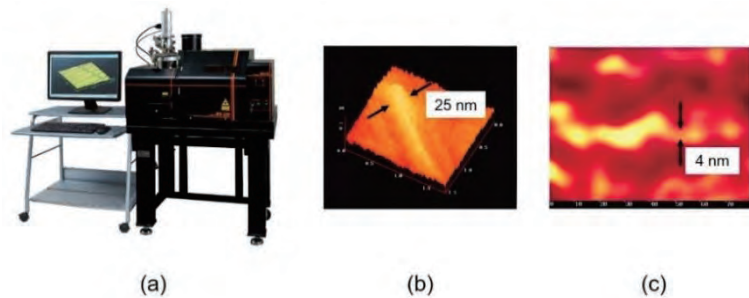


図 3 ドレスト光子を使った顕微鏡と得られた画像

(a) 顕微鏡装置 (JASCO NFS-330 型) (写真は日本分光 (株) のご厚意による)

(b) サルモネラ菌の鞭毛像。(c) DNA 像

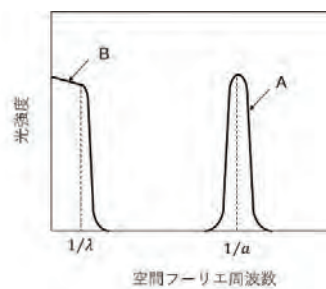


図 4 測定された光強度の空間フーリエ周波数依存性。

曲線 A はドレスト光子を使った場合、曲線 B は従来の光学顕微鏡のもの。

a はファイバプローブ先端の寸法。 λ は光の波長。

さらにまた DP の移動には階層性がある【現象 5】 ことが見いだされている。すなわちファイバプローブ先端に生成される小さな DP は小さな寸法の測定試料に、根本付近に生成される大きな DP は大きな寸法の測定試料に移動する (図 5)。したがって画像の空間分解能はファイバプローブ・試料間距離の値に依存する。

3.2 微細加工技術

3.1 の知見をもとに微細加工技術が開発されている。ここで得られた成果は表 1.1 の光科学の通説 II と背反する。

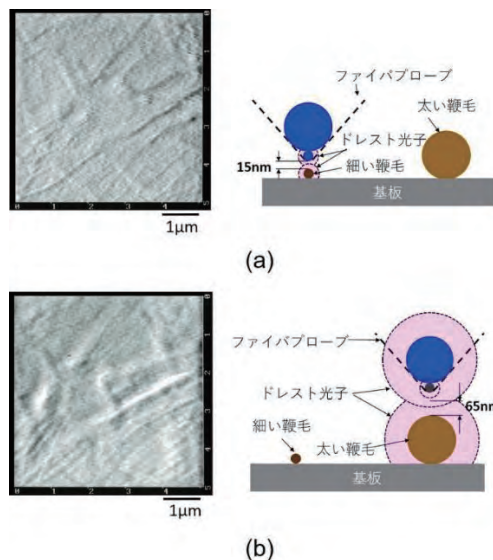


図5 サルモネラ菌の複数の鞭毛の像とその断面形状の説明。

(a), (b)はファイバプローブ先端とサルモネラ菌との距離が各々15nm, 65nm。

3.2.1 ファイバプローブを使う方法

まず原理説明のためにファイバプローブを使った微細加工技術の例を説明する。それは DP を用いた光化学気相堆積技術である。これには、DP で電子を励起するとき、DP を生成するための光源の光子エネルギーは電子の励起エネルギー以下でよい【現象 6】を使う。これはこれは表 1.1 の光科学の通説Ⅲと背反する。この現象を用い可視光源によりファイバプローブ先端に生成した DP により DEZn 分子が分解され、Zn のナノ物質が基板上に堆積されている(図 6(a)-(c))。さらに電子遷移は電気双極子禁制でよい【現象 7】ことも使う。これは表 1.1 の光科学の通説Ⅳと相反する。しかし光学不活性の $Zn(acac)_2$ 分子が DP により分離され、Zn のナノ物質が堆積されている(図 6(d)、(e))。

堆積時間の増加と共に堆積率が増加し、それはナノ物質の寸法がファイバプローブ先端寸法と等しい時に最大となることが見いだされた(図 7)。これは上記の【現象 3】(DP の運動量保存則)に他ならない。さらに堆積時間を増加させると、堆積率は 0 に漸近する。すなわちナノ物質の寸法は一定値に漸近する。この値より DP の寸法の最大値は 50 ~ 70nm である【現象 8】 ことが見いだされている。

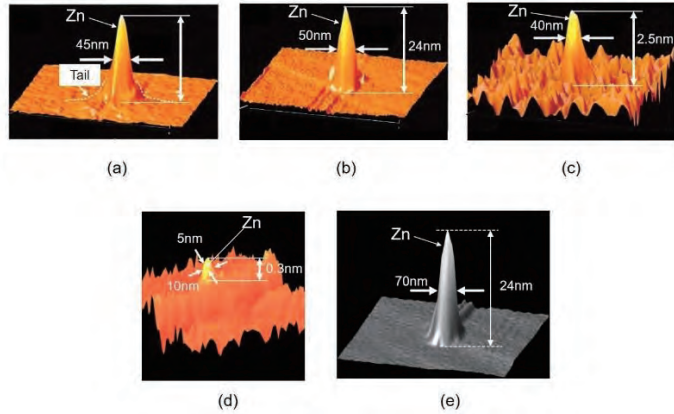


図6 ドレスト光子による Zn のナノ物質の化学気相堆積

(a)、(b)、(c) DEZn の分解によりサファイア基板の上に形成された亜鉛のナノ物質（入射光波長は各々 325nm、488nm、684nm）。(d)、(e) Zn(acac)₂ の分解による（入射光波長は 457nm）。入射光パワー×光照射時間は各々 1.95mW・秒、15 mW・秒。

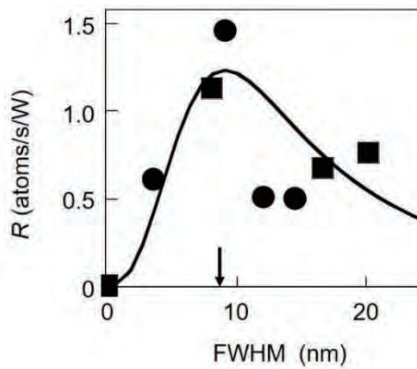


図7 ナノ物質寸法の半値幅（光照射時間に比例）と亜鉛原子の堆積率との関係。

●、■は測定値。曲線は理論値。下向き矢印はファイバプローブ先端の寸法。

3.2.2 ファイバプローブが不要な方法

ファイバプローブなどの不要な微細加工技術は大きな加工速度が確保でき、実用的である。その例として物質表面平坦化を紹介する。これには表面に凹凸のある物質に光を照射し【現象1】により凸部に DP を生成する。例えば塩素分子をこの DP により解離する。その結果生成された塩素原子は化学反応性が高く、突起部をエッチングする（ドライエ

ッティング)。この化学反応は物質表面に光を照射すると自動的に開始し、平坦化され DP が生成しなくなると自律的に終了する。ここでは【現象 6】を用い、可視光源を使うことができる。合成石英基板の表面が面粗さ 1 Å 程度まで平坦化された(図 8)。

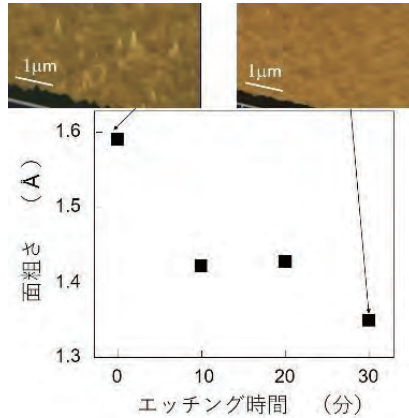


図 8 石英ガラス基板(直径 30 mm の円形)の平坦化結果。上部の図は AFM 像。

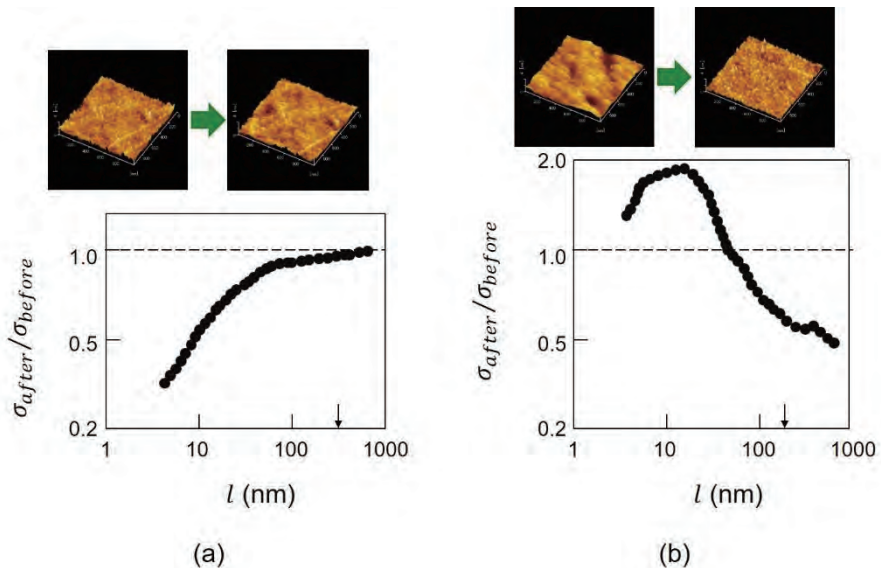


図 9 PMMA の表面の平坦化結果。

(a)波長 325nm の光により生成された DP を使用。(b)波長 213nm の光を使った通常のエッチング。上図はエッチング前後の表面形状。下図はエッチング前後の標準偏差値の比。下向き矢印はエッチングに用光源波長値に等しい l の値 ((a)は 325nm、(b)は 213nm)。

酸素分子を用いた PMMA 基板の平坦化の場合にも【現象 6】により可視光源から生成された DP が利用できる。平坦化の結果、50~70nm 以下の周期を持つ凹凸が選択的に小さくなることを見いだされた (図 9)。これにより【現象 8】が再確認される。

3.3 ナノ寸法の光デバイス

ここで紹介する技術は表 1.1 の光科学の通説 II と背反する。しかしここでは【現象 2】、【現象 7】に基づきそれが可能となっている。例えば大きさの異なる二つの半導体ナノ物質の一方を入力端子、他方を出力端子として用いる (図 10)。入射光による励起子の励起、DP の発生、そのナノ物質間移動、緩和により出力光が生成される。

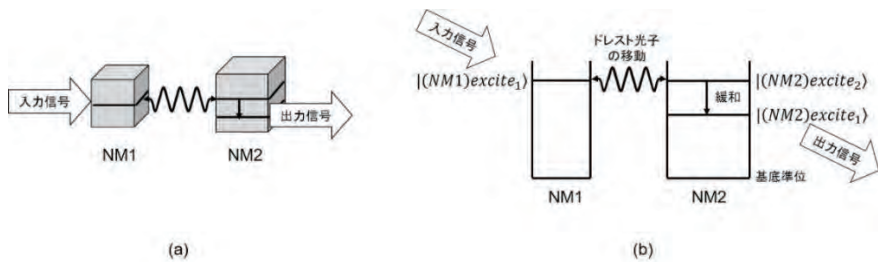


図 10 光デバイスの原理。(a)構成。(b)励起子のエネルギー準位。

DP のエネルギー移動を制御するための第三のナノ物質を用いることにより、光スイッチ (AND ゲート) などの光論理機能が実現する (図 11)。CuCl ナノ物質を低温で使い、光スイッチ動作が確認されている (図 12)。実用的デバイスの実現のために室温で動作する InAs ナノ物質を用い、AND ゲート、NOT ゲートの二次元配列集積デバイスが開発されている (図 13)。

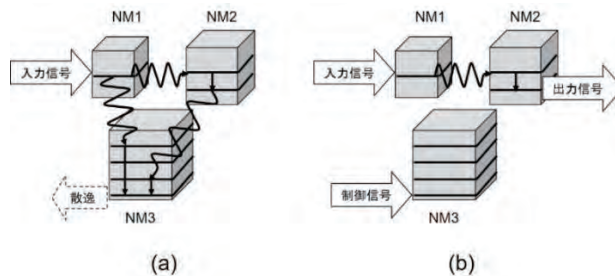


図 11 光スイッチ。(a)オフ動作。(b)オン動作。

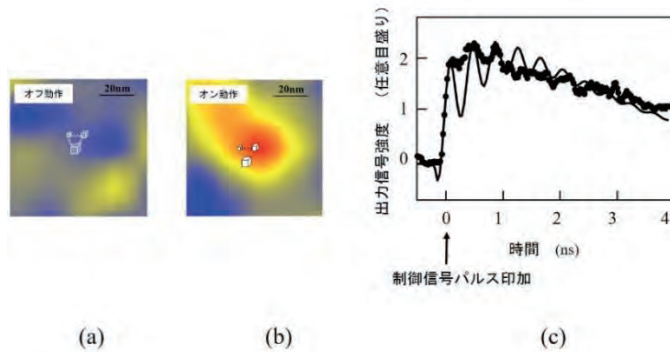


図 12 CuCl を用いた光スイッチ。

(a) オフ動作。(b) オン動作。(c) 出力信号強度の時間変化。

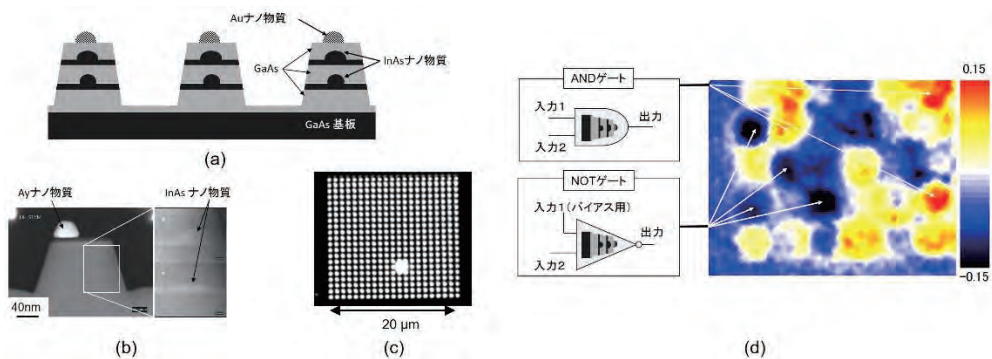


図 13 InAs を用いた光デバイス。

(a) 断面構成図。(b) デバイス断面の走査型透過電子顕微鏡像。(c) 複数のデバイスの二次元配列の光学顕微鏡像。(d) 二次元配列からの出力信号光強度の空間分布。

さらに DP はナノ物質間を自律的に移動する【現象 9】ことを利用しナノ集光器が開発されている(図 14)。大きさの異なる複数のナノ物質全体に伝搬光を照射すると、小型ナノ物質から中型ナノ物質へ、そして大型ナノ物質へと DP のエネルギーが自律的に移動し、最後には大型ナノ物質中での励起子のエネルギー緩和を経て光放射が生ずる。すなわち照射光のエネルギーは大型ナノ物質に集光される。CuCl のナノ物質を使った実験により、約 1ns の時定数で集光されることが確認されている。

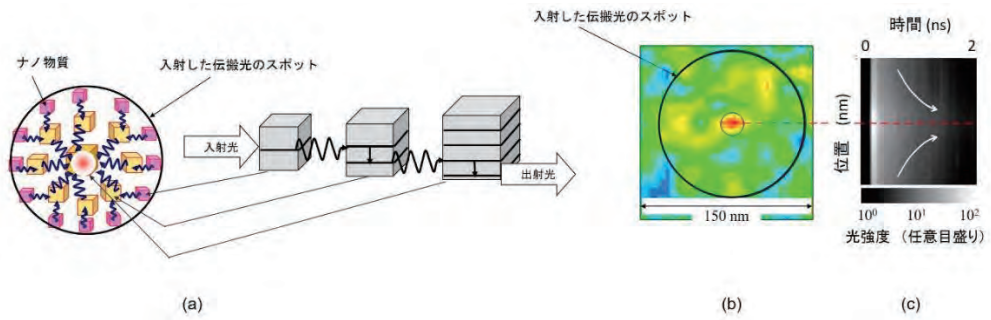


図 14 ナノ集光路。

(a)構成例。(b)、(c)CuCl を用いたデバイス。大型ナノ物質からの発光強度の値の空間分布、その時間変化。

同じく【現象 9】を用いてエネルギー伝送路が開発されている(図 15)。同寸法の小型ナノ物質を並べ、それに伝搬光を照射するとこれらのナノ物質間で DP エネルギーが移動する。すなわちこれらのナノ物質がエネルギー伝送路となる。これらのナノ物質の末尾に大型ナノ物質を置く。これが上記の光スイッチ (AND ゲート) の場合と同様、出力端子となる。このデバイスは次の二つの利点を有する：(1) 反射損失は無い。なぜならば出力信号発生の際、励起子のエネルギー緩和が起こるので、出力信号が次段のデバイスで反射され、この出力信号に再入射しても前段のエネルギー伝送路部分へ逆流しないからである。(2) 伝送損失はない。なぜならば小型ナノ物質間での DP エネルギー移動の際に励起子のエネルギー緩和が無いからである。その結果長距離伝送が可能となる。

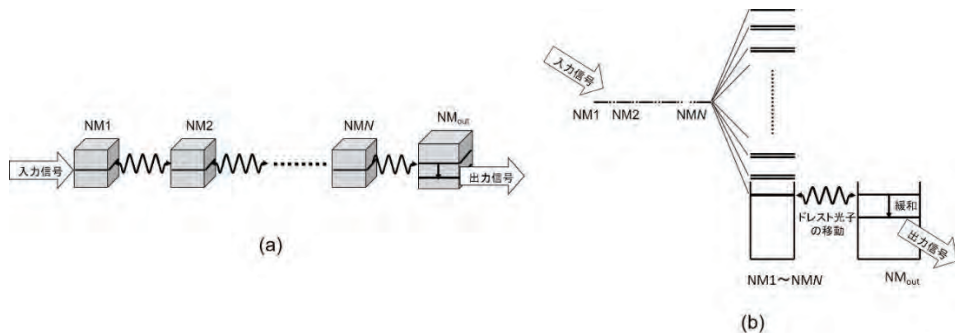


図 15 エネルギー伝送路。(a)構成。(b)励起子のエネルギー準位。

小型ナノ物質を規則正しく配列するのは技術的に困難なので、実際にはこれらを基板の上にランダムに分散させ、その中に出力端子としての大型ナノ物質を置く(図 16)。小型ナノ物質に伝搬光を照射すると、生成した DP はナノ物質間を自律的に移動し【現象 9】、大型ナノ物質に達して出力信号を発する。CdSe ナノ物質を使った実験では伝送距離数 μm に達し、上記の長距離伝送が確認された。

3.4 エネルギー変換

ここでは光エネルギーから光エネルギーへの変換、電気エネルギーから光エネルギーへの変換の技術を示す。

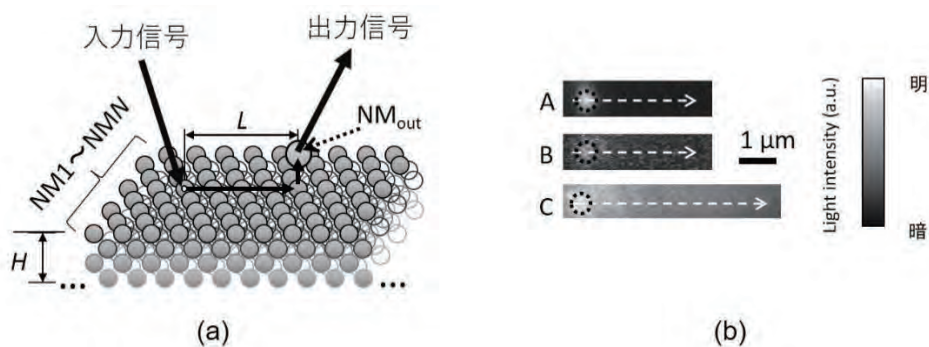


図 16 不規則かつ多層に配置されたナノ物質によるエネルギー伝送路。
(a)構成。(b)発光強度分布。A, B, C は多層の厚さ H が 10nm, 20nm, 50nm。

3.4.1 光エネルギーから光エネルギーへの変換

光エネルギー下方変換について示そう。原理は上記のナノ寸法の光デバイスと同様である。ここでは入力端子として ZnO ナノ物質、出力端子として DCM 色素のナノ物質を使い、これらを透明フィルムに分散する。紫外線を入射すると生成した DP は ZnO から DCM に移動し、エネルギー緩和後、可視光を放出する。すなわち紫外線(波長 300-350 nm)から可視光(波長 560 nm)への光エネルギー下方変換が実現する。両ナノ物質が分散されたフィルムの励起スペクトルは、ZnO または DCM のみが分散された場合の励起スペクトルよりも 10 倍以上の発光強度(波長 560nm において)を示し(図 17)、効率の良い変換が確認されている。

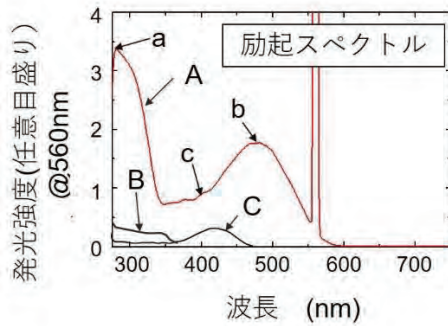


図 17 励起スペクトル。

曲線 A は ZnO ナノ物質、DCM ナノ物質を分散した透明フィルム。曲線 B、C は各々 ZnO ナノ物質のみ、DCM ナノ物質のみを分散した透明フィルム。

このフィルム中での ZnO から DCM への DP エネルギー移動の時間変化特性を測定したところ、その時定数は 100~150ps であった。これは蛍光の時定数(放射緩和時定数：数 ns~10ns)よりずっと短い(図 18)。このことから DP のエネルギー移動の時間変化はランダムウォークのそれより急峻である【現象 10】 ことが確認された。なお上記の二つの時定数の値の間には大きな差があることからこのフィルムの光エネルギー下方変換効率は 90%-95%に達すると推定された。

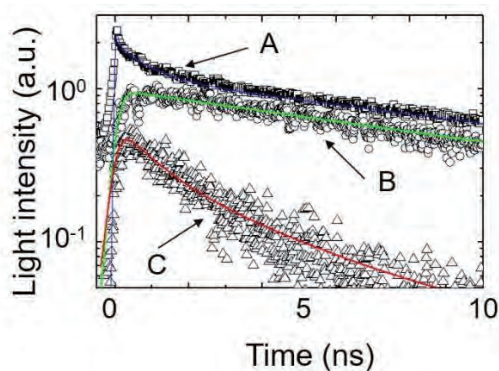


図 18 光強度の時間変化。

応用例としてこのフィルムを市販の実用的な Si 太陽電池(面積 156 mm × 156 mm、公称の光電変換効率 18.1 %)の表面に搭載すると、20.0 %に達する高い光電変換効率を得られた(図 19)。これは公称の光

電変換効率から 1.9 %増加している。さらに効率を増加させるため、最近では DCM ナノ粒子を BBQ ナノ粒子に取り換えたフィルムが開発された。これにより波長 300-350 nm の紫外線が波長 450 nm の可視光に効率よく変換される。これにより上記の Si 太陽電池の光電変換効率は 20.2 %、すなわち 2.1 %の増加が実現した。20%を超える効率の値は従来の Si 太陽電池では実現していなかったことに注意されたい。

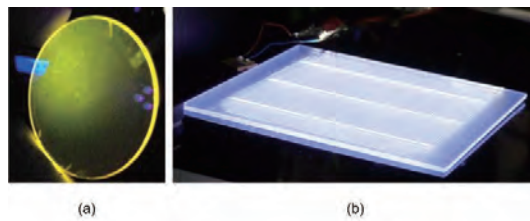


図 19 透明フィルムの外観。

(a) ZnO と DCM ナノ物質を分散。(b) ZnO と BBQ ナノ物質を分散。

3.4.2 電気エネルギーから光エネルギーの変換

発光ダイオード、レーザー、さらに SiC 結晶を用いた偏光回転デバイスについて報告する³⁾。

[1] 赤外域の Si 発光ダイオード

Si は間接遷移型半導体であるため発光デバイスには半世紀以上にわたり不適と考えられてきた。なぜなら発光のためには電子と正孔が再結合する必要があるが、Si の伝導帯の底と価電子帯の頂上は逆格子空間で異なる位置にあるので、電子・正孔対とフォノンとの相互作用により運動量保存則を満たさなければならないからである。しかしこの相互作用確率は極めて低いのである。しかし長年にわたるこの問題は DP を使うことによりついに解決した。なぜならば DP 中のフォノンは運動量保存則を満たすために伝導帯の電子に運動量を供給するからである。

DP はデバイスの製作と動作に使われる。まず製作方法を説明しよう。n 型 Si 結晶の表面に B 原子をドーピングし、その部分を p 型に変えて p n ホモ接合を形成する。この結晶を DP 援用アニールと呼ばれる方法で加工する：順方向電流によりデバイスをジュール加熱し、B 原子を

拡散させる。その際、結晶表面に光を照射する（ここでは波長 $1.342 \mu\text{m}$ ）。この光が p n ホモ接合に到達すると DP が B 原子（物質内の特異点）に生成され、フォノンと結合して局在する。すなわち DP はナノ物質の特異点（物質内の異質物、不純物原子など）に生成しそこに局在する【現象 11】。DP 中のフォノンは近隣の電子に運動量を供給するので、この電子は運動量保存則を満たして光子を生成する。発生した光は結晶の外に伝搬していくが、これにより B 原子拡散のために供給されたジュールエネルギーの一部が光エネルギーの形で散逸する。その結果、結晶は局所的に冷却され、拡散速度が減少する。ジュールエネルギーによる加熱と発光による冷却の釣り合いによって B 原子の空間分布は自律的に変化し、定常状態へと達する。すなわち Si 結晶中の異質物である B 原子の空間分布は DP 援用アニールによって自律的に変化し、Si 結晶の発光のための最適な分布を形成する【現象 12】。

精査 k されたデバイスを動作させるには従来の発光ダイオードの動作と同じく順方向電流を注入すればよい。この順方向電流は p n ホモ接合の伝導帯に電子を注入し、確率が低いとはいえ自然放出により光子を生成する。しかし一旦生成されると p n ホモ接合の中の B 原子に DP が生成される。DP は伝導帯中の近隣の電子と相互作用しフォノンの運動量を供給して第二の光子を生成する。この運動量供給と光子生成を繰り返すことにより発光強度は増幅され短時間の間に定常状態に達し、一定パワーの光が放出されるのである。

作製されたデバイス（面積 $0.35\text{mm} \times 0.35 \text{mm}$ ）への注入電流 3.0A のとき、最高パワー 2.0W が得られている（基板温度 77K ）。室温動作（ 283K ）の場合でも出力光パワーは 200mW という高い値が得られている。

基板温度 283K における発光スペクトルは $E_g - nE_{\text{phonon}}$ においてピークを示している（図 20）（ n は整数、 E_{phonon} はフォノンのエネルギー）。 $E_g - 3E_{\text{phonon}}$ におけるピークは DP 援用アニールの際に照射された光のエネルギー $h\nu_{\text{anneal}}$ に対応する。この対応は光子ブリーディング効果と呼ばれている。つまり DP 援用アニールにより製作された発光デバイスは

光子ブリーディング効果を示す。すなわち発光の光子エネルギーはアニールの際の照射光の光子エネルギーに等しい【現象 13】

$E_g - 3E_{\text{phonon}}$ は発光に三つのフォノンが寄与することを意味している。 $E_g - 6E_{\text{phonon}}$ 、 $E_g - 9E_{\text{phonon}}$ におけるピークはこのフォノンの寄与の高調波成分である。これらのスペクトルピークは他の基板温度でも同様に観測されている。

光子ブリーディング効果は DP 援用アニールの際に自律的に制御された B 原子の空間分布に起因する。p n ホモ接合における B 原子の 3 次元空間分布の測定結果より、B 原子は長さ $d = 3a$ の対を作りやすく、またその対は Si 結晶の表面に平行な面内に並びやすいことが分かった。ここで a ($=0.54 \text{ nm}$) は Si 結晶の格子定数である。すなわち DP 援用アニールにより Si 結晶中の B 原子対の長さ、方向、さらにその鎖状の配列形状が自律的に制御される【現象 14】。

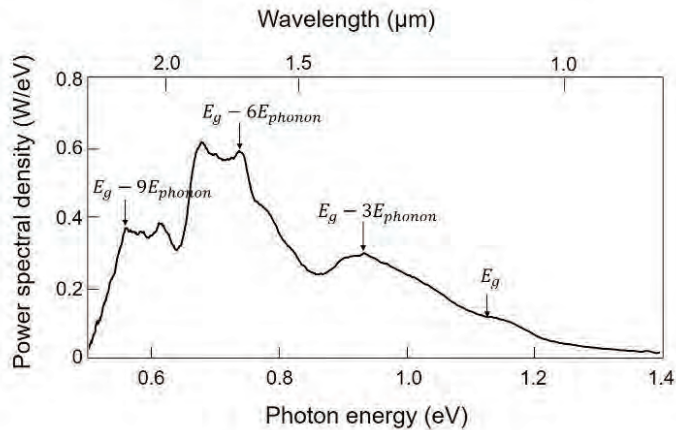


図 20 製作された Si 発光ダイオードの出力光のスペクトル

Si 結晶は多重立方格子からなっており、伝導帯の底の X 点における電子と価電子帯の頂上の Γ 点における正孔との間の再結合に必要なフォノンの運動量の値は h/a であることに注意しよう。さらに、長さ $d = 3a$ の B 原子対のところに局在するモードのフォノンの運動量の値は $h/3a$ であることにも注意しよう。これらの二つの値を比べると、この B 原子対のところに生成、局在するドレスト光子は再結合のため

に3つのフォノンを生成しなければならないことがわかる。その結果、発光の光子エネルギー $h\nu_{em}$ は $h\nu_{em} = E_g - 3E_{phonon}$ となる。 E_g の値 (=1.12eV) および関連する光学フォノンのエネルギー E_{phonon} (=65meV) の値をこの式に代入すると、 $h\nu_{em}$ の値は 0.93 eV になる。これは DP 援用アニールの際に照射した光の光子エネルギー $h\nu_{anneal}$ (=0.95eV) とほぼ等しい。以上の特徴は図 20 のスペクトルの性質と整合する。この数値関係により光子エネルギーに関する光子ブリーディング効果が発生していることが確認された。

光子ブリーディング効果は光子エネルギーのみでなく光子スピ
ンに関しても観測された。すなわち発光の偏光は DP 援用アニール時の
照射光の偏光と同等である。たとえば DP 援用アニールの際に Si 結晶
表面を直線偏光で照射した場合、発光も同じ方向の直線偏光になりや
すい。この場合、B 原子の空間分布を解析すると、長さ $d = 3a$ の B 原子
対が形成されやすく、またその対の方向は照射光の直線偏光の方向と
直交する方向を向きやすいことが分かった。発光の偏光が誘起される
原因は次のとおりである：第一に DP 援用アニールにより Si-LED を作
るとき、B 原子対のところに横光学フォノンが生成され DP と結合する。
これらのフォノンの振動方向は DP 援用アニールの際の照射光の偏光
の電場の方向と平行である。次に LED を動作させるとき、これらのフ
ォノンが再び生成されるので、発光の電場ベクトルの方向もまたこれ
らのフォノンの振動方向と平行になる。従って発光の偏光方向は DP 援
用アニール時の照射光のそれと同等になる。

[2] 可視域の発光ダイオード

光子ブリーディング効果を使って、Si 結晶を用いて多様な LED が作ら
れている。特に青、緑、赤の光を発する LED が DP 援用アニールの際、
青、緑、赤の光を照射して作られた。この可視光の取り出し効率を上
げるため横方向 p n ホモ接合が開発された。SiC 結晶も典型的な間接
遷移型半導体として知られている。この材料を用いても多様な可視 LED
が作られている。DP 援用アニール時に UV-紫、青白、青、緑の光を照
射することにより作られ、UV-紫、青白、青、緑の光を放射する。

[3] 赤外域の Si レーザー

Si 結晶を用い簡単なリッジ導波路を作りつけ、端面をファブリペロー共振器の鏡として使う赤外レーザーが製作された。波長 $1.3\ \mu\text{m}$ の光を照射して DP 援用アニールを行う。作成されたレーザーに電流を注入すると、発振しきい値以上では鋭いレーザースペクトルが観測される (図 21(a))。レーザー発振波長はドレスト光子援用アニールの際の照射光と同じく $1.3\ \mu\text{m}$ であり、光子ブリーディング効果が現れている。このスペクトルは共振器長が $550\ \mu\text{m}$ と長いにもかかわらず室温での単一縦モード発振を示している。この単一縦モード発振の起源は Si 結晶の赤外吸収が小さいので利得スペクトルピーク付近での主縦モードの発振しきい値が小さくなることである。その結果、非線形モード競合により他モードの利得が枯渇されるのである。発振しきい値以下では増幅自然放出が生じておらず (図 21(b))、これは上記のモード競合による利得の枯渇の証左である。

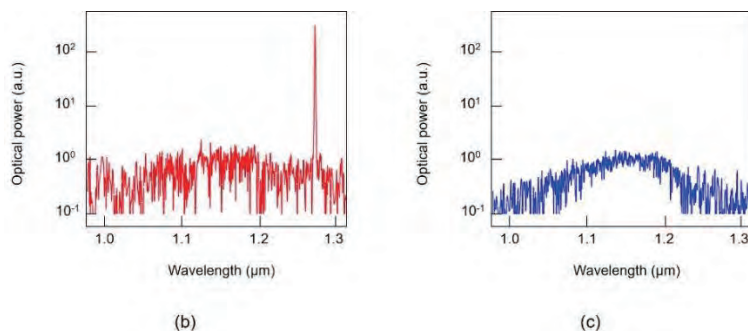


図 21 Si レーザーの発光スペクトル。(a)、(b) は各々発振閾値以上、以下。

上記のデバイス構造を改良し、高出力のレーザーが製作されている。これにはリッジ導波路は作りつけられていない。なぜならばデバイスが p n ホモ接合を有する限りこの導波路による高効率の光閉じ込めが期待できないからである。しかし Si 結晶の赤外吸収損失が小さいので、結晶を 15 mm まで長くすることにより 13 W に達する高出力光パワーが得られた (注入電流密度 $100\ \text{A}/\text{cm}^2$ にて)。発振しきい値電流密度は $60\ \text{A}/\text{cm}^2$ と小さい。最近では結晶長を 30 mm まで増加し、100 W を超える出力光パワーが得られている。

ドレスト光子により間接遷移型半導体に大きな光増幅利得が付与された。これにより Si 結晶により高い出力光パワーと低い発振しきい値電流密度が実現したのである。すなわち DP 援用アニールを施された Si 結晶は間接遷移型半導体にもかかわらず、高い光パワーを放出する光デバイスとなる【現象 15】。これは表 1.1 の光科学の通説 V と背反する。

[4] 偏光回転デバイス

SiC 結晶を用いた可視域の発光ダイオードと同様の作り方により SiC 結晶を用いた偏光回転デバイスが発明されている。すなわち n 型の SiC 結晶の表面に p 型ドーパントの Al 原子をドーピングし、p n ホモ接合を形成する。DP 援用アニールのため、順方向電流を注入し、またレーザー光(波長 405 nm)を照射する。これにより Al 原子の拡散が制御され、Al 原子の空間分布が自律的に形成される。その結果、このデバイスは発光ダイオードとして動作し、光子ブリーディング効果を示す。

偏光回転デバイスとして動作させるためには電流を流して電子の注入と磁場の発生を同時に行う。製作時の照射光と同じ波長の入射光の偏光が選択的に回転するので(光子ブリーディング効果)、ここでは 405 nm 波長の直線偏光の光を垂直入射する。デバイス中を伝搬した後の出射光の偏光が回転する。回転角 θ_{rot} の測定結果(図 22(a))よりベルデ定数を求めると 660(deg/A)を得るが、これは可視域で透明な従来の常磁性材料に比べて非常に大きな値である。すなわち SiC 結晶は巨大磁気光学効果を示す。また、ファラデー回転角も 2480 deg/cm という大きな値である。また、残留磁気は 0.36 mT であり、この値は従来の強磁性材料と同程度である。以上の結果は SiC 結晶が強磁性材料に相当する新しい性質を獲得したことを示唆している。

この新しい強磁性特性の起源を調べるため磁化曲線を測定すると、得られた曲線は強磁性材料に特有のヒステリシス特性を示した(図 22(b))。測定温度は 27 °C なので、室温以上のキュリー温度をもつ強磁性特性が実現したことがわかる。DP 援用アニールの前では磁化の値は非常に小さくヒステリシスも見られない。以上により半導体の SiC

結晶は DP 援用アニールによって強磁性体として振る舞うようになったことが確認された。これはアニールの結果自律的に形成された A1 原子対中の電子軌道の三重項状態が一重項状態より安定であることから、三重項状態中の平行なスピンをもつ二電子が強磁性特性を誘起すると考えられている。すなわちドレスト光子援用アニールにより SiC 結晶（間接遷移型半導体）は強磁性体としての性質を獲得し、また可視域において巨大磁気光学効果を示す【現象 16】。

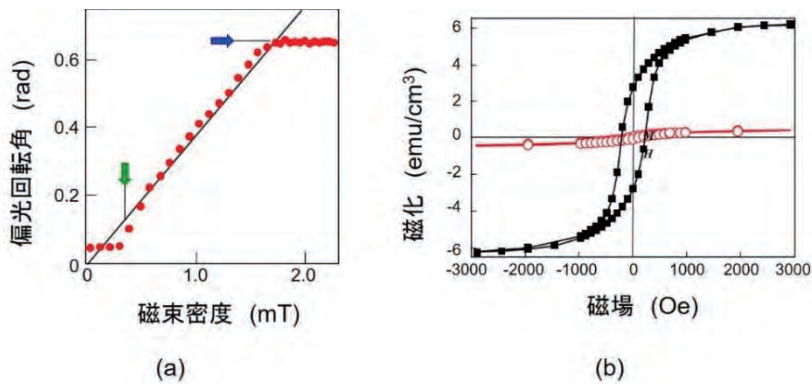


図 22 SiC 結晶を用いた偏光回転デバイスの特性。

(a) 磁束密度 B_{\perp} と偏光回転角 θ_{rot} の関係。(b) 磁化曲線。■、○はドレスト光子援用アニール後、前の測定結果（温度 27 ° C で測定）。

4 まとめ

以上のように DP を使った多様な応用技術が発展した。今後の一層の発展のためには DP の物理的描像をさらに高精度化する理論的研究が必要とされている。しかし 2 で示したように電磁場のモードが定義不可であること、二つの仮定が必要であることが問題となっている。すなわちこれまではオンシエル科学の理論手法を借用してきた不自然さが露呈している。しかしこれまでとは違う借用法を見つければこれらの問題は解決すると考えられるかもしれない。しかし、前節までに示した 16 の現象は記述不可能なのである。これはオンシエル科学の理論の限界を露呈している。DP(オフシエル状態の量子場)はオンシエル科学の基本式では記述不可、すなわちオンシエル状態を扱う従来理論

はオフシェル状態については無防備なのである。オフシェル科学の理論手法が不可欠であり、オフシェル科学の発展が期待される。

文献

- 1) 大津元一、「ドレスト光子」、(朝倉書店、東京、2013).
- 2) M. Ohtsu, *Dressed Photons*, (Springer, Heidelberg, 2013).
- 3) M. Ohtsu, *Silicon Light-Emitting Diodes and Lasers* (Springer, Heidelberg, 2016)

光近接場設計の概念

Concept of designing the optical near field system

納谷昌之
Masayuki Naya

富士フイルム株式会社 R&D 統括本部
先端コア技術研究所
Frontier Core-Technology Laboratories,
FUJIFILM Corporation
(E-mail: masayuki.naya@fujifilm.com)

概要

銀ナノ平板微粒子をランダムな配列で単層分散した構造によって近赤外光のみを反射する日射遮熱フィルムを題材にして、近接場光まで含めた構造設計の手法について述べる。古典的な電磁場理論による数値計算によって導出される特性が生じる原理は、近接場光をコンデンサと考えることで見通すことができる。

Abstract

We describe a concept for designing a structure including near-field light using a metamaterial solar heat shielding film that reflects only near-infrared light by a structure in which silver nano-discs are randomly dispersed in a single layer. By considering near-field light as a capacitor, we can see into the principle of optical response derived by numerical calculation based on classical electromagnetic field theory.

1. はじめに

富士フィルム株式会社において、光学技術は柱となる基盤技術のひとつとして位置づけられている。我々は、ナノ領域での光の特別なふるまいを用いるナノフォトニクスを、センシングや光制御技術など、新たな展開に向けた重要な技術として技術構築をおこなってきた。中でも、メタマテリアルは従来の材料技術、化学では得られなかった光制御を物理的な構造設計によって実現する技術として注目し、日射遮蔽フィルムなどへの応用を実現してきた¹⁾⁻³⁾。

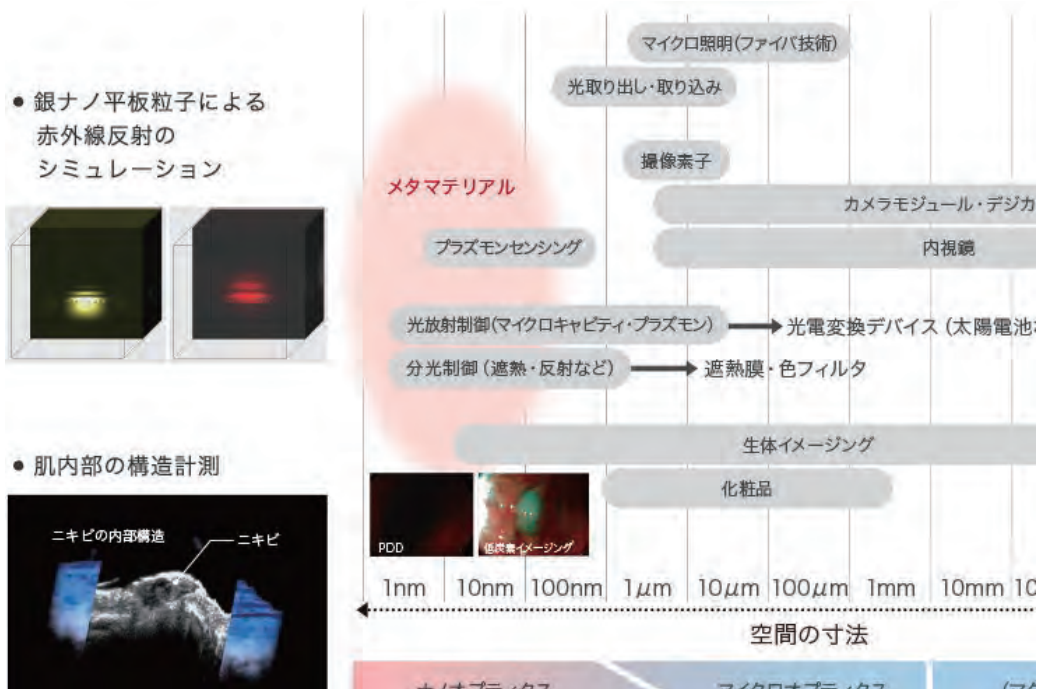


Fig. 1 富士フィルムの光学技術
(富士フィルムホームページより)

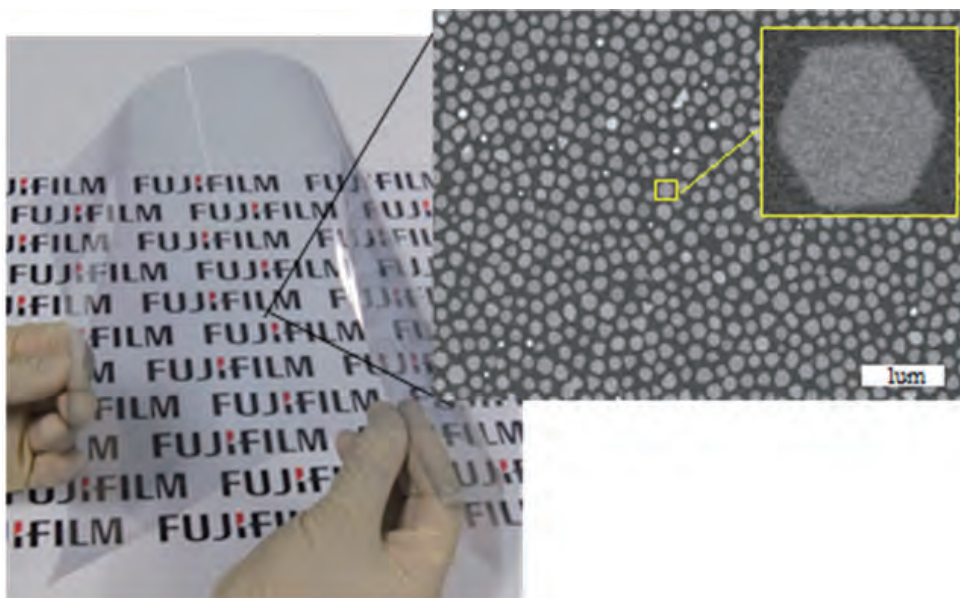
この開発においては、マックスウェル方程式の基づいたFDTD (Finite-difference time-domain) 法による数値計算が設計の必須のツールとなっている。一方、FDTD法は数値計算であるがために、精密な設計には利用可能ではあるが、光のふるまいを原理的に見通すことは難しい。本研究会では、メタマテリアルの機能発現の中心的存在である近接場光をコンデンサとみなし、構造全体を(LCR)電気回路とすることで、メタマテリアルの動作原理を見通すことが可能となること、そして、その意義について議論したい。

2. 光メタマテリアル

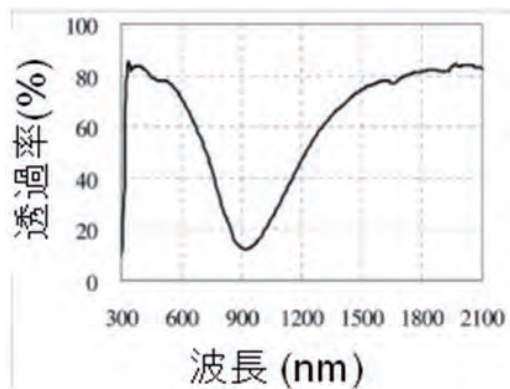
光メタマテリアルとは「光の波長よりも小さな構造で、自然界には無い光学応答特性が得られる人工物」と定義される。西暦2000年の前後にPendryやSmith等によって負の屈折率の可能性が示されて以来⁴⁾⁻⁶⁾、「透明マント」が実現できる技術として大きな注目を浴び続けてきた。最近では、そのターゲットは負屈折率に限らず、広い意味で新奇な光学特性を人工的なナノ3次元構造(メタマテリアル)やナノ平面構造(メタサーフェス)で実現するという領域への広がりをみせている⁷⁾⁻¹¹⁾。光メタマテリアルは、光と物質そのものの局所的相互作用だけではなく、ナノ構造が形成される広がりを持った空間内での近接場光の分布状態がその特性を決める。これは、波長よりも小さな領域のいたるところで生じる近接場光相互作用の集団的干渉の結果とみなすことができる。このことは、古典的に考えれば電磁場の相互作用であるが、干渉ということ量子論的に考えれば、実はいたるところで生じている量子論的効果、すなわちドレスト光子の挙動ともみなすことができ、たいへんに興味深い。

3. 銀ナノ石畳を用いる遮熱フィルム

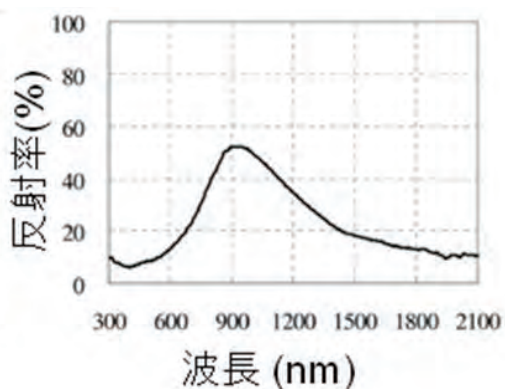
富士フィルムでは、銀ナノ平板微粒子を透明フィルムの表面にランダムに分散した構造が、特徴ある光応答を示すことを見出し、これを太陽光の遮熱などを目的としたメタマテリアルフィルムを実現した。図1-(a)に示すように、このデバイスは視覚的には普通の透明フィルムであるが、フィルム表面はSEM像で示されるように直径100nm程度、厚さ12nm程度の銀の平板ナノ微粒子が単層でランダムに分散された構造となっている。図1の構造では銀の微粒子被覆密度は40%である。この形状が石畳状であることから、我々はこれをNASIP (Nano Silver Pavement : 銀ナノ石畳) と命名した。NASIPの光透過/反射特性の実測値は図1-(b)(c)に示すように、可視領域の光に対しては高透過であり、波長900nmを中心とする近赤外光に対しては高反射である。さらにそれ以上の電波領域にわたる長い波長に対しては高透過となる。したがって、このフィルムは可視光や電波に対しては高い透過性を保ちながら、太陽光のエネルギーの約半分となる近赤外光による熱線を遮蔽する。薄膜干渉の原理と異なり、NASIPはスペクトル特性の入射角依存性が極めて小さくて、見る角度が変わっても色の変化が無く、視覚的にも優れていることが特徴である。また、当社が写真フィルムで培ってきた製造技術により、大面積で均一な特性の構造を量産できることが、工業的にも重要な特徴となっている。



(a)NASIPフィルムとSEM像



(b)光透過特性



(c)光反射特性

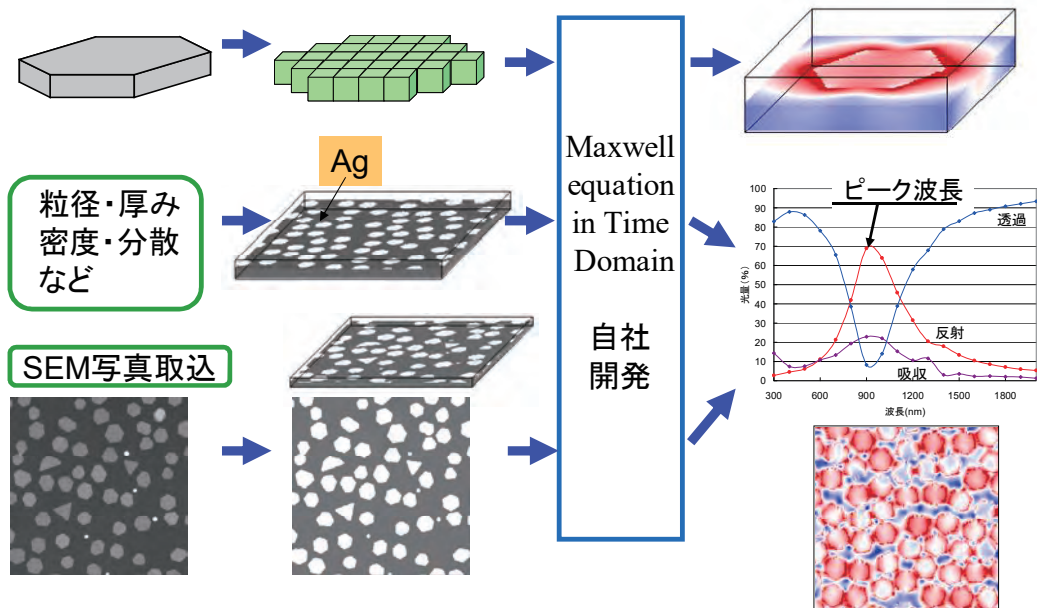
Fig. 2 NASIPとその光特性

3. N A S I P設計の基本的な考え方

N A S I Pで用いている銀ナノ平板微粒子1個の厚みは12 nm程度である。この微粒子が平面上に単層で配置されている場合には、光が入射しても厚み方向への光-電子相互作用が極めて小さく、反射や吸収は無視できるほど小さい。一方、入射光によって金属微粒子中に生じる自由電子の集団運動であるプラズモンが光と共鳴状態となる波長帯では、銀の中の自由電子と光との相互作用が共鳴のQ値に応じて強くなる。その状態は光と電子の実効的な相互作用長が長くなった（銀膜が厚くなった）ことと同等の状態であり、反射や吸収などの光応答性が特異的に大きくなる。この特性を利用することで、所望の波長帯でのみ反射や吸収が大きくなるという特性を実現することが可能である。視覚的に透明な遮熱フィルムを実現するという目的のために、我々は、可視光ではプラズモン共鳴が生じず、近赤外領域でのみプラズモン共鳴が生じる構造の実現を目指して設計をおこなった。

4. F D T D法を用いた設計

光応答特性を精密に解析・設計するためには空間分解能の高い電磁場計算の手法が必要である。我々は、任意の粒子形状、配置での最適条件をF D T D (Finite-difference time-domain) 法を用いた自作のシミュレーションシステムによって最適構造の探索、設計をおこなった。F D T D法はMaxwell方程式に基づいた電磁場計算であり、伝搬光のみならず、近接場光（クーロン相互作用）まで含めた計算が可能である。ただし、モデルの物性や境界条件の設定条件などにより結果が異なってしまうため、モデルを検証する実験の実測値と常に比較しながら設計を行うことが重要である。



近接場相互作用を含む集団的な光学特性の予測をおこなう

Fig. 3 NASIP 設計の流れ

5. 近接場光相互作用の重要性

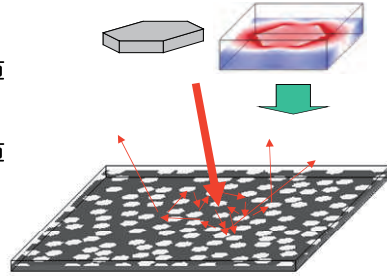
シミュレーションの方法としては二つの方法が考えられる。一つは銀ナノ微粒子1つの特性を電磁場的に計算し、それによって出てきた散乱特性をモンテカルロシミュレーションによって単純計算する。この方法の場合、微粒子間の近接場光相互作用は考慮されないが、計算負荷は小さい。もう一つの計算方法は、ナノ微粒子が分散された構造を波長よりも大きな領域にわたってFDTD法で計算するという方法である。この計算では微粒子間の近接場光相互作用が考慮される。この二つの方法で計算した結果を実験結果と比較したところ、前者は実験結果の傾向とは合わず、後者では実験結果の傾向と一致することから、微粒子間の近接場光相互作用が非常に重要であることがわかった。

1. Isolated particle model (IPM)

単一微粒子の光学応答をFDTD法で計算



モンテカルロ法で集団的な散乱特性を計算
(近接場光相互作用の考慮なし)



2. Collected particles model (CPM)

すべての領域を一つのモデルとして
FDTD法で計算

(近接場光相互作用の考慮あり)

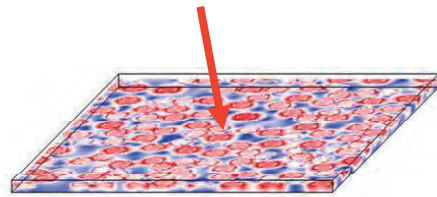


Fig. 4 計算の方法

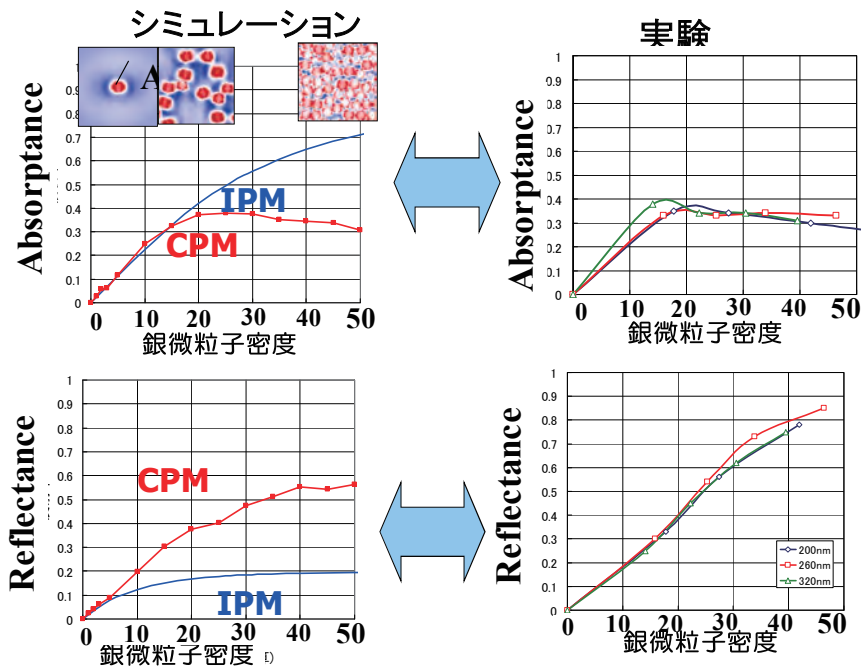


Fig. 5 計算結果と実験結果の比較。実験結果はCPMによる計算の必要性を示唆した。

4. NASIPの設計

(1) 粒子形状と光学特性の関係

局在プラズモンの共鳴は、金属材料周辺の屈折率、粒子形状、粒子サイズなどにより変化する。今回、金属材料に関しては、局在プラズモン共鳴が強く起こる銀を採用した。粒子形状は、共鳴波長を制御するうえで重要なパラメータである。球形の銀粒子の場合、直径を大きくすることで共鳴波長は長波化するが、同時に可視光領域にも鋭い共鳴が生じてしまう。この場合、近赤外と同時に、可視光の一部も遮蔽してしまい、視覚特性を大幅に劣化させてしまう。これに対し、平板状の粒子の場合には、微粒子の径や厚みを変えることで可視から赤外まで共鳴波長を単一ピークのままコントロールすることができる。

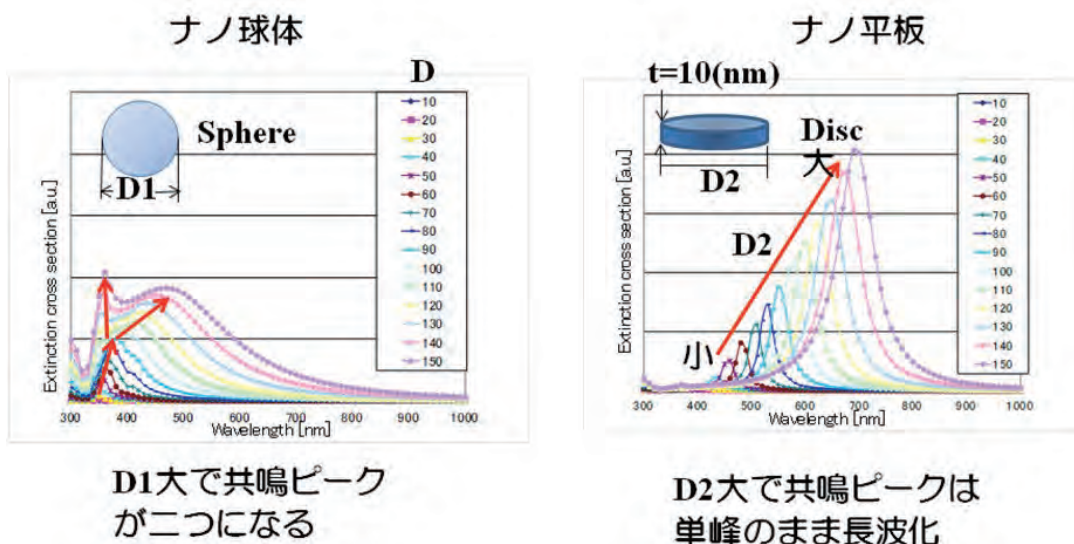
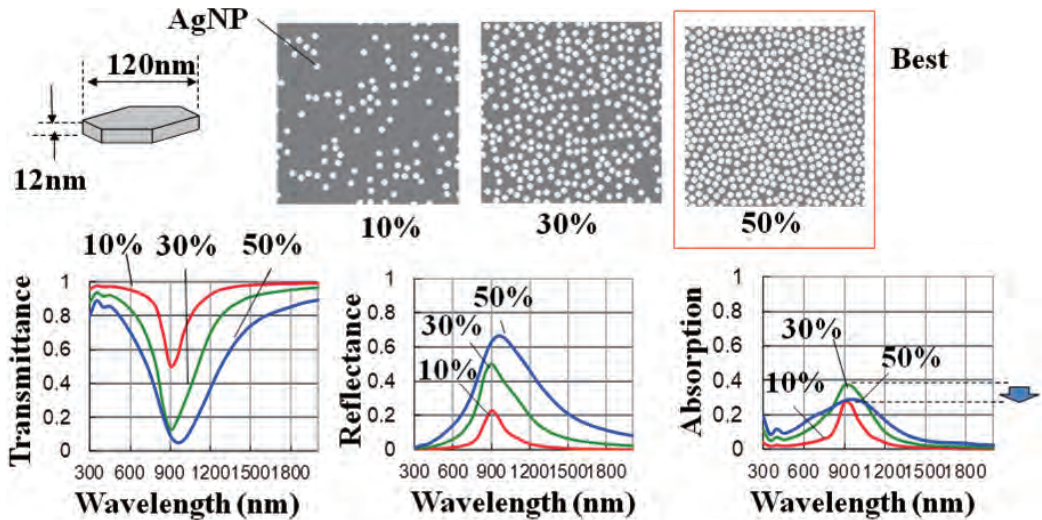


Fig. 6 球と平板のプラズモン共鳴スペクトルの比較。

(2) 金属ナノ平板の分散状態と光学特性

銀ナノ平板が単一平面上に分散した状態において、銀ナノ平板の面密度も光特性に影響を及ぼす。Fig. 7に、厚み10nm、直径120nmの銀ナノ平板が面密度がそれぞれ10, 30, 50%で存在する条件で、反射、吸収スペクトルを計算した結果を示す。この構造では、波長900nm付近に局在プラズモン共鳴による反射、吸収のピークを持つ。面密度の増加に伴って反射率が単調増加するのに対し、吸収率は面密度の増加に伴って頭打ちとなる。このことより、面密度を50%にすることで、当初目指していた遮熱フィルムとして望まれる反射優位な特性が実現可能であることが分かる。



微粒子密度が高くなると透過が単純減少。反射が単純増加。
一方、吸収は一旦増えるものの、30%⇒50%で減少。

Fig. 7 銀ナノ平板の面密度とスペクトル特性

5. 原理の見通し

以上の特性は、数値計算によって得られた結果であり、何故そうなるのかという原理を説明するものではない。ナノ物体の光応答特性の原理を定性的に理解するために、近接場光をコンデンサと考えることが有効であるということが、Engehta 等により示されている¹²⁾。物体の光応答を考えると、光は交流の電磁波であり、物体はそれに対するアンテナと考えてよい。アンテナは電磁波を受信あるいは放射するための電気回路であり、コイル、コンデンサ、抵抗からなるLCR等価回路と考えることができる。このLCR回路を適切に設計することで吸収、放射、位相、指向性、偏光特性などの光（電磁波）応答特性を人工的に制御することが可能である。

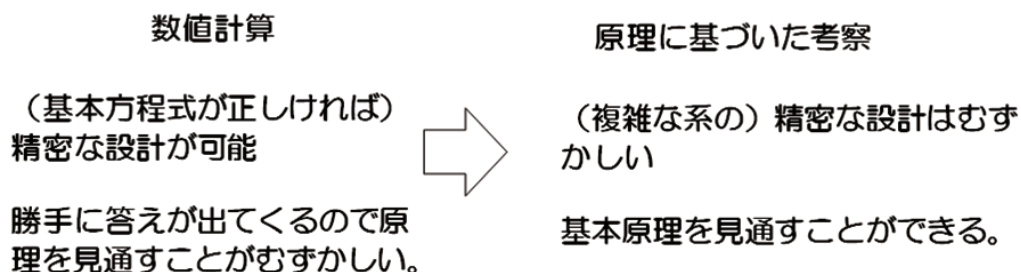


Fig. 8 原理に基づいた考察の必要性

6. なぜプラズモン共鳴が生じるのか？

— 近接場光がコンデンサであることを考える必要性 —

プラズモン共鳴は、金属表面の自由電子が入射する光（電磁波）によって、集団運動し、その位相条件が入射光と一致したときに生じる共鳴現象である。プラズモン共鳴が生じる金属微粒子を電気回路とみなすと、光が交流電源であり、金属内の自由電子は慣性力を感じるのでコイル L （加えて損失があるので抵抗 R ）として等価回路を考えることができる。電気回路が共鳴を生じる場合、その共鳴周波数は $1/(LC)^{1/2}$ であり、コンデンサ C の存在が必要である。金属は導電性であるので、一見、金属微粒子にはコンデンサがみつからないが、それではスタンドグラスなどにみられるプラズモン共鳴が生じないことになってしまう。近接場光をコンデンサとみなすことで、これが解決される。Engheta が示す通り、波長よりも小さな微粒子に光が入射すると、近接場光は微粒子内の回路と並列に接続されたコンデンサとなる。すなわち、金属微粒子に光が入射する状態は LCR 並列回路に交流電源が接続された等価回路になる。このモデルによって、プラズモン共鳴の発生を電気回路モデルで矛盾なく説明することが可能となる。この考えを用いれば $NASIP$ における微粒子形状や分布密度による共鳴周波数の変化の傾向が説明できる。すなわち、 $FDTD$ 法では結果のみがわかるのに対し、 LCR 等価回路を考えれば、近接場光（コンデンサ）の関りが特性に大きく影響していることを見通すことができる。なお、微粒子が誘電体の場合、微粒子内部はコンデンサとなるので、この系は CCR 並列回路となり、これも、波長よりも小さな誘電体微粒子が光の共鳴をもたないことと一致する。

ステンドグラスを巡る疑問

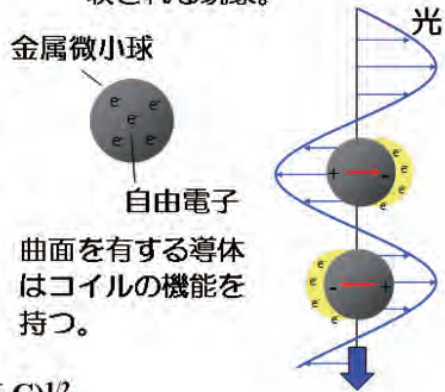


ステンドグラスはガラス中に分散させた金属ナノ微粒子の**プラズモン共鳴**を用いる発色を利用している。

電気回路の共鳴周波数 $f \propto 1/(LC)^{1/2}$

プラズモン共鳴

金属中の自由電子の集団運動と光（電磁波）が共鳴し、特定の波長（色）の光が強く散乱、吸収される現象。



光を交流電源、金属微小球をアンテナと考え、プラズモン共鳴が生じるためにはコイルとコンデンサが必要。コンデンサはどこに？

Fig. 9 なぜプラズモン共鳴が起こるのか？

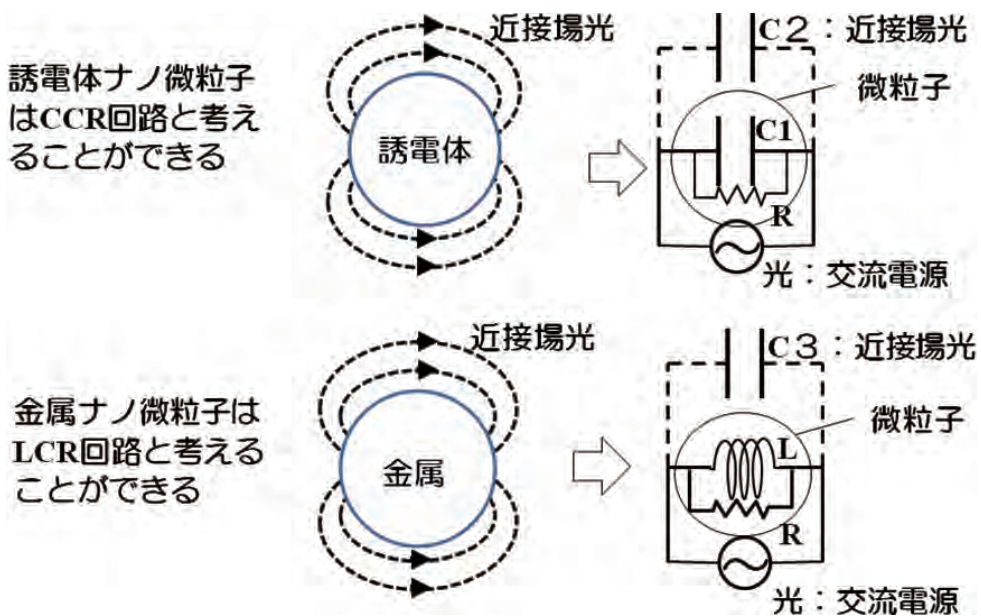


Fig. 10 誘電体と金属の微小球における光応答の等価回路

7. 近接場光をコンデンサと考える意味

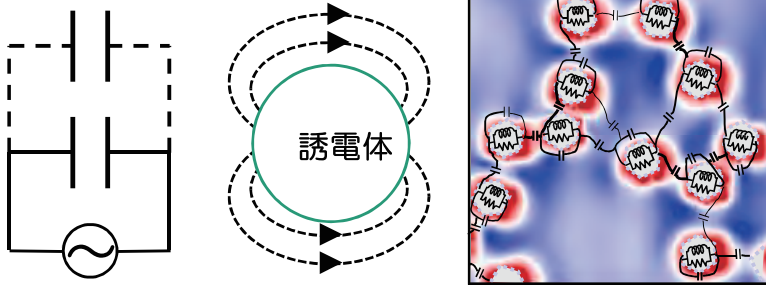
近接場光をコンデンサと考えることに意義は、ナノ金属微粒子のプラズモン共鳴が生じる正当性を知ることだけではない。重要なことは、物質内部の電子状態（金属であればコイル、誘電体であればコンデンサ）と近接場光であるコンデンサが並列回路になっているということである。並列回路であるということは、物質内部の電子状態と物質周辺の近接場光が結合し、一体となっている場であることを表す。これは、物質内部から見れば光をまとった電子であり、外部から見れば電子をまとった光となり、まさにドレスト光子の概念につながるものである¹³⁾。

さらに、この系に入射する光が1光子となる状態は大変に興味深い。系全体の特性は物質内部のコイル（あるいはコンデンサ）と近接場のコンデンサの結合状態によって決まり、観測しなければ1光子のエネルギーは物質内部、あるいは近接場のどちらに存在するのかわからない。（あるいはどちらにも存在する）。しかし、もしも物質内部の抵抗によって光子エネルギーが熱に変わってしまったとすれば、光子エネルギーは物質内部にあったことになるし、光近接場にプローブがはいりこんで光子を観測したとすれば、光子エネルギーは物質近傍の近接場に存在していたこととなる。微粒子が分散されたNASIPの構造はもっと複雑である。NASIPの構造に光が入射している状態は、微粒子1個1個のLCR回路がさらに別のコンデンサで接続されたネットワーク回路となっている。この構造の特性は、古典論的にはお互いに近接場光相互作用を持つ複数の微粒子のトータルでの電磁場相互作用によって導出される。しかし、ヤングのスリットと同じように、1光子に対する応答を重ね合わせていっても同じ結果になるとしたら、それは量子論的な系であるともいえる。そのときに近接場がどのような役割をもっているのか、たいへんに興味深い。

LCR回路と考えると、たとえフォトン1個でも共鳴は生じる？

フォトンはどこにいるのか？

フォトン1個分のエネルギーは物質内部と近接場のどちらにいるのか？



超古典的なLCRの並列回路的な考え方は量子論的な考え方に展開可能？

Fig. 11 フォトンはどこに？

8. まとめ

遮熱フィルムとして実用化した銀ナノ平板分散フィルム (NASIP) の光特性を題材に、近接場光の役割について議論した。近接場光をコンデンサーと考えれば、共鳴現象などについても原理を見通すことができる。さらに、近接場光が物質が構成する等価回路と並列なコンデンサであることから、物質内部の電子状態と物質近傍の近接場光は一体となってひとつの場となっていることがわかる。特に、複雑な微粒子分散構造の間に張り巡らされる近接場光のネットワークのふるまいは興味深い¹⁴⁾⁻¹⁵⁾。また、この場を量子論的な観点から考えることで、物質と光との相互作用についてさらに深く考察できるのではないかと期待する。

謝辞

本検討の題材である銀ナノ平板分散フィルムの設計・開発を推進し、原理について議論していただいた富士フィルム株式会社の清戸尚治氏、谷武晴氏、白田真也氏に感謝いたします。

参考文献

- 1) Takeharu Tani, Shinya Hakuta, Naoharu Kiyoto and Masayuki Naya, *Opt. Exp.* **22**, 9262 (2014)
- 2) 納谷昌之 応用物理、第 85 卷 第 4 号、266 (2016)
- 3) 安田英紀、松野 亮, 谷 武晴, 納谷 昌之, 第 6 2 回応用物理学会春季学術講演会予稿集、12a-A12-6 (2015)
- 4) J. B. Pendry, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3966 (2000)
- 5) R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, *Science*, **292**, 77 (2001)
- 6) D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4184 (2000).
- 7) Michaël Lobet, Mercy Lard, Michaël Sarrazin, Olivier Deparis, and Luc Henrard, *Opt. Exp.* **22**, 12678 (2014)
- 8) Zhongyang Li, Serkan Butun, and Koray Aydin, *ACS NANO*, **8**, 8242, (2014)
- 9) A. V. Kildishev, A. Boltasseva, and V. M. Shalaev, *Science* **339**, 1232009 (2013).
- 10) Y. Zhao and A. Alu, *Phys. Rev. B* **84**, 205428 (2011).
- 11) A. Papakostas, A. Potts, D. M. Bagnall, S. L. Prosvirnin, H. J. Coles, and N. I. Zheludev, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 107404 (2003)
- 12) Nader Engheta, Alessandro Salandrino, and Andrea Alu ,

- Phys. Rev. Lett. **95**, 095504 (2005).
- 13) 大津元一、「ドレスト光子」、朝倉書店 (2013) .
- 14) Makoto Naruse¹, Takeharu Tani, Hideki Yasuda, Naoya Tate, Motoichi Ohtsu and Masayuki Naya , Scientific Reports, **4**,6077 (2014)
- 15) Makoto Naruse, Takeharu Tani, Tetsuya Inoue, Hideki Yasuda, Hirokazu Hori, and Masayuki Naya, JOSA B, **32**, 001797 (2015)

場の非可換性を起源とするドレスト光子の現象

坂野 斎 (山梨大学工学部)

banno@yamanashi.ac.jp

Feb. 18-19, 2019

ドレスト光子に関する基礎的数値研究 @ 九州大学 IMI 研究所

概要

この発表では応答理論に基づくドレスト光子 (DP) へのアプローチを述べる。系が非相対論的であることを起源として、線型・非線型感受率には非共鳴条件下で強調される寄与；非共鳴項がある。非金属のような励起エネルギーのある物質で共鳴遷移が抑制・禁制される状況では、非共鳴項が主要となり、London 構成方程式、または、その非線型版の構成方程式が応答を支配する新しい光学のレジームとなる。このレジームにある DP 系のいくつかの特徴を議論する：第 1 に応答の原因としての電場・磁場の概念が破綻する。第 2 に非共鳴非線型応答には量子効果、つまり、電荷密度演算子と電流密度演算子の非可換性を原因として磁気光学効果が顕現する。実際、フォトンブリーディング (PB) の手法で製作された間接遷移型半導体は驚くべきことに、高効率な LED として機能し、かつ、巨大磁気光学効果も発現する。最後に、PB によるこの顕著な効果について非線型応答の観点からメカニズムを提案する。

Abstract

This presentation shows an approach to the dressed photon (DP) on the basis of response theory. Originating from the non-relativity of the system, the linear or nonlinear susceptibility contains the "non-resonant term", that is, the contribution enhanced under the non-resonant condition. Under the condition suppressing or forbidding the resonant transition in a non-metallic material (a material with an excitation energy), the non-resonant term, that is, London's constitutive equation or its non-linear version dominates the response of the material, and brings about a new regime in optics. Some aspects of the DP system in this regime are discussed: First, the concepts of the electric and magnetic fields as the cause of response are broken down. Second, in the non-linear non-resonant response, the magneto-optical effect comes into view owing to the quantum effect, that is, the non-commutativity of the operators of the charge and current densities. Surprisingly, after so-called "photon breeding (PB)" process, the indirect-transition-type semiconductor functions as a highly-efficient light-emitting diode, and the same device realizes a gigantic magneto-optical effect. Finally, a mechanism of such the remarkable effects of the PB process is proposed in terms of the non-linear response.

目次

I. はじめに	3
A. ドレスト光子 (DP) とは	3
B. 光学系の分類	4
C. 非共鳴 DP 系の実験, フォトンブリーディング (PB)	5
D. DP と応答理論	6
II. 定式化: DP 系に適する Heisenberg 演算子としての線型・非線型感受率	6
A. 作用積分	7
B. 作用積分と感受率	8
C. 感受率による電荷保存とゲージ不変の保証	9
D. 通常の高電子系の扱いとの比較: DP と高電子問題	10
III. 非共鳴 DP 系での線型応答: London 構成方程式が支配する光学の新しいレジーム	11
A. 電場・磁場で応答を記述する不合理	11
B. 非金属 DP 系線型応答	12
C. London 構成方程式が支配する光学のレジーム	14
D. 非金属 DP 系と超電導体系の対応	14
E. 非共鳴 DP 系の線型応答: まとめ	15
IV. 非共鳴 DP 系の非線型応答 #1: 非可換性・量子効果で発現する磁気光学効果	16
A. 非線型感受率の非共鳴項	17
B. 非共鳴系の磁気光学 (MO) 効果 #1: モデル	18
C. 非共鳴系の MO 効果 #2: 非可換性を起源とする MO 効果	18
V. 非共鳴 DP 系の非線型応答 #2: PB と巨大磁気光学効果, 高効率発光	19
A. 非共鳴系の MO 効果 #3: 回転角と電子系のサイズ	19
B. 光学フォノンとそれに伴う電磁場	20
C. 巨大 MO 効果と PB, 光学フォノン	21
D. 非共鳴 DP 系の非線型応答: まとめ	22
VI. 全体のまとめ	22
謝辞	24
参考文献	24

I. はじめに

この発表での議論の準備として、ドレスト光子 (DP), DP 系の暫時的定義, 物質の応答を考慮した光学系の分類, DP 系の実験, DP と電子系の応答の関係について述べる.

A. ドレスト光子 (DP) とは

図 1 に源泉 (source) と観測点 (完全吸収の sink) の 2 要素からなる単純化・理想化した系の 3 つの様相を描いた. 観測点の場所によって, それぞれ遠隔場 (far field), 近接場 (near field), 内在場 (inner field) が観測される. 遠隔場はベクトルポテンシャル (VP) の On-shell 成分であり, 電場 (横電場)・磁場 (横磁場) に書き換えられる. 近接場, 内在場には VP の On-shell 成分以外に, VP の Off-shell 成分, スカラーポテンシャル (SP) も寄与する. VP から導かれる横電場と SP から導かれる縦電場は質的に異なり, それらが共存するため, 特に非共鳴条件下での電磁場は電場・磁場での記述は相応しくなくなる. 電場・磁場の概念の破綻の大元の原因は非相対論性である (後述, §III).

DP は近接場・内在場として次のように定義しておく:

ドレストフォトン (DP)

ナノ構造の近接場光, 物質内の電磁場.

環境との相互作用が支えている Off-Shell の場・非放射場.

Photon	Dressed Photon	
Far Field	Near Field	Inner Field
$A_{\text{on-shell}}$ E, B	A, ϕ E, B	A, ϕ E, B
sink * (obs. point)		
source		

図 1: ナノ物質の光源 (source) と完全吸収体である観測点 (sink) の 2 要素だけに単純化・理想化された系の 3 つの様相.

On-Shellの場合は、大きく、均質な時間・空間領域で分散関係式を満たして存在する場である。一方、Off-Shellの場合は波長・周期より小さなナノ構造に存在し、不確定性原理により分散関係式から外れた成分をもつ場である。

DPはもともと小林、川添、大津らがDPP（ドレスト光子-フォノン）とともに提唱した概念であり小林らのモデルではDP、DPPの生因はナノ構造による不均一性であった[Kawazoe et al. 2005b, Kobayashi et al. 2005, Ohtsu 2014, 大津元一 2013]。ここでのDPの定義はこの考え方を普遍化したものである。

B. 光学系の分類

本論では応答理論によりDPにアプローチするので、光源(source)、物質、観測器(sink)の3つの要素からなる光学系の分類を考える。光源と観測器は物質からの反跳・影響によって機能が変わらないロバストなものとする。後に§III Bで述べるようにDP系としての顕著な特徴は金属ではなく励起エネルギー・バンドギャップをもつ物質、例えば、分子、半導体、絶縁体の場合なので、物質は入射の光子エネルギーに対して共鳴条件に近いか否かで分類する。都合、光源が物質に遠いか近いか、観測器が物質に近いか遠いか、物質が光に対して非共鳴か共鳴かで図Iのように8種に分類し、DP系を同定する。この様々なDP系のうち、近接・内在场入射条件、かつ、近接・内在场観測条件、かつ、物質が非共鳴条件を満たすDP系の場合、つまり、光源も観測器も物質に近く、物質が有限の励起エネルギーをもち非共鳴条件を満たすDP系の場合に電場・磁場での記述が破綻し、今まで認知されていない光学のレジームとなる(後述, §III)。

	近接・内在场観測 源泉: $\Delta\rho$ and $\Delta\mathbf{j}$	遠隔場観測 源泉: $\overline{\Delta\mathbf{j}}$
近接・内在场入射 : $\Delta\mathbf{E}^{(l)} + \Delta\mathbf{E}^{(t)}$ 電場の有効性	(I) DP系 非共鳴 / 共鳴 NG / OK	(II) DP系 非共鳴 / 共鳴 OK / OK
遠隔場入射 : $\Delta\mathbf{E}^{(t)}$ 電場の有効性	(I') DP系 非共鳴 / 共鳴 OK / OK	(II) 通常の光学系 非共鳴 / 共鳴 OK / OK

表 I: ロバストな光源、観測器と応答をする物質の3要素からなる系の分類。後述する結果 (§III B)も示した。近接・内在场入射条件、かつ、近接・内在场観測条件、かつ、非共鳴条件下では電場(全電場)を応答の原因とみることができない。Ref. [Banno 2018a, Banno and Ohtsu 2018]より抜粋、改変。

表 II: 川添・大津らが行った DP 系の一連の実験（その 1）. DP 系ではエネルギー，運動量，パリティなどのミスマッチで通常は抑制・禁制されている状態遷移が起こる.

不十分な光子エネルギーでの光化学反応
<ul style="list-style-type: none"> ● CVD APL(2001) APL(2001)[Kawazoe et al. 2001] ● NF リソグラフィ J. Photolumin. (2007)[Yonemitsu et al. 2007] ● NF エッチング APB(2008)[Yatsui et al. 2008] ● CO₂ 分解 Scientific Reports(2013)[Tanjeem et al. 2013, Yatsui et al. 2016]
周波数上方変換 IEEE J. of Selected Topics in Quantum Electronics(2009)[Kawazoe et al. 2009]
禁制を破る遷移
<ul style="list-style-type: none"> ● ナノファウンテン APL(2005)[Kawazoe et al. 2005a] ● ナノフォトニックゲートデバイス APB(2011)[Kawazoe et al. 2011b] ● Si-IR 検出器 APB(2012)[Tanaka et al. 2012]

C. 非共鳴 DP 系の実験, フォトンブリーディング (PB)

川添・大津らは非金属を対象とした表 II,III の一連の実験を行った. これらの実験は, 近接・内在場入射条件, かつ, 近接・内在場観測条件, かつ, 非共鳴条件の下での実験とみなせ, 電場・磁場での記述が破綻する DP 系でのものである. 表 II から, 電子状態の遷移を抑制するエネルギー, 運動量, パリティのミスマッチ (広い意味での非共鳴性) を物質の自由度 (フォノンなど) が補完していると考えられる. ナノ構造や不純物の近傍での DP による普遍的な現象と言える.

特に, 表 III は川添・大津らが実施したフォトンブリーディング (または DPP アニールング) という手法により, 間接遷移半導体から高効率の LED を作り上げた実験である. PB はアニール時の光の波長の選択によって発光波長を指定できる. 同じデバイスが巨大な磁気光学効果を現すという驚くべき現象が観測されている.

間接遷移型半導体の高効率発光
<ul style="list-style-type: none"> ● Si LED APB(2011)[Kawazoe et al. 2011a] ● SiC LED <i>Silicon Light-Emitting Diodes and Lasers</i>(Springer,2016)[Ohtsu 2016] ● Si IR laser APL(2012)[Kawazoe et al. 2012]
巨大磁気光学効果 (間接・直接遷移型)
<ul style="list-style-type: none"> ● SiC <i>Silicon Light-Emitting Diodes and Lasers</i>(Springer,2016)[Ohtsu 2016] ● ZnO Scientific Reports(2013)[Tate et al. 2015b, Tate et al. 2015a]

表 III: 川添・大津らが行った DP 系の一連の実験（その 2）. フォトンブリーディング (PB) を使って間接遷移型半導体の高効率の発光, また, 同じデバイスが巨大磁気光学効果を現すことを示した. PB は ZnO のような直接遷移型半導体にも有効に働く.

フォトンブリーディング (PB)

間接 [直接] 遷移型半導体の E_g 以下の運動量 [エネルギー] ミスマッチの光の照射下でキャリア電流を流し、アニーリングを行い不純物を拡散する。偶然できる発光に適する構造は誘導放出で冷却され照射光と同じ波長の発光サイトとして生き残る。光学フォノン関与の実験的証拠がある [Wada et al. 2014, Yamaguchi et al. 2014, Kawazoe et al. 2015].

D. DP と応答理論

DP の Off-shell 性・非放射性を支える物質との相互作用は、誘導電荷密度・誘導電流密度で記述できる。ゆえに**応答理論での記述**を考える。この考え方の雛形はトーマス-フェルミ理論であり、DP の一例ともみなせる遮蔽された SP は次の手続きで導出される：クーロンゲージの元で SP が従う式は Poisson 方程式である。その右辺の源泉の電荷密度は外来電荷密度と誘導電荷密度からなる。応答理論によって誘導電荷密度を SP で表し、はじめの Poisson 方程式に代入、改めて SP についての方程式として解くと湯川型ポテンシャルを得る。

$$\left. \begin{aligned} -\Delta\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \rho_{\text{ind}}(\mathbf{r})) && \text{Poisson eq.} \\ \rho_{\text{ind}}(\mathbf{r}) &= -\lambda_{\text{TF}} \phi(\mathbf{r}) && \text{応答理論} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\lambda_{\text{TF}} r}}{r}$$

この考えを一般化し、SP, 電荷密度, Poisson 方程式を、それぞれ、4 元の電磁ポテンシャル (SP + 3 元 VP), 4 元の電流密度 (電荷密度と 3 元電流密度), Maxwell 方程式と考えれば、次のような連立方程式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} A^\mu[j_\nu] &&& \text{Maxwell eqs.} \\ j_{\text{ind}}^\nu[A^\mu] &&& \text{応答理論} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A^\mu \text{ as DP}$$

この方程式を自己無撞着にとけば、DP は自己相互作用のエネルギー・運動量を伴う Off-shell 電磁場として求まるはずである。

ただし、**本発表は連立方程式まで解いていない応答理論の部分の議論に止める。**

II. 定式化：DP 系に適する HEISENBERG 演算子としての線型・非線型感受率

ナノ構造の近接場・内在中 (DP 系) の電子の応答を量子電磁力学の作用積分に基づき定式化し、半古典論の範囲で線型・非線型感受率を系統的に導出する [Banno 2018b]. また、

この線型・非線型感受率は電荷保存則とゲージ不変性を保証することを示す。DP系ではSPも応答の原因として考慮することが相応しいので、通常が多電子系の扱いと異なりSPを電荷間の2体クーロン相互作用に転化せずに残す。その際、必要な量子多体効果は密度汎関数法を援用して考慮する。

A. 作用積分

量子電磁力学の作用積分 $\mathcal{I}[\hat{\psi}_\alpha^\dagger, \hat{\psi}_\alpha, A^\mu]$ は電子場の生成演算子、消滅演算子 $\hat{\psi}_\alpha^\dagger, \hat{\psi}_\alpha$ と電磁場 $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ の汎関数であり、相対論的に（ローレンツ変換）不変ではない物質の作用積分（電磁場との相互作用も含む）、 $\mathcal{I}_{\text{mat}}[\hat{\psi}_\alpha^\dagger, \hat{\psi}_\alpha, A^\mu]$ と相対論的に（ローレンツ変換）不変な電磁場の作用積分、 $\mathcal{I}_{\text{EM}}[A^\mu]$ からなる。

$$\mathcal{I}[\hat{\psi}_\alpha^\dagger, \hat{\psi}_\alpha, A^\mu] \equiv \underbrace{\mathcal{I}_{\text{mat}}[\hat{\psi}_\alpha^\dagger, \hat{\psi}_\alpha, A^\mu]}_{\text{非相対論的}} + \mathcal{I}_{\text{EM}}[A^\mu].$$

この作用積分の正当性は、最小作用の原理に従い、電子場での最適化により場の量子論で確立されている Heisenberg 方程式、電磁ポテンシャルでの最適化により電磁気学で確立される Maxwell 波動方程式が導かれることによる：

$$0 = c \delta \hat{\psi}_\alpha^\dagger(x) \backslash \delta \mathcal{I} = c \delta \hat{\psi}_\alpha^\dagger(x) \backslash \delta \mathcal{I}_{\text{mat}} \quad \Rightarrow \text{Heisenberg eq.}$$

$$0 = c \frac{\delta \mathcal{I}}{\delta A_\mu(x)} = c \underbrace{\frac{\delta \mathcal{I}_{\text{mat}}}{\delta A_\mu(x)}}_{-\frac{1}{c} \hat{j}^\mu(x)} + c \frac{\delta \mathcal{I}_{\text{EM}}}{\delta A_\mu(x)} \quad \Rightarrow \text{Maxwell eqs.}$$

電磁気学で確立された Maxwell 波動方程式との対応から4元電流密度は次となる：

$$\hat{j}^\mu(x) = -c^2 \frac{\delta \mathcal{I}_{\text{mat}}}{\delta A_\mu(x)} = (c\hat{\rho}(x), \hat{\mathbf{j}}(x)).$$

また、作用積分がゲージ変換不変の対称性をもつことから Noether の定理により電荷保存則が成立する（これは直接の計算でも確認できる）：

$$\partial_\mu \hat{j}^\mu(x) = 0. \quad \text{電荷保存則}$$

作用積分の詳細な表式は次のとおり：物質の作用積分 \mathcal{I}_{mat} は運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差であり，前者には VP が 2 次式，後者には SP が 1 次式に関わることから，非相対論的である（ローレンツ変換に対して不変ではない）ことがわかる．

$$\begin{aligned}\mathcal{I}[\hat{\psi}_\alpha^\dagger, \hat{\psi}_\alpha, \phi, \mathbf{A}] &\equiv \underbrace{\mathcal{I}_{\text{mat}}[\hat{\psi}_\alpha^\dagger, \hat{\psi}_\alpha, \phi, \mathbf{A}]}_{\text{非相対論的}} + \mathcal{I}_{\text{EM}}[\phi, \mathbf{A}], \\ \mathcal{I}_{\text{mat}}[\hat{\psi}_\alpha^\dagger, \hat{\psi}_\alpha, \phi, \mathbf{A}] &\equiv \frac{1}{c} \int d^4x \left\{ \hat{\psi}_\alpha^\dagger(x) (i\hbar\partial_t - q\phi(x)) \hat{\psi}_\alpha(x) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{-i} \partial_i - qA_i(x) \right) \hat{\psi}_\alpha^\dagger(x) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \partial_i - qA_i(x) \right) \hat{\psi}_\alpha(x) \\ &\quad \left. - \phi(x) \rho^{(\text{EXT})}(x) + A_i(x) j_i^{(\text{EXT})}(x) - \hat{\psi}_\alpha^\dagger(x) v^{(\text{AUX})}(x) \hat{\psi}_\alpha(x) \right\} \\ \mathcal{I}_{\text{EM}}[\phi, \mathbf{A}] &\equiv \frac{1}{c} \int d^4x \left\{ \frac{\epsilon_0}{2} (\partial_t A_i(x) + \partial_i \phi(x)) (\partial_t A_i(x) + \partial_i \phi(x)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \epsilon_{ijk} \partial_j A_k(x) \epsilon_{ilm} \partial_l A_m(x) \right\},\end{aligned}$$

物質の作用積分 \mathcal{I}_{mat} 中の $v^{(\text{AUX})}(x)$ は，密度汎関数法によって多電子量子効果を補償するための補助ポテンシャルである（後述，§IID）．

B. 作用積分と感受率

摂動電磁場 ΔA^μ を原因，4 元電流密度の変化 = 4 元誘導電流密度を結果とみて 4 元電流密度を基準の電流密度演算子の周りに Taylor 展開する．この展開の係数部分が原因と結果をつなぐ感受率である．物質の作用積分 \mathcal{I}_{mat} の電磁ポテンシャルによる 1 階の汎関数微分が 4 元の電流密度であること，電子場の演算子が Heisenberg 方程式を介して電磁場の汎関数となっていること考慮すると，Taylor 展開に現れる感受率は，物質の作用積分の電磁ポテンシャルによる 1 階分多い汎関数微分に等しくなる．

$$\begin{aligned}\hat{j}^\mu(x) &= -c^2 \frac{\delta \mathcal{I}_{\text{mat}}}{\delta A_\mu(x)} \\ &= \hat{j}^\mu(x) \Big|_{(0)} + \int d^4x_1 \underbrace{\frac{\delta \hat{j}^\mu(x)}{\delta A^{\mu_1}(x_1)} \Big|_{(0)}}_{\hat{\chi}_{\mu_1}^\mu(x, x_1) = -c^2 \frac{\delta^2 \mathcal{I}_{\text{mat}}}{\delta A_\mu(x) \delta A^{\mu_1}(x_1)} \Big|_{(0)}} \Delta A^{\mu_1}(x_1)\end{aligned}$$

$$+ \int d^4x_1 \int d^4x_2 \underbrace{\frac{1}{2!} \frac{\delta^2 \hat{j}^\mu(x)}{\delta A^{\mu_1}(x_1) \delta A^{\mu_2}(x_2)}}_{\left|_{(0)}\right.} \Delta A^{\mu_1}(x_1) \Delta A^{\mu_2}(x_2) + \dots,$$

$$\hat{\chi}_{\mu_1 \mu_2}^\mu(x, x_1, x_2) = \frac{-c^2}{2!} \frac{\delta^3 \mathcal{I}_{\text{mat}}}{\delta A_\mu(x) \delta A^{\mu_1}(x_1) \delta A^{\mu_2}(x_2)} \Big|_{(0)}$$

ここで、記号 $|_{(0)}$ は電磁ポテンシャルを無摂動系の $A^{(0)\mu}$ として評価することを意味する。4元誘導電流密度は $\hat{j}^\mu(x) - \hat{j}^\mu(x)|_{(0)}$ となる。

C. 感受率による電荷保存とゲージ不変の保証

この線型・非線型感受率は摂動の次数ごとに電荷保存則・ゲージ不変性を保証する。

- **電荷保存則** $\partial_\mu \hat{j}^\mu(x) = 0$ は、感受率と摂動電磁ポテンシャルの原因の座標での畳み込み積分である誘導電流密度でも、結果の座標による4元発散が0である形で摂動次数ごとに成立する：

$$\partial_\mu \hat{\chi}_{\mu_1 \dots}^\mu(x, x_1, \dots) = 0.$$

- **ゲージ不変性** 線型・非線型感受率の作用積分での表式：

$$\hat{\chi}_{\mu_1 \dots}^\mu(x, x_1, \dots) = \frac{-c^2}{n!} \frac{\delta^n \mathcal{I}_{\text{mat}}}{\delta A_\mu(x) \delta A^{\mu_1}(x_1) \dots} \Big|_{(0)},$$

では、原因の座標と結果の座標が対称であり（相反性があり）、ゲージ不変性は原因の座標による4元発散が0として自然な形で保証される：

$$\partial^{\mu_1} \hat{\chi}_{\mu_1 \dots}^\mu(x, x_1, \dots) = 0.$$

実際、次の計算によって、感受率の原因の座標での4元発散が0であることによりゲージ関数の寄与は消えて誘導電流密度はゲージ不変に保たれることが確認できる：

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 \hat{\chi}_{\mu_1 \dots}^\mu(x, x_1, \dots) \underbrace{\Delta A^{\mu_1}(x_1)}_{\Delta A^{\mu_1}(x_1) - c \partial^{\mu_1} \eta(x_1)} \\ &= \int d^4x_1 \hat{\chi}_{\mu_1 \dots}^\mu(x, x_1, \dots) \Delta A^{\mu_1}(x_1) + c \int d^4x_1 \partial^{\mu_1} \hat{\chi}_{\mu_1 \dots}^\mu(x, x_1, \dots) \eta(x_1) \\ &= \int d^4x_1 \hat{\chi}_{\mu_1 \dots}^\mu(x, x_1, \dots) \Delta A^{\mu_1}(x_1). \end{aligned}$$

D. 通常多電子系の扱いとの比較：DP と多電子問題

- 既存の感受率の枠組みでは、SP, ϕ は予め最適化、消去し、電荷間クーロン相互作用に転化する。Hamiltonian で見れば本論の SP を残したままの \hat{H} と SP を消去した通常多電子系の扱いで用いる \hat{H}' は次のように異なる：

$$\hat{H} \equiv \int d^3x \frac{1}{2m} \hat{\psi}_\alpha^\dagger(x) \left(\frac{\hbar}{i} \partial_i - qA_i(x) \right)^2 \hat{\psi}_\alpha(x) + \hat{\psi}_\alpha^\dagger(x) q\phi(x) \hat{\psi}_\alpha(x),$$

↓ SP, $\phi(x)$ を消去

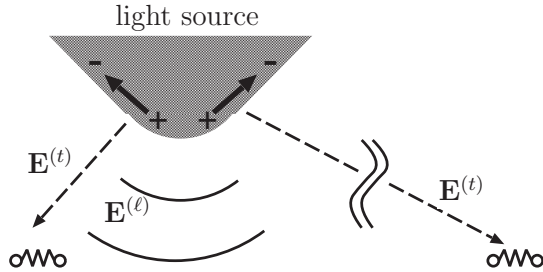
多電子系の通常ハミルトニアン：

$$\hat{H}' \equiv \int d^3x \frac{1}{2m} \hat{\psi}_\alpha^\dagger(x) \left(\frac{\hbar}{i} \partial_i - qA_i(x) \right)^2 \hat{\psi}_\alpha(x) + \hat{\psi}_\alpha^\dagger(x) \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\hat{\psi}_\alpha^\dagger(x') \hat{\psi}_\alpha(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \hat{\psi}_\alpha(x).$$

- この通常採用される処方方は SP を完全に最適化することで交換相互作用などの量子効果（化学結合）によって多電子系基底状態・励起状態を束縛状態として用意するためである。
- 摂動の原因として \mathbf{A} のみを含む H' は通常の光学系に適すが DP 系に不適である。実際、 H' を DP 系に適用するなら、電子間クーロン相互作用を考慮して多電子問題を解くことが必須となるが、これは困難である。たとえ解けても、 ϕ 入射の効果と元来の電子間相互作用と区別することは困難である。
- DP 系の入射場には $\Delta\mathbf{A}(x)$ (Off-shell 成分を含む横電磁場) と $\Delta\phi(x)$ (縦電場) が共存するので、本論のように、 $\Delta A^\mu(x) \equiv (\Delta\phi(x), c\Delta\mathbf{A}(x))$ を原因、 $\Delta\hat{j}^\mu(x) \equiv (c\Delta\hat{\rho}(x), \Delta\hat{\mathbf{j}}(x))$ を結果とする因果関係を記述する感受率を定義するのが相応しい。
- $\Delta\phi(x)$ を応答の原因として残し、電子系の基底・励起状態を束縛状態として用意するために必要な量子多体効果を補償するために密度汎関数法を援用し、 $v^{(\text{AUX})}(x)$ (交換・相関ポテンシャル) を導入する。
- 本論では、電磁場を古典場とした半古典論の枠組の中で Heisenberg 演算子としての線型・非線型感受率を導出した。

- DP は SP, ϕ を介して多電子問題と関係している。
- ϕ 入射と \mathbf{A} 入射を対等に扱うのが DP 系の応答理論として相応しい。

図 2: 光源に近い, または, 光源内の物質には縦電場 (SP) と横電場 (VP) が入射する, 一方光源から遠い物質には横電場 (VP) のみが入射する. (ここでの SP, VP はクーロンゲージの下で考える.)



III. 非共鳴 DP 系での線型応答：LONDON 構成方程式が支配する光学の新しいレジーム

A. 電場・磁場で応答を記述する不合理

電磁応答の原因を電場・磁場とできない状況は, 表 I に記した 8 つの場合の 1 つに限られ, 近接・内在场入射条件, 近接・内在场観測条件, 非共鳴条件全てが満たされる場合である. 詳細は次の §III B で述べるが, 電磁応答の原因を電場・磁場とできないことは, 以下の点に注意すれば認識できる:

1. Meissner 効果を発現する超電導体系, Aharonov-Bohm 効果 [Aharonov and Bohm 1959] を発現するコヒーレントな電子ビーム系は, 磁場ではなく VP による記述が必須である系の例である.
2. カイラリティがある系では電氣的応答と磁氣的応答を区別できない [Cho 2008, Cho 2010]. つまり, 電場・磁場を原因, 分極・磁化を結果とする考え方が無効になる.
3. 電場・磁場を原因, 分極・磁化が結果とみなす通常の構成方程式には非物理的冗長性が含まれ論理的瑕疵がある. 実際, 本質的な源泉自由度は 3 成分 (電荷密度 1 成分 + 横電流密度 2 成分) であるところ, この考え方による源泉自由度, つまり, 分極と磁化は合わせて 6 成分を持ち冗長自由度を含む.
4. DP 系では縦電場 $\mathbf{E}^{(l)}$, 横電場 $\mathbf{E}^{(t)}$ の入射が共存する. 本来的に, $\mathbf{E}^{(l)}$, $\mathbf{E}^{(t)}$ はクーロンゲージの下では ϕ , \mathbf{A} である. SP, VP は非相対論的ハミルトニアン中で異なる依存性を持つゆえ, 異なる応答を示すので全電場を応答の原因とみなせない, また, 誘電率・透磁率での記述に基づく FDTD 法 (有限差分時間領域法) なども原理的瑕疵がある.

B. 非金属 DP 系線型応答

DP 系の応答理論：電磁ポテンシャルを原因とする単一感受率 [Banno 2018b] から電場の概念が破綻する条件を明らかにする [Banno 2018a, Banno and Ohtsu 2018]. Heisenberg 描像での摂動論により線型応答の感受率を求めると誘導電荷密度，誘導電流密度は次となる：

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^t dt_1 \int d^3r_1 \left\{ \frac{1}{i\hbar} [\hat{\rho}^{(in0)}(\mathbf{r}, t), \hat{\rho}^{(in0)}(\mathbf{r}_1, t_1)] \Delta\phi(\mathbf{r}_1, t_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{i\hbar} [\hat{\rho}^{(in0)}(\mathbf{r}, t), \hat{j}_{i_1}^{(in0)}(\mathbf{r}_1, t_1)] \Delta A_{i_1}(\mathbf{r}_1, t_1) \right\}, \\ \Delta\hat{j}_i(\mathbf{r}, t) &= \underbrace{-\frac{q}{m}\hat{\rho}^{(in0)}(\mathbf{r}, t)\Delta A_i(\mathbf{r}, t)}_{\text{非相対論性起源の非共鳴項}} \\ &\quad \int_{-\infty}^t dt_1 \int d^3r_1 \left\{ \frac{1}{i\hbar} [\hat{j}_i^{(in0)}(\mathbf{r}, t), \hat{\rho}^{(in0)}(\mathbf{r}_1, t_1)] \Delta\phi(\mathbf{r}_1, t_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{i\hbar} [\hat{j}_i^{(in0)}(\mathbf{r}, t), \hat{j}_{i_1}^{(in0)}(\mathbf{r}_1, t_1)] \Delta A_{i_1}(\mathbf{r}_1, t_1) \right\}.\end{aligned}$$

この線型応答による誘導電荷密度演算子・誘導電流密度演算子の非金属のモデル：スピンレス 1 電子 2 準位系の基底状態で期待値を求める。ただし，2 準位は異なるパリティをもち完全直交系をなすと仮定する。

- **誘導電荷密度** を考察する。基底状態での期待値をとり，さらに，電磁ポテンシャルに長波長近似を適用すると縦電場，横電場を原因とする応答の形に書き直せる：

$$\begin{aligned}\Delta\rho(\mathbf{r}, t) &= \chi_j^{\rho\leftarrow(\ell)}(\mathbf{r}, \omega) \Delta E_j^{(\ell)}(\mathbf{0}, t) + \chi_j^{\rho\leftarrow(t)}(\mathbf{r}, \omega) \Delta E_j^{(t)}(\mathbf{0}, t), \\ \chi_j^{\rho\leftarrow(\ell)}(\mathbf{r}, \omega) &= \chi_j^{\rho\leftarrow(t)}(\mathbf{r}, \omega) = 2q^2 \frac{\eta}{\eta^2 - 1} \frac{1}{\hbar\omega} \mathcal{D}_j \varphi_0(\mathbf{r})\varphi_1(\mathbf{r}), \\ \text{where } \eta &\equiv \frac{\hbar\Delta\omega_1}{\hbar\omega} = \frac{\text{励起エネルギー}}{\text{光子エネルギー}}, \\ \text{and } \mathcal{D}_i &\equiv \int d^3r \varphi_1(\mathbf{r}) r_i \varphi_0(\mathbf{r}).\end{aligned}$$

- 誘導電荷密度に限れば，8 種の光学系で縦電場，横電場は同じ効果
→ **誘導電荷密度の原因は全電場とみなせる。**
- **誘導電流密度** を考察する。基底状態での期待値をとり，さらに，電磁ポテンシャルに長

表 IV: (表 I の再掲) ロバストな光源, 観測器と応答をする物質の 3 要素からなる系の分類. 近接・内在場入射条件, かつ, 近接・内在場観測条件, かつ, 非共鳴条件下では電場 (全電場) を応答の原因とみることができない. Ref. [Banno 2018a, Banno and Ohtsu 2018] より抜粋, 改変.

	近接・内在場観測 源泉: $\Delta\rho$ and $\Delta\mathbf{j}$	遠隔場観測 源泉: $\Delta\mathbf{j}$
近接・内在場入射 : $\Delta\mathbf{E}^{(\ell)} + \Delta\mathbf{E}^{(t)}$ 電場の有効性	(I) DP 系 非共鳴 / 共鳴 NG / OK	(II) DP 系 非共鳴 / 共鳴 OK / OK
遠隔場入射 : $\Delta\mathbf{E}^{(t)}$ 電場の有効性	(I) DP 系 非共鳴 / 共鳴 OK / OK	(II) 通常の光学系 非共鳴 / 共鳴 OK / OK

波長近似をすると縦電場, 横電場を原因とする応答の形に書き直せる :

$$\begin{aligned}\Delta j_i(\mathbf{r}, t) &= \chi_{ij}^{\mathbf{j}\leftarrow(\ell)}(\mathbf{r}, \omega) \Delta \dot{E}_j^{(\ell)}(\mathbf{0}, t) + \chi_{ij}^{\mathbf{j}\leftarrow(t)}(\mathbf{r}, \omega) \Delta \dot{E}_j^{(t)}(\mathbf{0}, t), \\ \chi_{ij}^{\mathbf{j}\leftarrow(\ell)}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{q^2 \hbar^2}{m} \frac{1}{\eta^2 - 1} \frac{1}{(\hbar\omega)^2} \mathcal{D}_j (\partial_i \varphi_1(\mathbf{r}) \varphi_0(\mathbf{r}) - \varphi_1(\mathbf{r}) \partial_i \varphi_0(\mathbf{r})), \\ \chi_{ij}^{\mathbf{j}\leftarrow(t)}(\mathbf{r}, \omega) &= \eta^2 \chi_{ij}^{\mathbf{j}\leftarrow(\ell)}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{q^2 \hbar^2}{m} \frac{1}{(\hbar\omega)^2} \varphi_0(\mathbf{r}) \varphi_0(\mathbf{r}), \\ \text{where } \eta &\equiv \frac{\hbar \Delta \omega_1}{\hbar \omega} = \frac{\text{励起エネルギー}}{\text{光子エネルギー}}.\end{aligned}$$

- 共鳴条件下 : $\eta \rightarrow 1$ で共鳴項が主要 $\chi_{ij}^{\mathbf{j}\leftarrow(\ell)}(\mathbf{r}, \omega) = \chi_{ij}^{\mathbf{j}\leftarrow(t)}(\mathbf{r}, \omega)$
- 遠隔場入射条件下 : 入射の横電場自身が全電場
- 遠隔場観測条件下 : 空間平均をして $\overline{\chi_{ij}^{\mathbf{j}\leftarrow(\ell)}(\mathbf{r}, \omega)} = \overline{\chi_{ij}^{\mathbf{j}\leftarrow(t)}(\mathbf{r}, \omega)}$
- 上記の 3 つの場合, 誘導電流密度 (と誘導電荷密度) の原因は全電場とみなせる.
- 上記の補完の条件 ; 非共鳴条件かつ近接・内在場入射条件かつ近接・内在場観測条件のとき $\chi_{ij}^{\mathbf{j}\leftarrow(\ell)}(\mathbf{r}, \omega) \neq \chi_{ij}^{\mathbf{j}\leftarrow(t)}(\mathbf{r}, \omega)$
- 誘導電流密度の原因は全電場とみなせない.

以上をまとめると, 表 IV (表 I の再掲) のようになり, 近接・内在場入射条件, 近接・内在場観測条件, 非共鳴条件がそろったとき縦電場と横電場の応答の違いが顕わになり電場 (全電場) は応答の原因とみなせないことがわかった.

C. London 構成方程式が支配する光学のレジーム

- 非共鳴 DP 系は電場・磁場と誘電率・透磁率で記述不可であることから SP, VP と単一感受率による構成方程式を根本と考えるのがよい。
- 根本的な構成方程式を支配する Heisenberg 演算子の単一感受率に対しては、期待値をとらずとも非共鳴項、共鳴項に関わる物質の詳細によらない考察が可能である。
- 非相対論性が起源の非共鳴項の反磁性電流はどの物質にも存在する。特に、**共鳴遷移の抑制・禁制の条件下での線型応答はクーロンゲージの下で London 構成方程式 [London 1950] が支配する。**これは今まで認知されていない光学のレジームである。基本的に感受率演算子はいかなるゲージの電磁ポテンシャルと畳み込み積分をしてもよいが、クーロンゲージ以外では、VP の縦成分の寄与として相殺すべき非共鳴項と共鳴項の両方を考慮する複雑さが生じる。

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\rho}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^t dt_1 \int d^3r_1 \left\{ \frac{1}{i\hbar} [\hat{\rho}^{(in0)}(\mathbf{r}, t), \hat{\rho}^{(in0)}(\mathbf{r}_1, t_1)] \Delta \phi(\mathbf{r}_1, t_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{i\hbar} [\hat{\rho}^{(in0)}(\mathbf{r}, t), \hat{j}_{i_1}^{(in0)}(\mathbf{r}_1, t_1)] \Delta A_{i_1}(\mathbf{r}_1, t_1) \right\}, \\ \Delta \hat{j}_i(\mathbf{r}, t) &= \underbrace{-\frac{q}{m} \hat{\rho}^{(in0)}(\mathbf{r}, t) \Delta A_i(\mathbf{r}, t)}_{\text{London 構成方程式}} \\ &\quad + \int_{-\infty}^t dt_1 \int d^3r_1 \left\{ \frac{1}{i\hbar} [\hat{j}_i^{(in0)}(\mathbf{r}, t), \hat{\rho}^{(in0)}(\mathbf{r}_1, t_1)] \Delta \phi(\mathbf{r}_1, t_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{i\hbar} [\hat{j}_i^{(in0)}(\mathbf{r}, t), \hat{j}_{i_1}^{(in0)}(\mathbf{r}_1, t_1)] \Delta A_{i_1}(\mathbf{r}_1, t_1) \right\}. \end{aligned}$$

D. 非金属 DP 系と超電導体系の対応

非共鳴応答：London 構成方程式が支配する光学のレジームで感受率演算子の一般的考察から、非金属 DP 系と超電導体系の対照を試みる：

- 半導体・絶縁体は励起エネルギーを持つ物質であり、非共鳴条件の入射光、さらに間接遷移型では断熱性 (Frank=Condon の原理) により共鳴項 (1 電子励起) を抑制。
→ 非共鳴項 (London 構成方程式) による反磁性電流が出現。

London 構成方程式による電磁応答は磁場を原因とみなして記述できない。

- 超電導体は小さな励起エネルギーを持つ物質であり，入射静磁場 ($\hbar\omega = 0$) の非共鳴性により共鳴項（1 電子励起）を抑制。
 - 非共鳴項（London 構成方程式）による反磁性電流が出現。
- 静磁場は波長無限大の電磁場であり，それが入射される超電導体系は非共鳴条件，近接・内在場入射条件，近接・内在場観測条件をみだし電場・磁場で記述できない DP 系と見なせる。
 - 超電導体系の Meissner 効果は非共鳴 DP 系の応答と見なせる。
- 研究会でご指摘があったが，感受率演算子だけの考察では不十分。大域的な完全反磁性電流（Meissner 効果）は電子数が固定された状態では共鳴項の寄与と相殺して現れない。非共鳴 DP 系と超電導体系の対比のためには期待値をとる状態が電子数に揺らぎをもつことまで考える必要がある。

E. 非共鳴 DP 系の線型応答：まとめ

- 非金属の DP 系が非共鳴条件，近接・内在場入射条件，近接・内在場観測条件下にあるとき，電場（全電場）は応答の原因とみなせない。この条件下では縦電場と横電磁場が共存し，誘導電流密度に非共鳴項が存在することにより 2 種の電場の応答の違いが現れるからである。
- 応答の原因としての電場の概念の破綻を，単純化した 1 電子系の長波長近似下での線型応答で示したが，誘導電流密度の非共鳴項の起源は系の非相対論性ゆえ，多電子系でも同様となる。
- クーロンゲージの元で共鳴項を抑制・禁制する状態での期待値をとれば，磁場の応答としては記述できない London 構成方程式となる。
- 光学応答において非共鳴項：London 構成方程式が支配するレジームは，今まで認知されていない光学のレジームである。そこでは，電場・磁場を応答の原因とみなすことはできず電磁ポテンシャルを原因とみることが必須である。このレジームにある非金属の非共鳴 DP 系では分極・磁化，誘電率・透磁率を用いた構成方程式は無効であり，この構成方程式に基づく FDTD 法も無効となる。
- 川添・大津らの非金属の非共鳴条件下での DP 系の実験は，今まで認識されなかった非共鳴項 = London 構成方程式が支配する光学の新しいレジームでのものである。
- London 構成方程式が支配する半導体・絶縁体系と超電導体系との対応について考察した。非共鳴項（London 構成方程式）で大域的応答が生き残るには電子数が保存しない系の取り扱いが必要となる。

- 非共鳴 DP 系での電場・磁場の概念の破綻，DP 系という光学のレジームがなぜ認識されなかったのか？

- 通常の光学での実験条件：遠隔場入射条件下，または，遠隔場観測条件下，または，共鳴条件下では電場・磁場の概念の破綻は現れない。
- DP 系を対象とする近接場光学では，金属（プラズモニクス）への興味が大きく，DP 系の特徴が現れる非金属を用いた実験が少ないこと。
- 縦電場（非放射場）を応答の原因と考えず，電荷間 2 体相互作用に転化する多電子系の処方が標準的な多電子系の扱い方となっているため，SP または縦電場への応答という視点が失われていること。ただし，通常の光学では，物理的に SP（縦電場）の入射ははないため，この多電子系の扱い方と互換性がある。

- 通常多電子系の扱いにおいて SP を予め最適化（消去）しておく理由は，量子多体効果；交換・相関相互作用によって（化学結合によって）多電子系の基底・励起状態を束縛状態とするためである。SP を応答の原因として残すとき，この量子多体効果を密度汎関数法の補助ポテンシャルを援用して補償することを提案した。

- 非共鳴項 = London 構成方程式が支配する新しい光学のレジームにある DP 系では応答の原因としての電場・磁場の概念が破綻する。
- DP と多電子問題は不可分である。

IV. 非共鳴 DP 系の非線型応答 #1：非可換性・量子効果で発現する磁気光学効果

§II で定式化したように SP・VP を対等に扱う線型・非線型感受率が次のように系統的に定義され，摂動の次数ごとに感受率が電荷保存則・ゲージ不変性を保証する [Banno 2018b]：

$$\begin{aligned}
 \hat{j}^\mu(x) &\equiv (c\hat{\rho}(x), \hat{\mathbf{j}}(x)) = \left(c q \hat{\psi}_\alpha^\dagger(x) \hat{\psi}_\alpha(x), \frac{q}{2m} \hat{\psi}_\alpha^\dagger(x) \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q \mathbf{A}(x) \right) \hat{\psi}_\alpha(x) + \text{h.c.} \right) \\
 &= \hat{j}^\mu(x) \Big|_{(0)} + \underbrace{\int d^4x_1 \frac{\delta \hat{j}^\mu(x)}{\delta A^{\mu_1}(x_1)} \Big|_{(0)}}_{\hat{\chi}_{\mu_1}^\mu(x, x_1)} \Delta A^{\mu_1}(x_1) \\
 &\quad + \underbrace{\int d^4x_1 \int d^4x_2 \frac{1}{2!} \frac{\delta^2 \hat{j}^\mu(x)}{\delta A^{\mu_1}(x_1) \delta A^{\mu_2}(x_2)} \Big|_{(0)}}_{\hat{\chi}_{\mu_1 \mu_2}^\mu(x, x_1, x_2)} \Delta A^{\mu_1}(x_1) \Delta A^{\mu_2}(x_2) + \dots
 \end{aligned}$$

非線型応答の参考のために線型応答を復習しておく。§III で述べた線型感受率には系の非相対論性を起源として非共鳴条件下で強調される寄与=非共鳴項があり，反磁性に寄与する：

$$\hat{\chi}^{\mu}_{\mu_1}(x, x_1) = \underbrace{\frac{-q}{mc^2} \tilde{\delta}^{\mu}_{\mu_1} \delta^4(x - x_1) \hat{j}^{(in0)0}(x)}_{\text{非共鳴項 (反磁性項)}} + \underbrace{\frac{1}{i\hbar c^2} \theta(ct - ct_1) \left[\hat{j}^{(in0)\mu}(x), \hat{j}^{(in0)}_{\mu_1}(x_1) \right]}_{\text{共鳴項}}.$$

§III C で説明したように共鳴項を抑制する基底状態，励起状態の空間であれば非共鳴項が主要となり，クーロンゲージの下で London 構成方程式が導かれる：

$$\Delta \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{q}{m} \rho^{(0)}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

非共鳴条件，かつ，近接・内在場入射条件，かつ，近接・内在場観測条件を満たすときこの非共鳴項 = London 構成方程式が応答を支配する光学のレジームとなり，電場・磁場を応答の原因と考えられなくなる。また，超電導体系の Meissner 効果が現れるのもこの条件下である。

A. 非線型感受率の非共鳴項

非線型感受率にも非共鳴項が存在する。交換子一つ分がデルタ関数になったものである。

$$\begin{aligned} & \hat{\chi}^{\mu}_{\mu_1 \mu_2}(x, x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{2!} \frac{1}{i\hbar c^2} \frac{-q}{mc^2} \left\{ \delta(ct - ct_1) \theta(ct - ct_2) \tilde{\delta}^{\mu}_{\mu_1} \delta^3(x - x_1) \left[\hat{j}^{(in0)0}(x), \hat{j}^{(in0)}_{\mu_2}(x_2) \right] \right. \\ & \quad + \delta(ct - ct_2) \theta(ct - ct_1) \tilde{\delta}^{\mu}_{\mu_2} \delta^3(x - x_2) \left[\hat{j}^{(in0)0}(x), \hat{j}^{(in0)}_{\mu_1}(x_1) \right] \\ & \quad \left. + \theta(ct - ct_1) \delta(ct_1 - ct_2) \tilde{\delta}^{\mu}_{\mu_1 \mu_2} \delta^3(x_1 - x_2) \left[\hat{j}^{(in0)\mu}(x), \hat{j}^{(in0)}_0(x_1) \right] \right\} \\ & \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{非共鳴項}} \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{i\hbar c^2} \right)^2 \left\{ \theta(ct - ct_1) \theta(ct_1 - ct_2) \left[\left[\hat{j}^{(in0)\mu}(x), \hat{j}^{(in0)}_{\mu_1}(x_1) \right], \hat{j}^{(in0)}_{\mu_2}(x_2) \right] \right. \\ & \quad \left. + \theta(ct - ct_2) \theta(ct_2 - ct_1) \left[\left[\hat{j}^{(in0)\mu}(x), \hat{j}^{(in0)}_{\mu_2}(x_2) \right], \hat{j}^{(in0)}_{\mu_1}(x_1) \right] \right\}. \\ & \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{共鳴項}} \end{aligned}$$

磁気光学 (MO) 効果は 2 次の非線型感受率を介して生じる。

B. 非共鳴系の磁気光学 (MO) 効果 #1: モデル

実験条件に合った次のモデルで MO 効果を計算してみる。

- 光については非共鳴条件, かつ, 遠隔場入射条件, かつ, 遠隔場観測条件であり, 線型応答では DP 系ではないが, 一様な静磁場について波長が無限大と考えれば, 1 波長以内に源泉と観測点がある DP 系の極限と考えられる. **非線型応答についての DP 系の分類は, 相互作用に近接・内在電磁場が参加していることを判断基準としてよいだろう. その意味で MO 効果は DP 系の非線型現象とみなせる.**
- 光の電磁場と静磁場が共存し, 摂動の VP は $\Delta\mathbf{A}(x) = \Delta\mathbf{A}^{\text{光}}(x) + \Delta\mathbf{A}^{\text{静磁場}}(x)$ と表される. 2 次の非線型効果中の MO 効果は次の交叉項を含む応答である: $\Delta A_i^{\text{光}}(x) \cdot \Delta A_j^{\text{静磁場}}(x)$.
- 無摂動系は反転対称性があると仮定すると 2 次の非線型応答には非共鳴項 (電荷密度と VP の結合のある項) のみが寄与する. 不純物がドーブされた SiC について反転対称性があるという仮定がどの程度正しいかは不明だが, 共鳴項を禁制遷移として 0 にできるので簡単化のために課す.
- 2 準位系で基底状態と励起状態は空間的に異なるパリティを持ち, 時間的同じパリティを持つ: これも簡単化のために仮定する.

以上のモデルによると, 光の遠隔場入射と反転対称性によって 2 次の非線型応答の共鳴項は禁制されるが, 非共鳴項は許容となり MO 効果を導く誘導電流が導かれる:

$$\begin{aligned} \Delta j_i^{\text{MO}}(x) &= 2 \frac{1}{2!} \frac{q}{m} \int dt_1 \int d^3x_1 \frac{1}{i\hbar} \langle 0 | [\hat{\rho}^{(in0)}(x), \hat{j}_{i_1}^{(in0)}(x_1)] | 0 \rangle \Delta A_i^{\text{静磁場}}(x) \Delta A_{i_1}^{\text{光}}(x_1) \\ &= \frac{1}{2!} \frac{q}{m} \frac{1}{\omega} \int dt_1 \int d^3x_1 \frac{1}{i\hbar} \langle 0 | [r_j \hat{\rho}^{(in0)}(x), \hat{j}_{i_1}^{(in0)}(x_1)] | 0 \rangle \epsilon_{ijk} \Delta E_{i_1}^{(t)}(\mathbf{0}) \Delta B_k \cos(\omega t_1), \\ \text{VP の長波長近似の下での主要項: } &\begin{cases} \Delta A_i^{\text{静磁場}}(x) = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} r_j \Delta B_k(\mathbf{0}), \\ \Delta A_{i_1}^{\text{光}}(x_1) = -\frac{1}{\omega} \Delta E_{i_1}^{(t)}(\mathbf{0}). \end{cases} \end{aligned}$$

C. 非共鳴系の MO 効果 #2: 非可換性を起源とする MO 効果

- 遠隔場観測に対する有効な源泉は電流密度の体積平均である. これは §III B での遠隔場観測に寄与する誘導電流密度の評価と同じ考え方で, 遠方では源泉の小さな構造は観測に寄与しないことを意味する:

$$\overline{\Delta j_i^{\text{MO}}(x)} = \frac{1}{V} \int d^3r \Delta j_i^{\text{MO}}(x).$$

- 2準位系において遠隔場観測の結果の座標の体積積分を行うと、量子効果 $[r_i, p_{i_1}] = i\hbar\delta_{ii_1}$ を継承し、座標と運動量に関わる 2種の双極子遷移行列要素の非可換性が残り、双極子遷移行列要素自体に依存しない誘導電流による放射になる。

$$\int d^3r \int d^3r_1 \langle 0 | [r_j \hat{\rho}^{(in0)}(x), \hat{j}_{i_1}^{(in0)}(x_1)] | 0 \rangle = -\frac{q^2(nV)^2}{m} \delta_{j i_1} \cos\left(\frac{E_1 - E_0}{\hbar}(t - t_1)\right).$$

$$\therefore \overline{\Delta j_i^{\text{MO}}(x)} = V \frac{q^3 n^2}{2m^2} \delta_{j i_1} \frac{1}{\frac{E_1 - E_0}{\hbar} - \omega^2} (\Delta \mathbf{E}^{(t)}(\mathbf{0}) \times \Delta \mathbf{B})_i \sin \omega t$$

量子効果（演算子の非可換性）によって発現する非線型効果

- 反転対称性がある系でも 2次の非線型感受率の非共鳴項から MO 効果が生じる。
- 反磁性電流密度演算子と光の誘導電流密度演算子の非可換性（相互作用）が起源。
- 遠隔場観測，2準位系の条件下。
- 双極子遷移行列要素に依存しない。

V. 非共鳴 DP 系の非線型応答 #2：PB と巨大磁気光学効果，高効率発光

フォトンブリーディング（PB）で作製された間接遷移型半導体が MO 効果を現すが，それが巨大であることも非線型過程の観点から論じるべき特徴である。

A. 非共鳴系の MO 効果 #3：回転角と電子系のサイズ

まず，実験で検出される MO 効果が上記のものであるとしたときに，どの程度のコヒーレント長の電子系が必要かを見積もる：

- 電子系をコヒーレント長； a を一辺とするの立方体と仮定： $V = a^3$
- Faraday 配置を仮定：
 - 入射光の波数，印加静磁場 $\mathbf{k}, \Delta \mathbf{B} \parallel \mathbf{z}$,
 - 入射光の偏光 $\Delta \mathbf{E}^{(t)} \parallel \mathbf{x}$,
 - MO 効果に寄与する誘導電流密度（とその放射電場） $\Delta \mathbf{j}^{\text{MO}}$ の \mathbf{y} 成分，
- 出射電場の x 成分の振幅は入射電場そのもの： $\Delta \mathbf{E}^{(t)}(z)$,

- 偏光回転に寄与する y 成分の振幅は電子系の xy 面での大きさが光の波長に対して十分大きいと仮定. 1次元の Helmholtz 方程式

$$\left(-\partial_z^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \Delta \mathbf{E}_y^{(t),\text{MO}}(z) = \frac{\omega}{\epsilon_0 c^2} \Delta j_y^{\text{MO}}(z)$$

の解として, Green 関数との畳み込み積分で求まる.

$$\Delta \mathbf{E}^{(t),\text{MO}}(z) = \int_{-a/2}^{a/2} dz' \frac{e^{i\omega(z-z')/c}}{2i\omega/c} \frac{\omega}{\epsilon_0 c^2} \overline{\Delta j_y^{\text{MO}}(z')}$$

- 等方的電子系を仮定したので z 方向の幅も波長程度以上になった. その幅での誘導電流の均一性を仮定するのは不正確であるが...
- 実験 川添・大津らの SiC の MO : $\left| \frac{\Delta\theta}{\Delta B} \right| = 360 \text{rad/T}$ [Ohtsu 2018]
- 理論

$$|\Delta\theta| \simeq \left| \frac{\Delta \mathbf{E}_y^{(t),\text{MO}}(z)}{\Delta \mathbf{E}_x^{(t)}(z)} \right| \simeq \left| \frac{1}{\epsilon_0 c} \Delta j_y^{\text{MO}} \right| = a^4 \frac{1}{\epsilon_0 c} \frac{q^3 n^2}{2m^2 \omega^2} \underbrace{\frac{\omega^2}{\frac{E_1 - E_0}{\hbar} - \omega^2}}_{\mathcal{O}(1)} |\Delta \mathbf{B}|$$

$$\therefore a = \left(360 \text{rad/T} \frac{8\pi^2 \epsilon_0 c^3 m^2}{q^3 n^2 \lambda^2} \right)^{1/4} \simeq 2 \mu\text{m}$$

ただし, キャリア (不純物) 密度 $n = 2 \times 19/\text{cm}^3$, $\lambda = 405 \text{nm}$ [Ohtsu 2016].

- 巨大 MO 効果は大きなコヒーレント長をもつ電子系の応答であることを示唆する.
⇒ 何らかの凝縮が起こっている可能性がある.
- MO 効果は反磁性電流 (非相対論性起源の電荷密度と VP の結合) と光による誘導電流の相互作用 (非可換性) が起源

B. 光学フォノンとそれに伴う電磁場

μm オーダーの大きなコヒーレント長をもつ電子系の由来を考える. 川添らは光学フォノンの関与を実験的に確かめている [Wada et al. 2014, Yamaguchi et al. 2014, Kawazoe et al. 2015]. 光学フォノンにはその分散関係に従う電磁場が伴うが, 光の分散関係から遠くにあり, 放射されず物質に内在する電磁場; DP でもある. 低波数の横光学フォノン, または, 縦光学フォノンは大域的に一定の電流密度をもたらすモードがある. このモードはフォノンのコヒーレント長の範囲に一定の VP をもたらす.

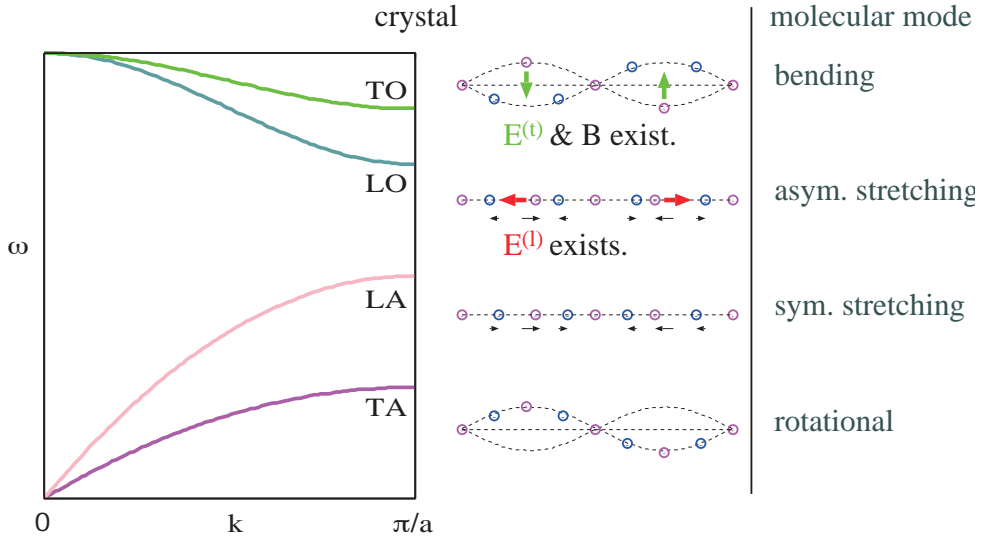


図 3: フォノンの分類.

C. 巨大 MO 効果と PB, 光学フォノン

PB とフォノンの関わりを非線型応答の観点から考える. そのために, 誘導電荷密度・誘導電流密度を不変に保つ, 次の電磁ポテンシャルと感受率の変換を考える:

非共鳴描像

$$\Delta A^\mu(x) \rightarrow \Delta \tilde{A}^\mu(x) \equiv \left(\Delta \phi(x) + \frac{-q}{2m} |\Delta \mathbf{A}(x)|^2, c \Delta \mathbf{A}(x) \right),$$

$$\hat{\chi}_{\mu_1 \dots \mu_n}^\mu(x, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \frac{1}{n!} \hat{\mathcal{T}} \left[\left[\dots [\hat{\chi}_{\mu_1}^\mu(x, x_1), \hat{j}_{\mu_2}^{(in0)}(x_2)], \dots \right], \hat{j}_{\mu_n}^{(in0)}(x_n) \right].$$

変換後の SP に含まれる VP の 2 次の項は, 古い描像での 1 次高い非線型応答の非共鳴項の寄与を転化したものでキャリアに引力的ポテンシャルとして働く.

- 低波数の横・縦の光学フォノン (TO・LO フォノン) は大域的に一樣な電流を作ることが可能. この一樣な電流は一樣な VP をもたらす. これは Off-shell の VP (DP の一種) であり物質内にとどまる.
- 非共鳴描像の SP に含まれる光学フォノンの VP の 2 次の項は大域的に一樣な成分をもち, 光学フォノンのコヒーレント領域 (キャビティ内) にあるキャリアに引力ポテンシャルを与える.
- PB の誘導放出による冷却を最適化するために, 自律的に μm オーダーの光学フォノンキャ

ビティが形成されると考えてみる。VPの2次の引力的効果でキャリアがフォノンキャビティに引き込まれ濃縮・凝縮され、コヒーレントな電子系をつくることがひとつの可能性として導かれる。

- このように光学フォノンキャビティに形成されたコヒーレント長の大きな電子系が、PBデバイスの巨大MO効果と高効率発光の共通の原因である可能性がある。

D. 非共鳴DP系の非線型応答：まとめ

- 場の演算子の非可換性から顕現する非共鳴非線型効果（MO効果）が存在する。
- 実験から μm オーダーのコヒーレントな電子系の存在が示唆される。
- 4元誘導電流密度を不変に保つ電磁ポテンシャルと感受率の変換によって、非線型感受率の非共鳴項の効果は、変換後のSP中に含まれるVPの2次の項に転化できる。それにはキャリアに引力の相互作用をもたらす。
- 光学フォノンのコヒーレント領域（キャビティ）での電流密度により生じるVPの存在下で上記の変換を考えると、このVPの2次の項には波数0で（空間平均をしても残る効果として）大域的にキャリアに引力相互作用をもたらす成分があり、光学フォノンのキャビティが大きいほどこの引力相互作用は大きくなる。
- PBは誘導放出による冷却の最適化により、光学フォノンキャビティのサイズを自律的に成長させると推察される。この大きな光学フォノンキャビティがキャリアにもたらす大域的、かつ、大きな引力相互作用によってキャビティ内にキャリアが濃縮・凝縮されコヒーレント長の大きな電子系が実現することがMO効果の巨大化、高効率発光の原因となっている可能性がある。

VI. 全体のまとめ

- DPとはナノ構造の近接・内在電磁場であり、Off-shellのVPやSPという非放射場の成分も含む。光源、または、観測器がナノ構造の近接・内在場の領域にある系をDP系と定義した。特に応答する物質が非共鳴条件、かつ、近接・内在入射条件、かつ、近接・内在観測条件の場合、非共鳴項＝London構成方程式が支配する新しい光学のレジームとなる。
- DP系を記述するに相応しい半古典論の応答理論をつくるため、作用積分の電磁ポテンシャルによる汎関数微分から線型・非線型感受率をHeisenberg演算子として系統的に導出した。この感受率は原因としてのSPとVPを対等にあつかう。多体量子効果を考慮し、基底・励起状態を束縛状態として用意するために密度汎関数法を援用する。

- 既存の多電子系の扱い方では SP を予め最適化することで多体量子効果を考慮し、基底・励起状態を束縛状態として用意している。この意味で非共鳴 DP 系は多電子問題と不可分であり、Off-shell 性・非放射性は電荷間相互作用に他ならない。既存の扱いは On-shell の VP のみを応答の原因と考える通常の光学系と互換であるが、SP をも応答の原因と考える近接場光学系、DP 系には適していない。

- Heisenberg 演算子で表された単一感受率から物質に依存しない汎用の物理を抽出できる：系の非相対論性を起源として、線型・非線型感受率の非共鳴項が現れること、線型・非線型応答には共鳴項と非共鳴項の競合があることなど。

- 感受率演算子の一般的考察から、間接遷移半導体系も超電導体系も、線型応答の共鳴項が抑制され、London 方程式で記述される「電場・磁場で記述できない系」であると理解できる。但し、Meissner 効果が現れるためには電子数が保存しない状態を考える必要がある。

言い換えれば、系の非相対論性から、近接・内在電磁場を原因とした電磁応答の近接・内在場を結果として観測するなら、この過程を電場・磁場、分極・磁化、誘電率・透磁率で記述できない。超電導体系の London 構成方程式と同じ質の応答と考えられる。

- 川添・大津らによる一連の非共鳴 DP 系の実験は、London 方程式が支配する新しい光学のレジームのものと考えられ、そこでは応答の原因としての電場・磁場の概念が破綻する。

- DP 系の MO 効果は場の演算子の非可換性から現れる非線型現象と見ることができ、実験から μm オーダーのコヒーレントな電子系の存在が示唆される。

- PB は光学フォノンのキャビティの育成（コヒーレント長の育成）と考えられ光学フォノンに伴う内在電磁場（DP の一種）を原因としてキャリアへの引力ポテンシャルが働き、非共鳴条件下での高効率の発光や巨大な磁気光学効果が発現すると推察される。

- （展望）MO 効果以外の表 II,III の現象を本論の非線型応答理論に基づき説明する。これらの実験系との対応、さらに、超電導体系との対応をとりながら理論での記述範囲を広げる。

- （展望）PB の記述には光学フォノンによる内在電磁場（DP）を応答の原因とともにキャリアへの引力ポテンシャルへの寄与として同時に考慮する定式化を行う。

- （展望）無限自由度は Lagrangian 密度の時空間積分から作用積分を構成することで考慮しており、それゆえコヒーレント長の議論ができる。このことは超電導、巨大 MO 効果、高効率の発光の記述に必須である。今後、DP 系を無限自由度を考慮して小嶋の 4 項図式 [小嶋泉 2013, 小嶋泉 and 岡村和弥 2013] への実装をしたい。

- （展望）DP を自己無撞着の電磁場として求める。

- （展望）化学反応・触媒反応への適用も視野にいれたい。

謝辞

この研究に関して実験の観点から議論して下さった大津元一博士（ドレスト光子研究起点）、川添忠博士（東京電機大学）に感謝いたします。数理物理的な観点から議論して下さった小嶋泉博士（ドレスト光子研究起点）、西郷甲矢人博士（長浜バイオ大学）、岡村和弥博士（名古屋大学）、佐久間弘文博士（ドレスト光子研究起点）、安藤 浩志博士（千葉大学）に感謝いたします。この研究の一部は（一社）ドレスト光子研究起点、（公財）光科学技術研究振興財団の助成を受けています。

2年にわたるIMI研究所のサポートに感謝いたします。また、研究会において超電導体の基本事項についてご教示くださった成清修先生（九州大学）に感謝申し上げます。

参考文献

- [Aharanov and Bohm 1959] Y. Aharanov and D. Bohm, Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory, *Phys. Rev.*, **115**:485, 1959.
- [Banno and Ohtsu 2018] I. Banno and M. Ohtsu, Logical fallacy of using the electric field in non-resonant near-field optics, 2018, <https://arxiv.org/abs/1807.10991v1>, (also in Off-shell archive, <http://offshell.rodrep.org>, DOI: 10.14939/1808O.001.v1).
- [Banno 2018a] I. Banno, Response theory supporting dressed photons, in *Progress in Nanophotonics*, edited by T. Yatsui, volume 5, chapter 6, Springer International Publishing, 2018.
- [Banno 2018b] I. Banno, Theory of single susceptibility for near-field optics equally associated with scalar and vector potentials, 2018, <https://arxiv.org/abs/1807.10992v3>, (also in Off-shell archive, <http://offshell.rodrep.org>, DOI: 10.14939/1809O.002.v1).
- [Cho 2008] K. Cho, A single susceptibility scheme of macroscopic maxwell equations: beyond the 'E, D, B, H' approach, *J. Phys. Condens. Matter*, **20**:175202, 2008.
- [Cho 2010] K. Cho, *Reconstruction of Macroscopic Maxwell Equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [Kawazoe et al. 2001] T. Kawazoe, Y. Yamamoto, and M. Ohtsu, Fabrication of a nanometric Zn dot by nonresonant near-field optical chemical-vapor deposition, *Appl. Phys. Lett.*, **79**:1184, 2001.
- [Kawazoe et al. 2005a] T. Kawazoe, K. Kobayashi, and M. Ohtsu, Optical nanofountain: A biomimetic device that concentrates optical energy in a nanometric region, *Appl. Phys. Lett.*,

86:103102, 2005.

- [Kawazoe et al. 2005b] T. Kawazoe, K. Kobayashi, S. Takubo, and M. Ohtsu, Nonadiabatic photodissociation process using an optical near field, *J. Chem. Phys.*, **122**:024715, 2005.
- [Kawazoe et al. 2009] T. Kawazoe, H. Fujiwara, K. Kobayashi, and M. Ohtsu, Visible light emission from dye molecular grains via infrared excitation based on the nonadiabatic transition induced by the optical near field, *IEEE J. of Selected Topics in Quantum Electronics*, **15**:1380, 2009.
- [Kawazoe et al. 2011a] T. Kawazoe, M. A. Mueed, and M. Ohtsu, Highly efficient and broadband Si homojunction structured near-infrared light emitting diodes based on the phonon-assisted optical near-field process, *Appl. Phys. B*, **104**:747, 2011.
- [Kawazoe et al. 2011b] T. Kawazoe, M. Ohtsu, S. Aso, Y. Sawado, Y. Hosoda, K. Yoshizawa, K. Akahane, N. Yamamoto, and M. Naruse, Two-dimensional array of room-temperature nanophotonic logic gates using InAs quantum dots in mesa structures, *Appl. Phys. B*, **103**:537, 2011.
- [Kawazoe et al. 2012] T. Kawazoe, M. Ohtsu, K. Akahane, and N. Yamamoto, Si homojunction structured near-infrared laser based on a phonon-assisted process, *Appl. Phys. B*, **107**:659, 2012.
- [Kawazoe et al. 2015] T. Kawazoe, K. Nishioka, and M. Ohtsu, Polarization control of an infrared silicon light-emitting diode by dressed photons and analyses of the spatial distribution of doped boron atoms, *Appl. Phys. A*, **121**:1409, 2015, DOI 10.1007/s00339-015-9288-8.
- [Kobayashi et al. 2005] K. Kobayashi, T. Kawazoe, and M. Ohtsu, Importance of multiple-phonon interactions in molecular dissociation and nanofabrication using optical near fields, *IEEE Trans. Nanotech.*, **4**:024715, 2005.
- [London 1950] F. London, *Superfluids vol.1, Macroscopic Theory of Superconductivity*, Dover Publications, Inc., New York, 1950.
- [Ohtsu 2014] M. Ohtsu, *Dressed Photons: Concepts of Light-Matter Fusion Technology*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2014.
- [Ohtsu 2016] M. Ohtsu, *Silicon Light-Emitting Diodes and Lasers*, Springer International Publishing, Switzerland, 2016.
- [Ohtsu 2018] M. Ohtsu, Gigantic ferromagnetic magneto-optical effect in a SiC light-emitting diode fabricated by dressed-photon-phonon-assisted annealing, 2018, in Off-shell archive

- (<http://offshell.rodrep.org>), DOI: 10.14939/1809R.001.v1.
- [Tanaka et al. 2012] H. Tanaka, T. Kawazoe, and M. Ohtsu, Increasing Si photodetector photosensitivity in near-infrared region and manifestation of optical amplification by dressed photons, *Appl. Phys. B*, **108**:51, 2012, DOI 10.1007/s00340-012-5077-7.
- [Tanjeem et al. 2013] N. Tanjeem, T. Kawazoe, and T. Yatsui, CO₂ phonon mode renormalization using phonon-assisted energy up-conversion, *Scientific Reports*, **3**:3341, 2013.
- [Tate et al. 2015a] N. Tate, T. Kawazoe, S. Nakashima, W. Nomura, and M. Ohtsu, Speckle reduction by using transmissive zno device based on dressed-photon-assisted optical modulation, in *Abstracts of the 22nd International Display Workshops*, Otsu, Japan, Dec. 9-11 2015, PRJ3-1.
- [Tate et al. 2015b] N. Tate, T. Kawazoe, W. Nomura, and M. Ohtsu, Current-induced giant polarization rotation using a zno single crystal doped with nitrogen ions, *Scientific Reports*, **5**:12762, 2015.
- [Wada et al. 2014] N. Wada, M. A. Tran, T. Kawazoe, and M. Ohtsu, Measurement of multimode coherent phonons in nanometric spaces in a homojunction-structured silicon light emitting diode, *Appl. Phys. A*, **115**:113, 2014, DOI 10.1007/s00339-013-7906-x.
- [Yamaguchi et al. 2014] M. Yamaguchi, T. Kawazoe, and M. Ohtsu, Evaluating the coupling strength of electron-hole pairs and phonons in a 0.9 μ m-wavelength silicon light emitting diode using dressed-photon-phonons, *Appl. Phys. A*, **115**:119, 2014, DOI 10.1007/s00339-013-7904-z.
- [Yatsui et al. 2008] T. Yatsui, K. Hirata, W. Nomura, Y. Tabata, and M. Ohtsu, Realization of an ultra-flat silica surface with angstrom-scale average roughness using nonadiabatic optical near-field etching, *Appl. Phys. B*, **93**:55, 2008.
- [Yatsui et al. 2016] T. Yatsui, T. Tsuboi, M. Yamaguchi, K. Nobusada, S. Tojo, F. Stehlin, O. Soppera, and D. Bloch, Optically controlled magnetic-field etching on the nano-scale, *Light: Science and Applications*, **5**:e16054, 2016.
- [Yonemitsu et al. 2007] H. Yonemitsu, T. Kawazoe, K. Kobayashi, and M. Ohtsu, Nonadiabatic photochemical reaction and application to photolithography, *J. Photolumin.*, **122**:230, 2007.
- [小嶋泉 and 岡村和弥 2013] 小嶋泉 and 岡村和弥, 無限量子系の物理と数理, 臨時別冊数理学 SGCLライブラリ 98, サイエンス社, 東京, 2013.
- [小嶋泉 2013] 小嶋泉, 量子場とマイクロ・マクロ双対性, 丸善出版, 東京, 2013.
- [大津元一 2013] 大津元一, ドレスト光子 光・物質融合科学の原理, 朝倉書店, 東京, 2013.

物質場の中での光子の縦波と横波
オフシェルとオンシェルの一考察
＝ドレスト光子のメカニズムへの一探求として＝

矢吹哲夫

北星学園大学 全学共通教育部門（電子メール：t-yabuki@hokusei.ac.jp）

A theoretical study on the longitudinal-transverse character and
off shell-on shell conditions of photon in matter fields
＝ as a search for the dressed photon generating mechanism＝

Tetsuo Yabuki

Hokusei Gakuen University

2-3-1 Oyachi-nishi, Atsubetsu-ku Sapporo 004-8631, Japan

概要

ドレスト光子の新奇な特性が既に実用に供されていることを踏まえて、その発生メカニズムの中に新たな物理学的理論が隠れている可能性追求の端緒的自己考察を行なう。キイ概念と考えられる、横波 vs 縦波、実光子 vs 仮想光子、オンシェル vs オフシェル各々の間の対応関係の考察、整理を行ない、次にドレスト光子がナノスケールという極めて小さな空間の中で、伝播することのない仮想光子として束縛されている特性に対して、光子の confinement（閉じ込め）という観点から考察する。今回は、特にゲージ対称性の自発的破れによる光子（ゲージ粒子）の質量獲得がドレスト光子の外部への漏出抑止機構になっている可能性の考察に向けた論点整理を行なう。

Abstract

In this report, the basic and hypothetical consideration are developed in order to find a clue for the mechanism of the generation of Dressed Photon as a very novel and very practical photon. Firstly, the relation between the longitudinal-transverse character and virtual-real character, and off shell-on shell conditions of photon are analyzed as possible as clearly, secondly the non-propagating features of Dressed Photon as electromagnetic fields localized in nanometric space are considered especially from the viewpoint of mass acquisition of photons. The mechanism of intrusion shielding of electromagnetic fields occurred by the spontaneous breaking of gauge symmetry will possibly give also leakage shielding peculiar to Dressed Photon.

1. はじめに

大津元一氏によって発見され命名されたドレスト光子は従来の光学（量子力学QEDを含む）で説明できない種々の新奇な特性をもち、その特性を生かす形で既に様々な実用的用途に供されている。その特性について著者は今回以下のキイ概念についての端緒的考察を行なった。

具体的にはドレスト光子の新奇な特性の本質が、オフシェル条件を満たす空間を伝播しない仮想光子であることを踏まえて以下（1）の考察を行ない、次にドレスト光子が極めてマイクロな空間（ナノスケール空間）に閉じ込められていることを踏まえて（2）の考察を行なう。

（1）横波 vs 縦波、実光子 vs 仮想光子、オンシェル vs オフシェル各々の間の対応関係の考察：

周知のように光子は質量0でスピン1のボーズ粒子であり、電磁力を媒介するゲージボゾンである。スピン1のボース粒子が本来持つはずのスピン成分の3つのz成分（ $s_z = 1, 0, -1$ ）について、質量0のボーズ粒子は2つの横波成分に対応する $s_z = \pm 1$ をもつのみで、1つの縦波成分に対応する $s_z = 0$ をもたない。この理由については数学的にきちんと説明されているが、ここでは質量0のゲージ場（光子）と物質場（電子）が相互作用する系（量子電磁気学で記述される系）が備えるゲージ対称性に基づくゲージ固定の自由度の勘定を行なうことで、このことの間接的理解を行なった。

次に、ゲージ不変性条件でもある質量0の条件によって“封印された”縦波成分の物理量としての行方を考察し、その考察の中でこの縦波成分がスカラー成分と合体してオフシェル条件である質量0の粒子のエネルギー保存則 $E(\vec{k})^2 = \vec{k}^2$ （ $c = 1, \hbar = 1$ ）を破る領域からのエネルギー寄与を与える光子となること、そしてその媒介する力が同時刻相互作用であるクーロンポテンシャルであり、伝播しない光子＝“仮想光子”となっていることを、具体的なカレント・カレント相互作用（電荷と電流を合わせた4元電流の間を光子が飛ぶことで生じる力）によって生じる散乱の量子力学的振幅をその最低次のファインマンダイアグラムの計算をチェックすることで考察する。この考察の中で、ファインマン自身が紹介している考察（文献）に著者独自の考察を加えて、横波成分は光速で空間を伝播する遅延効果を備えているで“実粒子”であることを示す。この考察を通して、縦波光子＝オフシェル光子（エネルギー保存を破る）＝仮想光子（伝播しない）という対応関係を見出すことが出来る。更に発表後、同じ結果が散乱という具体的な物理現象及びローレンツゲージという特定なゲージ固定に基づいた伝播

関数という道具を用いることなく、マックスウェルの方程式のもつ数理的構造の直接解析から得られたので、それも補足として紹介する。

(II) 光子の局在 (localization)、閉じ込め (confinement) の考察：

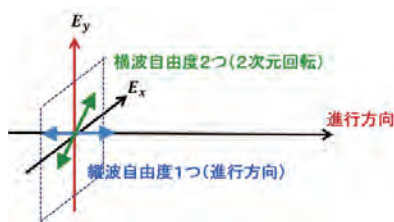
＝ゲージ光子の質量獲得という視点で＝

光子の物質中への侵入抑制効果を遮蔽と考えれば、反対に光子の物質中の局在 (localization)、閉じ込め (confinement) の現象は光子の物質外への漏出抑制効果と考えることができるのでないか？という観点から、まず古典場の取扱いで説明されている現象の中で、静電遮蔽波 (特にその高温近似であるデバイ近似) を例にとってその標準的な考察をトレースし、次に量子場的な遮蔽としてマイスナー効果を顕現させる超伝導について、ゲージ対称性の自発的破れの観点からその基礎的考察を行なう。その理解の為に最小限必要なゲージ対称性の自発的破れについて、著者なりの基礎的な考察を行ない、幾つかの疑問点を挙げる。

2. 本論

(I) 横波 vs 縦波、実光子 vs 仮想光子、オンシェル vs オフシェル各々の間の対応関係の考察：

(1) 質量0のスピン1の光子の自由度が 2 つであることの理解の為の一考察



<図1>波動描像：横波2つと縦波1つ <図2>粒子のスピン描像： $s_z = \pm 1$ と $s_z = 0$

図1で表わされる波動描像として電磁波の3つの自由度 (進行方向と垂直に振動する2つの横波成分と進行方向に振動する1つの縦波成分) は、図2で表わされた量子的自由度であるスピン1の光子のもつ3つのスピンのz成分 ($s_z = \pm 1$ と $s_z = 0$) に対応している。どちらの見方でも光子のベクトル的自由度 (方向自由度) である。量子電磁気学では、2つの空間ベクトル場である電場 \vec{E} 、磁場 \vec{B} ではなく1つの時空ベクトル場 A^μ に基づいて量子解析を行なう。この時、時空ベクトルポテンシャル場 $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ には4つの時空ベクトル成分 (自由度) があり、第0成分 A_0 はスカラー成分と呼ばれ、残り3つの成分は2つの横波成分と1つの縦波成分に対応している。

以下周知のことではあるが、ベクトルポテンシャル場 A_μ から2つの空間ベクトル場の電場 \vec{E} 、磁場 \vec{B} が与えられる式を以下記しておく。

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \dots (1)$$

この表式を用いると、電磁気学の基本方程式であるマクスウェルの方程式(2)は以下の(3)式で与えられる。

マクスウェルの方程式 <ゲージ対称性の帰結>

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= j^0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} j^0 &= 0 & \partial_\mu j^\mu &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & & \text{連続の方程式} & & \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} & & \text{アンペールの法則} & & \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} & & \text{電磁誘導の法則} & & \end{aligned} \dots (2)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \dots (3)$$

ここで左辺は以下のように変形され、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) \dots (4)$$

最終的にマクスウェルの方程式を4次元ゲージポテンシャル場 A_μ で表わすと以下の形の方程式となる。

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \dots (5)$$

ここで、記号 \square はダランベルシアンと呼ばれる時空4次元での演算子で以下の式で定義される。

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \dots (6)$$

ここで、(5)式の両辺の4元発散 ∂_ν をとると、

$$\partial_\nu j^\nu = 0 \quad \dots (7)$$

となり、カレント（4元電流）保存の式（連続の方程式）が導出される。

方程式（5）から正直に求めると、以下の（8）式の形の伝播関数（量子電磁気学で摂動論の計算材料となるもので、2つの物質粒子（ここでは電子）のつくる4元電流 j_μ の間の相互作用を媒介する光子 A_μ の動態を表す式）が得られる。

$$D(k)^{\mu\nu} \propto (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)^{-1} \quad \dots (8)$$

しかし、実はこの（8）式は存在し得ない。何故ならば、

$$\det(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) = 0 \quad \dots (9)$$

が恒等的に成り立つからである。

（9）式は直接計算でも確認できるが、ここではデターミネント \det のローレンツ変換普遍性を用いて以下の形で検証する。 $\det(g^\mu{}_\nu k^2 - k^\mu k_\nu)$ がローレンツスカラーであること、与えられたローレンツスカラーは k^2 しかないことより、

$$\det(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) = \alpha \cdot (k^2)^4 \quad (\alpha \text{は定数}) \quad \dots (10)$$

とおける。

ここで、4元ベクトル $k_\mu = (k_0, 0, 0, 0)$ ととると、

$$\det(g^\mu{}_\nu k^2 - k^\mu k_\nu) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_0^2 \end{pmatrix} = 0 \quad \dots (11)$$

$$\therefore \alpha = 0 \quad \dots (12)$$

よって（9）式が確かめられた。

この為、実際に計算で用いられる光子の伝播関数は、ローレンツゲージと呼ばれる $\partial_\mu A^\mu = 0$ のゲージ固定（ゲージ自由度の固定）を用いて、

$$D(k)^{\mu\nu} \propto (k^2 g^{\mu\nu})^{-1} = \frac{g^{\mu\nu}}{k^2} \quad \dots (13)$$

の形となる。

このとき、マックスウェルの方程式 (5) は、

$$\square A^\nu = j^\nu \quad \dots (14)$$

となるが、両辺の4元発散 ∂_ν をとると、 $\square \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu j^\nu$ となり、ローレンツゲージのゲージ固定条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ の下でのマックスウェルの方程式 (14) においてもカレント (4元電流) 保存の式 (連続の方程式) $\partial_\mu j^\mu = 0$ が成立していることが分かる。

次に、ローレンツゲージ固定条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ を満たす中で、まだ以下のゲージ変換の“自由度”が残っていることが分かる。

$$A_\mu \rightarrow A_\mu' = A_\mu - \partial_\mu \chi \quad \dots (15)$$

(ただし、 χ は $\partial^\mu \partial_\mu \chi = \square \chi = 0$ を満たす任意関数である。)

以上より、質量0のゲージ粒子である光子 A_μ はローレンツゲージ固定条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ を課す自由度が一つ、更に (15) 式でゲージ変換する自由度が一つ合わせて2つの自由度を持っていることが分かった。よって、残った光子 A_μ がもつ自由度は、時空ベクトルとしてベクトル自由度4から2を引いた2つとなる。

ここで、質量0のゲージ粒子である光子と対比考察するために質量mをもった場合の光子の場合で同様な考察を以下行なってみる。質量をもつ光子の方程式 (マックスウェルの方程式) は以下のように書かれる。

$$(\square + m^2)A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \quad \dots (16)$$

このときの光子の伝播関数を正直に計算すると以下ようになる。

$$D(k)^{\mu\nu} \propto (k^2 - m^2)g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)^{-1} \quad \dots (17)$$

この場合のデターミントを計算すると、

$$\det\{k^2 - m^2)g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} = m^2(k^2 - m^2)^3 \quad \dots (18)$$

となる。

(※直接計算でも確認できるが、 $\det\{(k^2 - m^2)g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\}$ はローレンツスカラーであることより、 $k^\mu = (k^0, 0, 0, 0)$ を代入して計算すると $\det\{(k^2 - m^2)g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} = m^2((k^0)^2 - m^2)^3$ となることから確認できる。)

(18) より、質量 $m \neq 0$ 、 $k^2 - m^2 \neq 0$ である限りこのデターミントは0にはならず (17) 式で与えられる伝播関数は存在し、簡単な計算で最終的に以下の形で与えられることが分かる。

$$D(k)^{\mu\nu} \propto \frac{(-g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu / m^2)}{(k^2 - m^2)} \quad \dots (19)$$

(16) 式の両辺の4元発散 ∂_ν をとって、

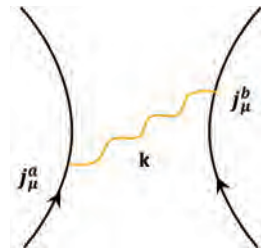
$$(\square + m^2) \partial_\nu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \partial_\nu j^\nu \quad \dots (20)$$

$$\therefore m^2 \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu j^\nu \quad \dots (21)$$

となり、質量 $m \neq 0$ のときゲージ不変性が破れていることからカレント (4元電流) 保存の式 (連続の方程式) $\partial_\nu j^\nu = 0$ は成り立たない。但し、真空中では (21) の右辺=0から、質量 $m \neq 0$ のとき $\partial_\nu A^\nu = 0$ が自動的に成立していることが分かる。

(2) 横波 vs 縦波、実光子 vs 仮想光子、オンシェル vs オフシェル各々の間の対応関係

図3は、2つの4次元電流 j_μ^a 、 j_μ^b (電荷、電流ベクトル) 間の電磁力を媒介する光子を表した図 (ファインマンダイアグラム) である。今光子の運動量ベクトルを、



$$\vec{k} = (k_0, \mathbf{0}, Q) \quad \dots (22)$$

とする。この座標系の設定は、光子が伝播する場合

<図3>

これは、光子が伝播する場合その進行方向をz方向に選んでいることを意味している。また k_0 は運動量 \vec{k} をもつ光子のエネルギー $E(\vec{k})$ を表している。

このとき、<図3>で表わされる遷移振幅 M (その絶対値2乗が遷移確率を与える) は以下の式で与えられる。

$$M \propto j_\mu^a D(k)^{\mu\nu} j_\nu^b \quad \dots (23)$$

ここで、光子の伝播関数とし (13) 式で与えられた $D(k)^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{k^2}$ を用いると、遷移振幅は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 M &\propto j_\mu^a \frac{g^{\mu\nu}}{k^2} j_\nu^b \\
 &= \frac{j_0^a j_0^b}{k_0^2 - k^2} - \frac{j_1^a j_1^b}{k_0^2 - k^2} - \frac{j_2^a j_2^b}{k_0^2 - k^2} - \frac{j_3^a j_3^b}{k_0^2 - k^2} \\
 &= \frac{j_0^a j_0^b}{k_0^2 - Q^2} - \frac{j_1^a j_1^b}{k_0^2 - Q^2} - \frac{j_2^a j_2^b}{k_0^2 - Q^2} - \frac{j_3^a j_3^b}{k_0^2 - Q^2} \quad \dots (24)
 \end{aligned}$$

スカラー成分
横波成分
縦波成分

ここで電荷保存則 (連続の方程式) $k^\mu j_\mu = 0$ より、 $k_0 j_0 - Q j_3 = 0$ が成り立つので、(24) 式は以下のように整理される。

$$M(k_0, Q) = \frac{j_0^a j_0^b}{k_0^2 - Q^2} - \frac{j_1^a j_1^b}{k_0^2 - Q^2} - \frac{j_2^a j_2^b}{k_0^2 - Q^2} - \frac{k_0^2 j_0^a j_0^b}{Q^2 k_0^2 - Q^2} \quad \dots (25)$$

スカラー成分
横波成分
on-shell
縦波成分

$-\frac{j_0^a j_0^b}{Q^2}$
off-shell

この (25) 式に基づいて、まず電荷保存式によって合体された遷移振幅のスカラー成分と縦波成分の項 $-\frac{j_0^a j_0^b}{Q^2}$ についての運動量 Q 、エネルギー $\omega_k = k_0$ によるフーリエ変換を行なって時空 (t, \mathbf{r}) 表示を求めると、以下の形に整理される。ここで、 t は2つの時空事象の時間であり、 \mathbf{r} はその空間距離である。

$$\begin{aligned}
 &\int d^3 Q dk_0 e^{-i\vec{Q}\mathbf{r}} e^{ik_0 t} M_{\text{スカラー+縦波}}(Q, k_0) \\
 &= \int d^3 Q dk_0 \frac{1}{Q^2} e^{-i\vec{Q}\mathbf{r}} e^{ik_0 t} = \int d^3 Q \frac{1}{Q^2} e^{-i\vec{Q}\mathbf{r}} \int dk_0 e^{ik_0 t} \propto \frac{1}{r} \delta(t) \quad \dots (26)
 \end{aligned}$$

同時刻クーロンポテンシャル

ここで、 $\delta(t)$ は2つの事象間の時間 t が0であること、即ちクーロン

相互作用が同時刻相互作用であることを表している。また、運動量積分される伝播関数 $\frac{1}{Q^2}$ が $\frac{1}{k_0^2 - Q^2}$ というオンシェル（エネルギー保存を満たす $k_0^2 - Q^2 = 0$

で分母が0）になっていないことから、運動量積分にはエネルギー保存を満たす部分以外の領域からも大きな寄与があることから、光子の縦波成分はスカラー成分と合体してオフシェル光子になっていることが分かる。

最終的に、縦波光子は（スカラー光子と合体して）エネルギー保存を満たさず、同時刻で（瞬時に）相互作用を媒介し、光子が光速cで飛翔しているという因果律を満たしていないという意味で「仮想光子」と呼んでよいと考えられる。

一方、遷移振幅を与える(25)式の第2項、第3項の横波成分について同様に4次元時空間 (t, r) へのフーリエ変換を行なうと以下の結果を得る。

$$\begin{aligned} & \int d^3Q dk_0 e^{-i\vec{Q}\vec{r}} e^{ik_0 t} M_{\text{横波}}(Q, k_0) \\ &= \int d^3Q dk_0 \frac{1}{Q^2 - k_0^2} e^{-i\vec{Q}\vec{r}} e^{i\omega t} = \int dk_0 e^{ik_0 t} \int d^3Q \frac{1}{Q^2 + (-k_0^2)} e^{-i\vec{Q}\vec{r}} \\ &= \int dk_0 e^{ik_0 t} \frac{1}{r} e^{-ik_0 r} \propto \frac{1}{r} \delta(t - r) \quad \dots (27) \end{aligned}$$

遅延相互作用

この中の $\delta(t-r)$ は、光速cを復活して表すと、 $\delta(ct-r)$ となり、空間的にrの距離を時間tをかけて光子が飛翔している遅延効果を表わしている。

また、運動量積分される伝播関数 $\frac{1}{k_0^2 - Q^2}$ がオンシェル（エネルギー保存を満たす $k_0^2 - Q^2 = 0$ で分母が0）になっていることから、運動量積分には実質的にエネルギー保存を満たす領域から寄与し、光子の横波成分はオンシェル光子であることが分かる。最終的に、横波光子はエネルギー保存を満たし、光速cで飛翔する因果律を満たしているという意味で「実光子」と呼んでよいと考えられる。

以上の考察をまとめると、

- ①エネルギー保存を満たすか否か？
- ②因果律を満たすか否か？（伝播するか否か？）

の観点から、真空中では以下のカテゴリー分類が可能と考えられる。

縦波光子（スカラー光子と合体して）⇔ オフシェル光子 ⇔ 仮想光子
 横波光子 ⇔ オンシェル光子 ⇔ 実光子

同時にこの考察から、縦波光子はスピン1のボーズ粒子である光子が質量0であることにより、ゲージ対称性を満たし、本来3つあるスピンのz成分のうち縦波成分に相当するz成分=0が封印される形で仮想光子となったとの理解を与える。

発表後、以上の考察結果と同じ結果が散乱という具体的な物理現象及びローレンツゲージという特定なゲージ固定に基づいた伝播関数という道具を用いることなく、マックスウェルの方程式のもつ数理的構造の直接解析から得られたので、それを以下補足として紹介する。

★真空中のマックスウェルの方程式の数理的構造に基づく考察（発表後）

原点に4元カレントのある真空中のマックスウェルの方程式は、運動量表示で以下の式で与えられる。

$$(g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu)A_\nu = j^\mu \quad \dots(28)$$

で与えられる。4元カレントは原点だけに δ 関数的に存在しているとすれば、その運動量表示(フーリエ変換表示) j_μ は k_μ によらない4元定ベクトルとなる。

ここで光子 A_ν への1次変換作用行列(4行4列)を、

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu \quad \dots (29)$$

と書くと、4元電流(電荷、電流)が原点に存在する時のマックスウェルの方程式(28)は、以下のように書かれる。

$$T^{\mu\nu}A_\nu = j^\mu \quad \dots (30)$$

ここで A_ν を4次元空間上の1次変換 $T^{\mu\nu}$ の原像、 j^μ を像とすると、質量0の光子のもつゲージ対称性から自動的に成立する電荷保存の方程式(連続の式) $k_\mu j^\mu = 0$ は、1次変換 $T^{\mu\nu}$ の像空間に縮退があることを意味していて、このことから、 $\det(T^{\mu\nu}) = 0$ であることが分かる。その具体的な計算による検証が(9)式である。ここで、光子場 A_ν の空間成分 $A_i = \vec{A}$ が(i)横波解 \vec{A}_\perp の場合と、(ii)縦波解 \vec{A}_\parallel の場合各々について以下著者の試論的な考察を行なう。

ここで、時空4次元の運動量空間でのマックスウェルの方程式の行列 $T^{\mu\nu}$ の成分表示は、以下の通りである。ただし、 $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2$ である。

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} k^2 - k_0^2 & k_0 k_1 & k_0 k_2 & k_0 k_3 \\ k_1 k_0 & -k^2 - k_1^2 & -k_1 k_2 & -k_1 k_3 \\ k_2 k_0 & -k_2 k_1 & -k^2 - k_2^2 & -k_2 k_3 \\ k_3 k_0 & -k_3 k_1 & -k_3 k_2 & -k^2 - k_3^2 \end{pmatrix} \quad \dots (31)$$

(i) 横波解 \vec{A}_\perp の場合

$$A_\nu = \begin{pmatrix} A_0 \\ \vec{A}_\perp \end{pmatrix} \quad \dots (32)$$

とおくと、以下の式を得る。

$$T^{\mu\nu} \begin{pmatrix} A_0 \\ \vec{A}_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{k}^2 A_0 + k_0(\vec{k} \cdot \vec{A}_\perp) \\ k_0 A_0 \vec{k} - k^2 \vec{A}_\perp - \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{A}_\perp) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{k}^2 A_0 \\ k_0 A_0 \vec{k} - k^2 \vec{A}_\perp \end{pmatrix} \quad \dots (33)$$

マックスウェルの方程式(30)に当てはめると、以下の式を得る。

$$\begin{pmatrix} -\vec{k}^2 A_0 \\ k_0 A_0 \vec{k} - k^2 \vec{A}_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_0 \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad \dots (34)$$

この式の第0成分、空間成分の等から、各々以下の式を得る。

●第0成分から：

$$A_0 = \frac{-j_0}{k^2} \quad \dots (35)$$

これをフーリエ変換して時空表示をすると、係数を除いて以下の式となる。

$$A_0 = \frac{j_0}{r} \delta(t) \quad (36)$$

これは同時刻相互作用のクーロンポテンシャルを表わし伝播しない光子場と考えられる。またこの(36)を与えた(35)の分母が k^2 ではなく \vec{k}^2 であることから、オフシェル光子と見なされる。

●空間成分から

$$k_0 A_0 \vec{k} - k^2 \vec{A}_\perp = \vec{j} \quad \dots (37)$$

ここで運動量ベクトル \vec{k} に垂直な方向ベクトル（単位ベクトル）を \vec{e}_\perp と書き
 (37) の両辺との内積をとると、 $\vec{e}_\perp \cdot \vec{j} = k_0 A_0 \vec{e}_\perp \cdot \vec{k} - k^2 \vec{e}_\perp \cdot \vec{A}_\perp = -k^2 \vec{e}_\perp \cdot \vec{A}_\perp$
 となり、以下の式を得る。

$$\vec{e}_\perp \cdot \vec{A}_\perp = \frac{-\vec{e}_\perp \cdot \vec{j}}{k^2} \quad \dots (38)$$

これをフーリエ変換して時空表示をすると、係数を除いて以下の式となる。

$$\vec{e}_\perp \cdot \vec{A}_\perp = \frac{-\vec{e}_\perp \cdot \vec{j}_0}{r} \delta(t - r) \quad \dots (39)$$

これは遅延効果をもつ光子であり、伝播する光子と見なせる。またこの(39)を与えた(38)の分母が k^2 であることから、オンシェル光子と見なされる。

(ii) 縦波解 \vec{A}_\parallel の場合

$$A_\nu = \begin{pmatrix} A_0 \\ \vec{A}_\parallel \end{pmatrix} \quad \dots (40)$$

とおくと、以下の式を得る。

$$T^{\mu\nu} \begin{pmatrix} A_0 \\ \vec{A}_\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{k}^2 A_0 + k_0 (\vec{k} \cdot \vec{A}_\parallel) \\ k_0 A_0 \vec{k} - k^2 \vec{A}_\parallel - \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{A}_\parallel) \end{pmatrix} \quad \dots (41)$$

マックスウェルの方程式(30)に当てはめると、以下の式を得る。

$$\begin{pmatrix} -\vec{k}^2 A_0 + k_0 (\vec{k} \cdot \vec{A}_\parallel) \\ k_0 A_0 \vec{k} - k^2 \vec{A}_\parallel - \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{A}_\parallel) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_0 \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad \dots (42)$$

ここで、縦波を $\vec{A}_\parallel = \alpha \vec{k}$ と書くと、

$$\alpha = \frac{(\vec{k} \cdot \vec{A}_{\parallel})}{\vec{k}^2} \quad \dots (43)$$

(42)、(43)を用いて、第0成分、空間成分各々で等式整理して、以下の式を得る。

●第0成分から：

$$-\vec{k}^2 A_0 + k_0 \alpha \vec{k}^2 = j_0 \quad \dots (44)$$

を得る。更に(43)式を使って整理して以下の式を得る。

$$A_0 - \frac{k_0(\vec{k} \cdot \vec{A}_{\parallel})}{\vec{k}^2} = -\frac{j_0}{\vec{k}^2} \quad \dots (45)$$

●空間成分から：同様にして、次式を得る。

$$\left(A_0 - \frac{k_0(\vec{k} \cdot \vec{A}_{\parallel})}{\vec{k}^2} \right) \vec{k} = \frac{\vec{j}}{k_0} \quad \dots (46)$$

両辺に \vec{k} で内積をとって、

$$A_0 - \frac{k_0(\vec{k} \cdot \vec{A}_{\parallel})}{\vec{k}^2} = \frac{(\vec{k} \cdot \vec{j})}{k_0 \vec{k}^2} \quad \dots (47)$$

ここで、(45)、(47)からゲージ対称性から保証される4元カレントの保存式 $k_{\mu} j^{\mu} = 0$ が成立していることが確認され、(45)、(47)が同値条件であることが分かる。

(45)の形からこれをフーリエ変換して時空表示をすると、係数を除いて以下の式となる。

$$A_0 - \frac{k_0(\vec{k} \cdot \vec{A}_{\parallel})}{\vec{k}^2} = \frac{j_0}{r} \delta(t) \quad \dots (48)$$

この式から、縦波光子 \vec{A}_{\parallel} はスカラー光子 A_0 と(45)、(47)の左辺のように1次結合で結びついて、同時刻相互作用のクーロンポテンシャルを表わす伝播しない光子場となっていることが理解される。またこの(48)を与えた(45)の分母が k^2 ではなく \vec{k}^2 であることから、オフシェル光子と見なされる。

以上の考察から、マックスウェルの方程式の運動量空間での行列表示の数理構造的からも摂動論による遷移振幅の考察から得られた真空中での結果と同じ以下の結果が得られることが分かった。

縦波光子（スカラー光子と合体して）⇔ オフシェル光子 ⇔ 仮想光子
 横波光子 ⇔ オンシェル光子 ⇔ 実光子

以上の結果から、発表報告本論での伝播関数を用いた、2つの4元カレント間の光子による散乱振幅の2次のダイアグラムから導出した結果と矛盾しない結果が、散乱という具体的な物理現象及びローレンツゲージという特定なゲージ固定に基づいた伝播関数という道具を用いることなく、マックスウェルの方程式のもつ数理的構造の直接解析から得られることが分かった。

以上は原点に電荷、電流を置いたときに真空中で成り立つマックスウェルの方程式(28)に基づいた考察結果である。

それでは、物質中で(28)の右辺の電流の期待値が0ではなく $\langle j^i \rangle \neq 0$ の場合は上記考察結果はどうなるであろうか。これについては、次節で簡単に考察する凝縮物質系での「ゲージ対称性の自発的破れ」に基づいて現在解析中である。

(II) 光子の局在 (localization)、閉じ込め (confinement) の考察：

＝ゲージ光子の質量獲得という視点で＝

以下のように、まず古典的取扱いで説明されている遮蔽現象である静電遮蔽の特に高温近似（デバイ近似）の考察をトレースして、次に量子場的取扱いで説明されている超伝導現象を特にゲージ対称性の自発的破れの観点で考察を行なう。

(1) 古典場的取扱いとしての静電遮蔽

＝デバイ近似モデル＝（高温近似）

重い正電荷が平均個数密度 n 個で均一に分布する絶対温度 T 物質内に平均個数 n 個の電子が分布しているとし、原点に固定点電荷 Q を置き、そのとき物質中に生じた静電ポテンシャルを $\phi(\vec{r})$ とする。

以下の仮定を置く。

- 1) フェルミ面がエネルギーギャップ内にはなく、フェルミ準位のエネルギー電子が自由電子的に移動可能（但し運度量 $p \rightarrow 0$ で）
- 2) 原点に固定点電荷 Q を置き、その時の電子の粒子数密度分布 $\rho(\vec{r})$ は温度 T についてのボルツマン分布に従う

このとき、電荷が $(-e)$ で静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ の場所にある電子は、ポテンシャルエネルギー $-e\phi(\vec{r})$ をもち、仮定 2) から、以下の個数分布密度をもつ。

$$\rho_e(\vec{r}) = ne^{e\phi(\vec{r})/k_B T} \quad \dots (49)$$

ここで、 $\rho_e(\vec{r})$ は電子の場所 \vec{r} での個数密度、 k_B はボルツマン定数、 T は系の絶対温度である。

ここで、マックスウェルの方程式と与えられた静電ポテンシャルから、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \dots (50)$$

与えられた条件より、全体の電荷密度 $\rho = Q\delta(\vec{r}) - e\rho_e(\vec{r}) + ne$ となるので、これを(50)式に当てはめると以下の式を得る。

$$-\vec{\nabla}^2\phi = Q\delta(\vec{r}) - e\rho_e(\vec{r}) + ne \quad \dots (51)$$

(51)式より、原点を除いた空間では以下の式となる。

$$-\vec{\nabla}^2\phi = -en \left(e^{e\phi(\vec{r})/k_B T} - 1 \right) \quad \dots (52)$$

ここで、 $T \gg 0$ での高温条件で(52)式の右边をテーラー展開するして、 T の最低次の項だけ残すと、

$$-\vec{\nabla}^2\phi = -ne^2 \left(\frac{\phi}{k_B T} \right) \quad \dots (53)$$

となる。

この微分方程式を、 $r \rightarrow \infty$ で $\phi \rightarrow 0$ の境界条件で解くと以下の式を得る。

$$\phi \propto \frac{1}{r} e^{-\left(\frac{ne^2}{k_B T}\right)r} \quad \dots (54)$$

これは湯川型関数であり、静電ポテンシャルの到達距離がおおよそ $\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T}{ne^2}}$ になっていることを示している。この距離 λ_D をデバイ長と呼び、高温近似における静電場の有限の侵入距離と見なされ、この効果は静電場の遮蔽効果と見なされている。

この考察の背景には金属、半導体のようにフェルミエネルギーが電子のエネルギーギャップの中になく、フェルミエネルギーをもつ多くの電子（電子集団）が運動量0、運動エネルギー0で外場である静電場に応答して、熱平衡状態であるボルツマン分布になるということがある。

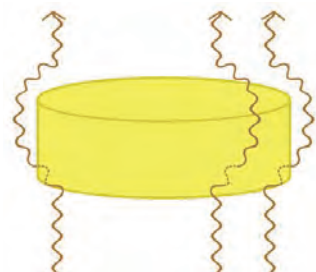
フェルミエネルギーがバンド内にあるとき、フェルミ面上の電子が自由電子的振舞いで集団的に外部電磁場に応答することで、遮蔽現象が生じるとみなすことが出来る。

このフェルミ面上の電子はゼロモード粒子と見なせば、次の量子場的取扱いと重なると考えられないか？と著者は考えている。

(2) 量子場的取扱いとして磁場の侵入遮蔽

=超伝導によるマイスナー効果=

「超伝導」が生じたときの特徴的な現象は、図のように磁場Bの侵入遮蔽である。この現象は、静電遮蔽の(54)式に対応する以下の式で書くことが出来る。



<図 4>

$$\vec{B} \propto \frac{\vec{r}}{r^2} e^{-kr} \quad \dots (55)$$

そしてこの式を与える(53)式に対応する微分方程式は、以下の式で与えられる。

$$-\nabla^2 \vec{B} = -k^2 \vec{B} \quad \dots (56)$$

ここで、 $\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$ ($\because \nabla \cdot \vec{B} = 0$ より) より、次式を得る。

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = -k^2 \vec{B} \quad \dots (57)$$

ここで、 $\nabla \times \vec{B} = \vec{j}$ 、 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ より、

$$\nabla \times \vec{j} = -k^2 \nabla \times \vec{A}$$

$$\therefore \nabla \times (\vec{j} - k^2 \vec{A}) = 0 \quad \dots (58)$$

$$\text{一方、} \nabla \cdot (\vec{j} + k^2 \vec{A}) = \nabla \cdot \vec{j} + k^2 \nabla \cdot \vec{A}$$

$$= \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) + k^2 \nabla \cdot \vec{A}$$

$$= 0 \quad \dots (59)$$

(クーロンゲージ $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ を選んで)

$$(58)、(59)より、\vec{j} + k^2\vec{A} = 0$$

$$\therefore \vec{j} = -k^2\vec{A} \quad \dots(60)$$

(60)はロンドン方程式と呼ばれ、遮蔽カレントを表わしている。

このロンドン方程式から、以下のように束縛状態 (confined state) の光子場 \vec{A} が導出される。

$\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}$ を使って、(60)は以下の式で書くことが出来る。

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = -k^2\vec{A}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -k^2\vec{A}$$

ここで、クーロンゲージ $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ を使って、以下の式を得る。

$$(\vec{\nabla}^2 - k^2)\vec{A} = 0$$

この方程式の解 \vec{A} は、無限遠で0の境界条件で、

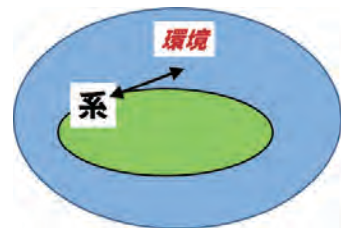
$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r^2} e^{-kr} \quad \dots(61)$$

となり、これは(55)式と同形の湯川型関数であり、遮蔽距離 $r = \frac{1}{k}$ の空間に閉じ込められた光子であることを表わしていて、このことから光子が実質的に $m = k$ の質量を獲得することが、空間的な閉じ込め状態をつくることであることが理解される。

(3) 量子場的に生じるゲージ対称性の自発的破れ

(2)で論じたマイスナー効果は、超伝導状態に特有な現象であり、そのメカニズムはBCS理論の名称を冠された「ゲージ対称性の自発的破れ」で説明されている。そこで、以下簡単なモデル(文献1)を使ってこのゲージ対称性の自発的破れを考察する。

右図のように環境に囲まれた系があり、その表面で0モードの粒子(運動量0でエネルギー0の粒子)が出入りしている状況を以下のハミルトニアンで表す。



<図5>

$$\mathcal{H}_S = -\frac{S}{\sqrt{V}} (\lambda b_0 + \lambda^* b_0^\dagger) \quad \dots(62)$$

ここで、S、Vは各々系の表面積と体積であり、 b_0 、 b_0^\dagger は各々系表面での0モードの粒子の消滅演算子と生成演算子である。このハミルトニアン固有状態は、以下の式で表わされることを研究集会で発表した¹が、発表後あくまでも近似解であることに気付いた為、以下補足説明を加筆しながら述べることにしたい。

$$|\Phi_\theta\rangle = \left(\frac{1}{\Delta N}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{-\frac{\Delta N}{2} < n < \frac{\Delta N}{2}} e^{i\theta n} |\Phi(N^*+n)\rangle \quad \dots (63)$$

ここで、 $\theta = \left(\frac{2\pi}{\Delta N}\right) \ell$ ($\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{\Delta N}{2}$) で与えられている。

スピン0のボゾン粒子(エネルギーギャップ=0)の場合 $\psi(\vec{r})$ は以下の式で表わされる。

$$\psi(\vec{r}) = V^{-\frac{1}{2}} \sum e^{i\vec{k}\vec{r}} b_{\vec{k}} \quad \dots (64)$$

このとき、以下の式が成り立つ。

$$\langle \Phi_\theta | \psi(\vec{r}) | \Phi_\theta \rangle \cong \left(\frac{N^*}{V}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\theta} \quad \dots (65)$$

この式から、量子状態 $|\Phi_\theta\rangle$ は位相表示と呼ばれる。

次にボーズ粒子の場合 $\psi(\vec{r})$ を使ってゲージ不変な4元カレントは以下の式で表わされる。

$$j_\mu = \psi^* (i\vec{\nabla} - eA_\mu) \psi + \{ \psi^* (i\vec{\nabla} - eA_\mu) \psi \}^* \quad \dots (66)$$

$$\langle J_\mu \rangle \equiv \langle \Phi_\theta | J_\mu | \Phi_\theta \rangle$$

$$= \langle \psi^* \rangle (i\partial_\mu - eA_\mu) \langle \psi \rangle + \{ \langle \psi^* \rangle (i\partial_\mu - eA_\mu) \langle \psi \rangle \}^*$$

$$= \langle \psi^* \rangle (ii\partial_\mu \theta - eA_\mu) \langle \psi \rangle + \{ \langle \psi^* \rangle (ii\partial_\mu \theta - eA_\mu) \langle \psi \rangle \}^*$$

$$= -2 \langle \psi^* \rangle (\partial_\mu \theta + eA_\mu) \langle \psi \rangle$$

$$= -2 |\langle \psi \rangle|^2 (\partial_\mu \theta + eA_\mu) \quad \dots (67)$$

ここで、期待値 $\langle \dots \rangle$ は $\langle \Phi_\theta | \dots | \Phi_\theta \rangle$ の略である。

※注：発表では、〈自己疑問点〉として以下2つを挙げていた。

(I) (63)式で定義された凝縮真空で直交条件 $\langle \Phi_\theta | \Phi_{\theta'} \rangle = \delta_{\theta\theta'}$ を確かめると、実際には

$\langle \Phi_\theta | \Phi_{\theta'} \rangle = \delta_{\theta\theta'} \pm \frac{1}{\Delta N} (\delta_{\theta\theta'} - 1)$ となって正確には直交条件が成立していないことを呈示して

いた。発表後自己考察を行なった結果、(63)式で定義された凝縮真空 $|\Phi_\theta\rangle$ は、実際には(62)で与えられたハミルトニアン \mathcal{H}_S の正確な意味での固有状態ではないことが分かった。その理由は、凝縮真空 $|\Phi_\theta\rangle$ の定義式(63)式の右辺の $|\Phi(N^*+n)\rangle$ が n についての周期境界条件をもっていないことにある。もし、 $|\Phi(N^*+\frac{\Delta N}{2})\rangle = |\Phi(N^*-\frac{\Delta N}{2})\rangle$ を満たせば $|\Phi_\theta\rangle$ はハミルトニアン \mathcal{H}_S は固有状態になるが、 $|\Phi(N)\rangle$ は粒子数の固有状態であり周期境界条件は満たさない。参照した文献の中で与えられた位相状態 $|\Phi_\theta\rangle$ はおそらく近似的な固有状態としての議論であることが暗黙の了解とされていたことと推察している。

(II) 発表では(67)式で与えられた4元カレントの凝縮真空における期待値の式について、正確には(66)式で与えられる右辺全体の期待値になっていないことへの疑問点を呈示していた。発表後自己考察を行ない、物質場についてはこの式を得る中で揺らぎ $(\Delta\psi)^2 = \langle \psi^2 \rangle - \langle \psi \rangle^2$ 等を見捨てた近似を用い、光子場 A_μ については外場として扱っていることと理解した。前者の近似については、この場合の期待値を取っている状態は多くの数の粒子の凝縮真空であり、粒子数 N についての揺らぎ $\Delta N \sim \sqrt{N}$ は相対的には $\frac{\Delta N}{N} \sim \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$ となって無視できる大きさとなることで理解された。後者については、ドレスト光子生成のメカニズムのヒントを与えるためには、光子場 A_μ も外場ではなく、物質場の中での光子の凝縮真空のような状態を考えてその期待値 $\langle A_\mu \rangle$ と考えなければならないのでないだろうか？ と考えている。

ここでマックスウェルの方程式に(66)式で得られた4元カレント J_μ の期待値を入れると、以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) &= \langle j^\nu \rangle \\ &= -2 |\langle \psi \rangle|^2 (\partial^\nu \theta + e A^\nu) \quad \dots (68) \end{aligned}$$

ここで、ゲージ変換 $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta$ を両辺に施して、以下の式を得る。

$$\square A'^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A'^\mu) = -2e |\langle \psi \rangle|^2 A'^\nu \quad \dots (69)$$

この式の右辺を左辺に移行することにより、以下の式を得る。

$$\left(\square + 2e|\langle \psi \rangle|^2\right) A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A'^\mu) = 0 \quad \dots (70)$$

ここで、 $\sqrt{2e}|\langle \psi \rangle| = m$ とおくと、以下の形式上の質量 m をもったマックスウェルの方程式を得る。

$$\left(\square + m^2\right) A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A'^\mu) = 0 \quad \dots (71)$$

この両辺に ∂_ν を作用させると、以下の式を得る。

$$m^2(\partial_\mu A'^\mu) = 0 \quad \dots (72)$$

$m \neq 0$ より、

$$\partial_\mu A'^\mu = 0 \quad \dots (73)$$

つまり、(71)式のマックスウェルの方程式を満たす質量を得た光子場においては、ローレンツ条件 (73) は自動的に満たされている。

(ゲージ条件として課される式としてではなく。)

(71)、(73) より、最終的に凝縮真空の中でのマックスウェルの方程式は以下のようなになる。

$$\left(\square + m^2\right) A^\nu = 0 \quad \dots (74)$$

$$m = \sqrt{2e}|\langle \psi \rangle| = \sqrt{2e} \left(\frac{N^*}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots (75)$$

以上の考察をまとめると、以下のようなになる。

多くのボーズ粒子 が凝縮した真空 $|\Phi_\theta\rangle$ の上では、マックスウェルの方程式は (71) 式のように、自発的にゲージ対称性の破れた形式上の質量 m をもつ光子場の方程式と

なる。このとき、 $m = \sqrt{2e} \left(\frac{N^*}{V}\right)^{\frac{1}{2}}$ の質量を得て光子が confinement されたと見なせる。

典型的なゲージ対称性の破れに起因するとみなされている「超伝導現象」では、一般に系の体積は小さくなく、その為光子の confinement の十分な大きさを与える為には多数のボーズ粒子 (粒子数 N^*) の凝縮が必要となる。

(Ⅲ) ドレスト光子の生成と特性のメカニズムの解明に向けて：

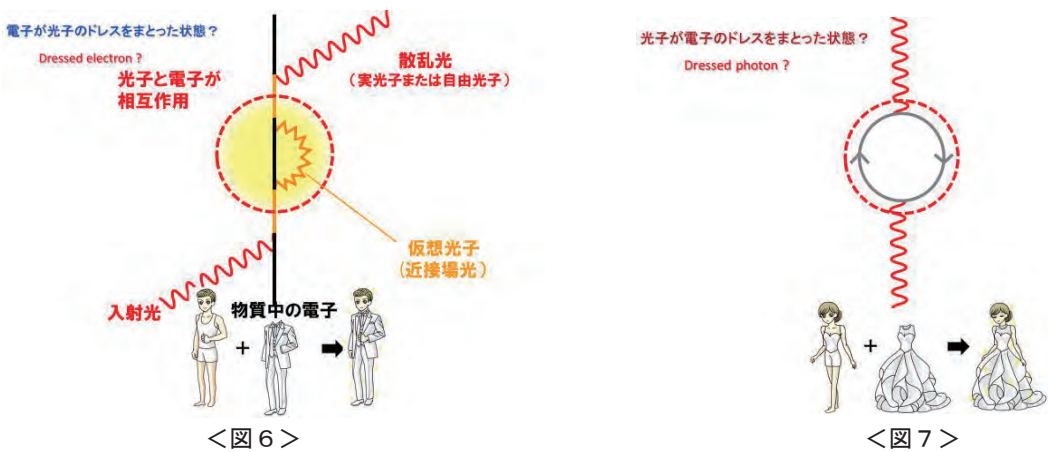
上述のようにゲージ対称性の自発的破れによって、光子が confinement されるその度合いの目安は獲得した質量 $m = \sqrt{2e} \left(\frac{N^*}{V}\right)^{\frac{1}{2}}$ であると考えられるので、この機構がドレスト光子の発生メカニズムに関与していた場合、系の体積Vは非常に小さい（ナノスケール）であることから、凝縮するボーズ粒子（電子-電子ペア、電子-ホールペア？）の粒子数 N^* は、必ずしもそれほど大きくなくてもmは大きくなり得、光子の極めて小さな空間への confinement がこの機構で生じる可能性はあることと著者は考えている。

本発表の最後に、ドレスト光子の発見者であり命名者の大津元一氏がファインマンダイアグラムの書いたドレスト光子の概念図について、以下の3つの可能性を呈示した。

<図6>は大津元一氏のオリジナルな概念図（文献18）であるが、この図は電子（実線）が光子のドレス（破線で丸く囲んだ波線部）を纏った状態を表わしていて、むしろドレスト電子（礼服を着た紳士）と呼ばれるべき図と著者は考え、例えば<図7>のような概念図を考えてみた。この図では、光子（波線）が電子のドレス（破線で丸く囲んだ実線部）を纏った状態を表わしていて、文字通りドレスト光子（ドレスを着た淑女）と呼ばれるべき図ではないかと考えている。ただし、ドレスト光子は外場（外線）として伝播する光子ではなく物質内部に閉ざされた外部に伝播しない場であることを考えると、<図8>の中の破線で丸く囲んだ中の内線としての波線部が更に小さな電子のドレスを纏ったドレスト光子の概念図に相当する可能性もあると考えている。

いずれにしても、ドレスト光子の生成と特性の物理的メカニズムが解明された暁にはよりふさわしいドレスト光子の概念図が描かれることと期待している。

（3つの図は、すべて著者のゼミOGの松村祐美氏作成による。）





<図 8>

※今後の課題として、

今回は、真空中での光子の横波 vs 縦波、実光子 vs 仮想光子、オンシェル vs オフシェル各々の間の対応関係の考察、整理をオリジナルな補足も踏まえて行なった。表題に挙げた「物質中」での考察まで届かなかったが、目下ここで用いたオリジナルな（自前の）アプローチで物質場での対応関係の考察、解析を行なっている。物質場（ドレスト光子を念頭に）での光子の横波 vs 縦波、実光子 vs 仮想光子、オンシェル vs オフシェル各々の間の対応関係は、ゲージ対称性が破れている場合は真空中とは異なるものとなる可能性がある。有意な解析結果が出れば、改めて報告をしたい。

古典場的として扱われている、例えば静電遮蔽（デバイ近似、トーマス・フェルミ近似）は、フェルミエネルギーが電子のエネルギーギャップの中になれば、自由電子的な振る舞いをする電子が外場の静電場に応答運動して密度分布を変えて、そのフィードバック効果で静電場の遮蔽現象が生じるということと著者は理解しているが、その外場の静電場に応答出来る、自由電子的に動いて密度分布を変えることが出来る電子は、言わばゼロモードの電子（フェルミエネルギーを基準に取れば）と考えることが出来、それがゲージ対称性の自発的破れの中で生じる NG モードに対応するという理解の可能性について自己考察したい。

参考文献

- (1) 「超伝導入門」中島貞雄著(培風館)
- (2) 南部理論と物性物理学 青木秀夫 物理学会誌 64, 80 (2009)
- (3) Higgs, Anderson and all that, Nature Physics (2015)
- (4) Theory of Superconductivity, J. Bardeen, L.N.Cooper, and J.Schriffer, Phy.Rev,108 vol.5 (1957)
- (5) Microscopic Theory of Superconductivity, J. Bardeen, L.N.Cooper, and J.Schriffer, Letter to Editors (1957)
- (6) Gauge theories in particle physics, 2nd ed I.J.R.Aitchison and A.I.J.Hey, (Inst. Phys. Publication,1989)
- (7) 東島清氏の解説記事
- (8) The Theory of Fundamental Physics, A lecture note volume, R.P.Feynman (1961)
- (9) 「場の量子論—ミクロ、マクロそして熱物理学の最前線—」梅沢博臣著 (1993) (有光敏彦、有光直子訳) (培風館)
- (10) 「量子場とミクロ・マクロ双対性」小嶋泉著 2013 (丸善出版)
- (11) 「ゲージ理論をめぐって—Yang-Mills 50年—」九後太一郎
- (12) 「ドレスト光子—光・物質融合工学の原理—」大津元一著 (2013) (朝倉書店)
- (13) Dressed photon technology, M. Ohtsu, Nanophotonics1 (2012) 82–97
- (14) Logical Fallacy of using the Electric Field in Non-resonant, Near-field Optics, I.Banno, M.Ohtsu Arkive (2018)
- (15) Bound States in the Continuum (B I C), C.W. Hsu et' al, MIT Open Access Articles (2016)
- (16) Dressed states from gauge invariance .H.Hirai, S.Sugishita, hep-th (2019)
- (17) Quantum Field Theory, F.Mandel and G.Shaw (2010)
- (18) 「光科学技術革命：ドレスト光子はやわかり」 (異次元の光技術入門) 大津元一著 (2014) (丸善プラネット)

浅水流のケルヴィン・ヘルムホルツ不安定性に対する 側壁の効果

Stability Effect of side walls on the Kelvin-Helmholtz instability of a shallow-water flow

Yasuhide Fukumoto (福本康秀)

Institute of Mathematics for Industry (IMI), Kyushu University, Fukuoka, Japan
Thi Thai Le

Graduate School of Mathematics, Kyushu University, Fukuoka, Japan

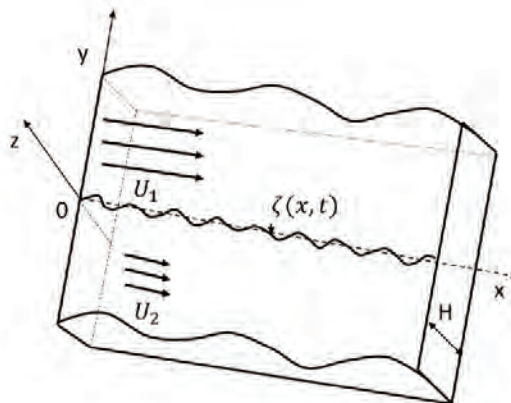
Abstract:

The linear stability is considered of a tangential velocity discontinuity in a shallow-water flow superposed by to perturbations, of infinitesimal amplitude, on the velocity interface and the water surface. It is known that, for infinite- region flows, the interface of velocity discontinuity undergoes the instability of the Kelvin-Helmholtz type for $U < 2\sqrt{2}c$, but is stabilized for $U \geq 2\sqrt{2}c$, with c being the propagating speed of the gravity wave. We extend this result in two ways, by incorporating

- (1) Effect of bottom drag,
- (2) Effect of side walls like a river flow of finite width.

According to our intuition, the both effects could act as stabilizing factors. The stability of the tangential velocity discontinuity is determined by solving the dispersion relation numerically as well as analytically. We show that the bottom drag and the side wall both enhance the instability in the sense that these effect both enlarges the range of instability in U/c .

Discontinuity in **tangential** velocity



1. Introduction

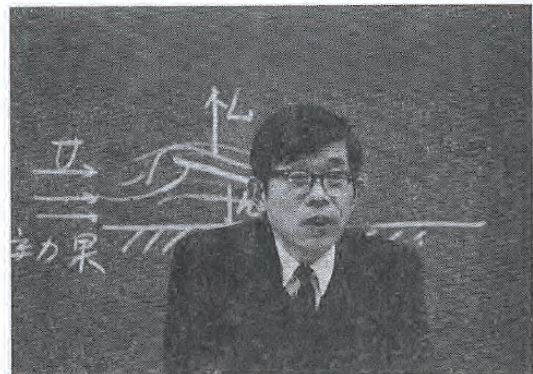
A basic flow in the x-direction with a uniform velocity U is possible steady in shallow water of constant depth H . Its stability can be determined from the dispersion equation for small-amplitude surface waves superposed upon it. Landau and Hatanaka demonstrated that, there is an analogy between an incompressible flow in shallow water and a compressible gas flow, the instability of the surface of the tangential velocity discontinuity is suppressed when the discontinuity velocity U is greater than $\sqrt{8}c$ times sound speed c_s . It is worth noting that this analogy is limited to two dimensions because in the shallow-water approximation, the hydrostatic balance is employed in the vertical direction and that we have to consider perturbations, with wavelength $\lambda \gg H$, the depth of the fluid layer, depending only on the coordinates of the horizontal plane of the liquid layer (not on the depth coordinate z). Exploiting this analogy, Bezenkov and Pogutse (1983) showed that a discontinuous surface in tangential velocity is stabilized when the discontinuous velocity is greater than $\sqrt{8}c$, where $c = \sqrt{gH}$, with g being the gravity acceleration, is the propagation speed of the gravity wave in a shallow water of depth H .

今井功先生の御足跡

橋本 英典 (物理)

今井功先生は昭和 11 年物理学科を卒業の後、新設後間もない阪大理学部にて 2 年間助手として奉職され、昭和 13 年講師として本学部にて赴任されました。小学校の 5 年修了で中学にお入りになったこともあって、以来実に 37 年の間物理学教室において研究と後進の指導にあたってこられました。昭和 17 年 4 月に助教、昭和 25 年 8 月に教授に昇任されており、航空研究所の併任教授、国内各大学の非常勤講師、米国のメリーランド大学、コーネル大学、フランスのマルセイユ大学の客員教授など多彩な研究教育をも歴任されました。

この間流体力学および関連する数理物理学の各分野において幾多のすぐれた業績をあげられました。先生が流体力学の研究に入られたのは昭和 11 年阪大の友近教授の助手になられたのが機縁と聞いていますが、同年ただちに、平行板の間のカルマン渦列の論文をフランスの *Comptes Rendus* に発表され、また友近教授が多年にわたりとりくんでおられた航空機翼の地面効果の問題に大きな寄与をされました。



物理教室における最終講演で

をおさめられました。一方基礎的な流体力学における積年の難問にもたかえられ、粘性流体中を運動する柱状物体のモーメントや伴流の構造に対する有名なファイロンやゴールドシュタイン等のパラドックスを見事に解決されました。また低いレイノルズ数の流れの新しい解法

Our research

Our motivation:

1. The reality phenomena always have effects such as: topographic bottom, solid walls (river), viscosity....
2. We expect the stability of interface will be destabilized by the effects such as: topographic bottom, solid walls (river), viscosity

Main works:

1. Including the effect bottom drag
2. The width of considered region is limited
3. In these cases, Bezenkov's result is recovered

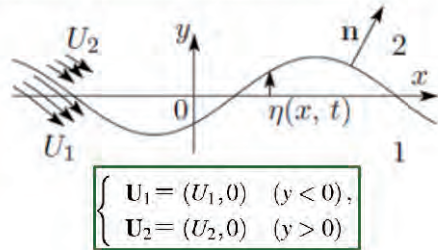
2. Problems

Kelvin-Helmholtz instability

Assumption $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \implies \mathbf{u} = \nabla \phi$

Disturbances

$$\begin{aligned} \phi_2(x, y, t) &= \text{Re} [e^{ikx} e^{-|k|y} B_2(t)], \\ \eta(x, t) &= \text{Re} [e^{ikx} a(t)], \\ \phi_1(x, y, t) &= \text{Re} [e^{ikx} e^{|k|y} B_1(t)] \end{aligned}$$



$$\begin{cases} \mathbf{U}_1 = (U_1, 0) & (y < 0), \\ \mathbf{U}_2 = (U_2, 0) & (y > 0) \end{cases}$$

From Boundary Conditions

$$\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \Big|_{\xi} - (\mathbf{U}_j + \nabla \phi_j) \right) = 0 \quad p_1 = p_2 \text{ at } y = \eta$$

$$\dot{a} + ikU_1 a = |k|B_1,$$

$$\dot{a} + ikU_2 a = -|k|B_2,$$

$$\dot{B}_1 + ikU_1 B_1 - (\dot{B}_2 + ikU_2 B_2) = 0$$

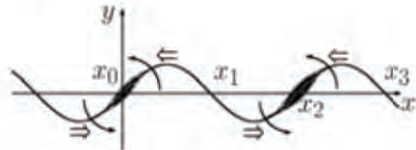
Solution of the form

$$a(t), B_1(t), B_2(t) \propto e^{\sigma t}$$

Growth rate

$$\sigma = -\frac{ik}{2}(U_1 + U_2) \pm \frac{1}{2}|k||U|;$$

$$U = U_1 - U_2$$

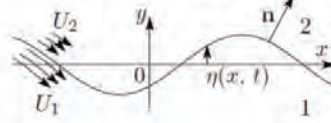


Kelvin-Helmholtz instability of an incompressible flow

Assumption $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \nabla \phi, \nabla^2 \phi = 0$

Disturbances

$$\begin{aligned} \phi_2(x, y, t) &= \text{Re} [e^{ikx} e^{-|k|y} B_2(t)], \\ \eta(x, t) &= \text{Re} [e^{ikx} a(t)], \\ \phi_1(x, y, t) &= \text{Re} [e^{ikx} e^{|k|y} B_1(t)] \end{aligned}$$



$$\begin{cases} \mathbf{U}_1 = (U_1, 0) & (y < 0), \\ \mathbf{U}_2 = (U_2, 0) & (y > 0) \end{cases}$$

From **Boundary Conditions**

$$\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \Big|_{\xi} - (\mathbf{U}_1 + \nabla \phi_1) \right) = 0 \quad \boxed{p_1 = p_2 \text{ at } y = \eta}$$

$$\dot{a} + ikU_1 a = |k|B_1,$$

$$\dot{a} + ikU_2 a = -|k|B_2,$$

$$\dot{B}_1 + ikU_1 B_1 - (\dot{B}_2 + ikU_2 B_2) = 0$$

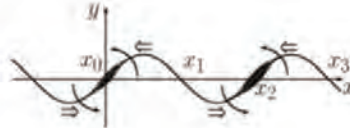
Solution of the form

$$a(t), B_1(t), B_2(t) \propto e^{\sigma t}$$

Growth rate

$$\sigma = -\frac{ik}{2}(U_1 + U_2) \pm \frac{1}{2}|k||U|;$$

$$U = U_1 - U_2$$



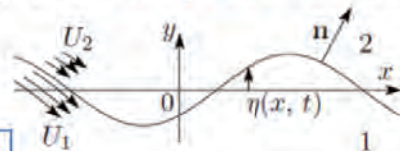
Kelvin-Helmholtz instability of a compressible flow

We allow for $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$

Shape of interface $y = \zeta(x, y, t)$

Disturbances

$$\begin{aligned} p'_2 &= \text{Re} [b_2 e^{i(q_x x + q_z z - \omega t) - k_2 y}] & (y > 0) \\ \zeta &= \text{Re} [a e^{i(q_x x + q_z z - \omega t)}] \\ p'_1 &= \text{Re} [b_1 e^{i(q_x x + q_z z - \omega t) + k_1 y}] & (y < 0) \end{aligned}$$



$$\begin{cases} \mathbf{U}_2 = (U, 0, 0) & (y > 0) \\ \mathbf{U}_1 = \mathbf{0} & (y < 0) \end{cases}$$

Lower layer

$$\omega^2 - c^2(q^2 - k_1^2) = 0$$

$$p'_1 = \zeta \omega^2 \rho / k_1 \text{ at } y \approx 0$$

Upper layer

$$(\omega - q_x U)^2 - c^2(q^2 - k_2^2) = 0; (q^2 = q_x^2 + q_z^2)$$

$$p'_2 = -\zeta (\omega - q_x U)^2 \rho / k_2 \text{ at } y \approx 0$$

Dynamical B.C.

$$p'_1 = p'_2 \text{ at } y \approx 0$$

$$\frac{k_1}{\omega^2} + \frac{k_2}{(\omega - q_x U)^2} = 0$$

$$q_x = q \cos \phi, \quad q_z = q \sin \phi$$

$$\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(\omega - qU \cos \phi)^2} \right] \left[\frac{1}{c^2 q^2} - \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(\omega - qU \cos \phi)^2} \right] = 0$$

Stabilization of Kelvin-Helmholtz flow in supersonic regime

$$q_x = q \cos \phi, \quad q_z = q \sin \phi$$

$$\omega = \begin{cases} \frac{1}{2}qU \cos \phi \\ \frac{1}{2}qU \cos \phi \pm q\sqrt{\frac{1}{4}U^2 \cos^2 \phi + c^2 \pm c\sqrt{c^2 + U^2 \cos^2 \phi}} \end{cases}$$

$$U \cos \phi > \sqrt{8c} \quad \Rightarrow \quad \omega \text{ is real, and therefore the flow is stable}$$

$$\phi = 0 \Rightarrow U > \sqrt{8c} \quad (\text{Landau 1944})$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 > \sqrt{8c} \quad \text{Impossible! Flow is 3D unstable (Syrovatskii 1954)}$$

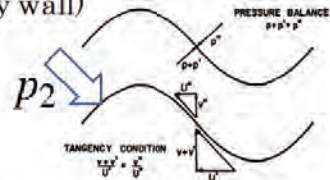
Stabilizing mechanism (?)

cf. H. S. Ribner: J. Acoust. Soc. Am. 29 (1957) 435-441

The medium does work on the interface (=a wavy wall)

Acting force per unit area = <pressure × slope >

$$\langle p_2 v_2 \rangle_{av} / (U - U_{int})$$



Work rate per unit area = <pressure × slope >
× Traveling speed of interfacial wave

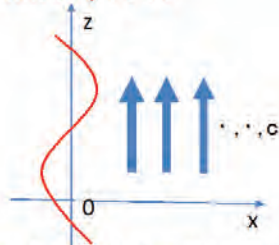
$$U_{int} \langle p_2 v_2 \rangle_{av} / (U - U_{int}) \\ = - (\langle p_2 v_2 \rangle_{av} + \rho U \langle u_2 v_2 \rangle_{av})$$

-(transmitted flux of acoustic energy)

$$\langle p_2 v_2 \rangle_{av} / (U - U_{int}) > 0 \Rightarrow \text{Stable (wave attenuates)} \\ \langle p_2 v_2 \rangle_{av} / (U - U_{int}) < 0 \Rightarrow \text{Unstable (wave amplifies)}$$

Problem 1: The stability of tangential discontinuity in velocity of a compressible fluids in 2D

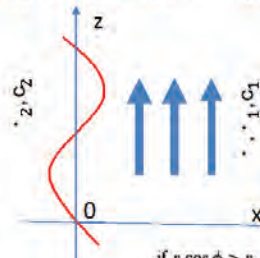
Landau, 1944



Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1944). *Mechanics of continuous media*. Moscow: Gostekhizdat (1st Russian ed.).

waves can suppress KHI when $v \geq 2\sqrt{2} \cdot$

Syrovatskii (1954)



AEC-tr-2603
INSTABILITY OF TANGENTIAL DISCONTINUITIES IN A COMPRESSIBLE MEDIUM. S. I. Syrovatskii. Translated from *Zhur. Eksptl. i Teoret. Fiz.* **27**, 121-3(1954). 4p.

The tangential discontinuity is stable if

$$v \cos \phi \geq \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}}$$

if $v \cos \phi > v_k$, where

$$v_k = c\sqrt{8}.$$

- For water, the density and the depth are the same on either side of the discontinuity
- The stability of tangential discontinuity in shallow water \longleftrightarrow the stability of discontinuity in a gas (2D)

S. V. Bezdenkov and O. P. Pogutse (1983)

Landau & Lifshitz "Fluid Mechanics" (English translation) p.413

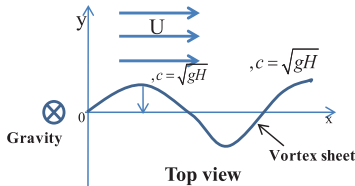
PROBLEM

Find the stability condition for a tangential discontinuity in shallow water, i.e. a line such that the liquid on either side is moving with different velocities (S. V. Bezdenkov and O. P. Pogutse 1983).

SOLUTION. Because of the analogy mentioned above between the hydrodynamics of shallow water and polytropic gas dynamics, the problem is equivalent to that of the stability of a tangential discontinuity in a gas (§84, Problem 1). There is a difference, however, because in the shallow-water case we have to consider perturbations depending only on the coordinates in the plane of the liquid layer (parallel and perpendicular to the velocity v), not on the depth coordinate z ; the shallow-water approximation corresponds to perturbations with wavelength $\lambda \gg h$. The velocity v_k found in §84, Problem 1, is therefore now the limit of instability: the discontinuity is stable for $v > v_k$, where v is the velocity change there. Since the density and the depth are the same on either side of the discontinuity, the velocity of sound is the same on either side, $c_1 = c_2 = \sqrt{gh}$, and the discontinuity is therefore stable if $v > 2\sqrt{2gh}$.

Problem 2: The stability of tangential discontinuity in velocity of shallow water

1. The stability problem of tangential discontinuity



For small disturbances

$$\begin{cases} u(x,y,t) = U + \tilde{u}(x,y,t), \\ v(x,y,t) = \tilde{v}(x,y,t), \\ h(x,y,t) = H + \tilde{h}(x,y,t), \end{cases}$$

$$U = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \text{const.} > 0, & y > 0 \end{cases}$$

Ansatz:

$$\tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{h}_1 \propto e^{i(qx - \omega t)} e^{-K_1 y}$$

$$\tilde{u}_2, \tilde{v}_2, \tilde{h}_2 \propto e^{i(qx - \omega t)} e^{K_2 y}$$

q, K: wave number in x, y direction;
 \tilde{h} : water depth; ω : frequency
 \tilde{u}, \tilde{v} : perturbed velocity;
 Subscript 1 is for $y > 0$
 and 2 is for $y < 0$

2. Boundary conditions at a vortex sheet

- ❖ Kinematic B.C: Equality of normal components of particle velocities v at both sides of the interface, i.e.

$$\tilde{v}_{y=\zeta^+} = \tilde{v}_{y=\zeta^-}$$

where: $F(x, y, t) = y - \zeta(x, t) = 0$, and

$$\frac{DF(x,y,t)}{Dt} = \frac{Dy}{Dt} - \frac{D\zeta(x,t)}{Dt} = 0 \iff \frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \tilde{v}$$

- ❖ Dynamic B.C: Equality of pressure acting upon each part of the interface from both sides, i.e.

$$\tilde{p}_{y=\zeta^+} = \tilde{p}_{y=\zeta^-}$$

Hydrostatic approximation: $\tilde{p} = \rho g \tilde{h}$, then

$$\tilde{h}_{y=\zeta^+} = \tilde{h}_{y=\zeta^-}$$

Equation of shallow water flow

$$0 \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad \begin{aligned} p &= p_0 \text{ (= atmospheric pressure) at } z = h \\ p &= p_0 + g\rho (h(x,y,t) - z) \end{aligned}$$

Assume that u and v are independent of z

Equation for horizontal flow

$$\left. \begin{aligned} h_t + (hu)_x + (hv)_y &= 0, \\ u_t + uu_x + vv_y + h_x &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + h_y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

In the presence of the bottom drag

$$\frac{Dh}{Dt} + h(u_x + v_y) = 0,$$

$$\frac{Du}{Dt} + gh_x = -\gamma u \sqrt{u^2 + v^2},$$

$$\frac{Dv}{Dt} + gh_y = -\gamma v \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

Case of no bottom friction

Dispersion relation

$$[(\omega - qU)^2 - \omega^2][\omega^2(\omega - qU)^2 - q^2c^2((\omega - qU)^2 - \omega^2)] = 0.$$

Its roots ω are written out explicitly as

$$\omega_1 = \frac{qU}{2},$$

$$\omega_{2,3,4,5} = \frac{qU}{2} \pm \frac{1}{2}q \sqrt{U^2 + 4c^2 \pm 4c \sqrt{U^2 + c^2}}.$$

The interface of the tangential discontinuity in the case $\gamma = 0$ is stable if $\sqrt{U^2 + 4c^2 \pm 4c \sqrt{U^2 + c^2}} \geq 0$, or $U \geq \sqrt{8}c$.

Case of bottom friction

Dispersion relation

$$(\omega - qU + i\gamma U) \left\{ \omega^4 [(\omega - qU)^2 - c^2 q^2 + 2iU\gamma(\omega - qU)] \right. \\ \left. - (\omega - qU)^2 (\omega^2 - q^2 c^2) (\omega - qU + \gamma U i) (\omega - qU + 2\gamma U i) \right\} = 0$$

For small γ $\omega = \omega^0 + \gamma \omega^*$

$$\text{Im}[\omega_2^*] = -\frac{U(U^2 - 12c^2)}{4(U^2 - 8c^2)} \leq 0.$$

$$\omega_{\pm-}^* = \frac{i}{4} \sqrt{c^2 + U^2} \left\{ U \frac{(9c^2 + 8U^2)c - (9c^2 + 2U^2)\sqrt{c^2 + U^2}}{4c^2 + U^2 - 4c\sqrt{c^2 + U^2}} \right. \\ \left. \mp \frac{(c^2 + 4U^2)c - (c^2 + 2U^2)\sqrt{c^2 + U^2}}{\sqrt{4c^2 + U^2 - 4c\sqrt{c^2 + U^2}}} \right\},$$

$$\omega_{\pm+}^* = -\frac{i}{4} \sqrt{c^2 + U^2} \left\{ U \frac{(9c^2 + 8U^2)c + (9c^2 + 2U^2)\sqrt{c^2 + U^2}}{4c^2 + U^2 + 4c\sqrt{c^2 + U^2}} \right. \\ \left. \pm \frac{(c^2 + 4U^2)c + (c^2 + 2U^2)\sqrt{c^2 + U^2}}{\sqrt{4c^2 + U^2 + 4c\sqrt{c^2 + U^2}}} \right\}.$$

General friction

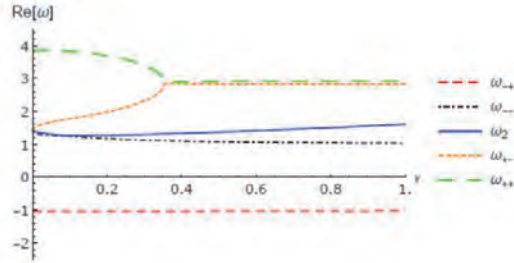


Fig. 3. The real part $\text{Re}[\omega]$ of numerical solution of the dispersion equation (11) as a function of γ for $Fr = 2.83$ and $0 \leq \gamma \leq 1$.

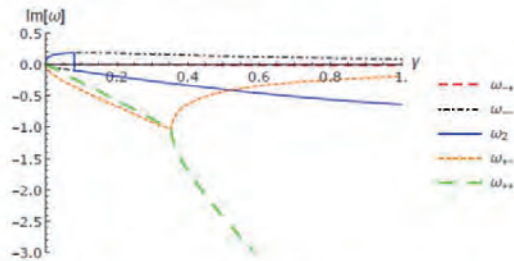
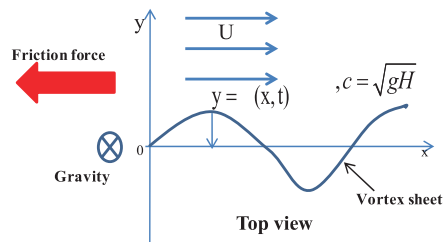


Fig. 4. The imaginary part $\text{Im}[\omega]$ of numerical solution of the dispersion equation (11) as a function of γ for $Fr = 2.83$ and $0 \leq \gamma \leq 1$.

Bottom friction has an amplify the negative energy mode

- Work done by friction is always negative.
- Friction absorbs energy from motion system or system will loss energy.



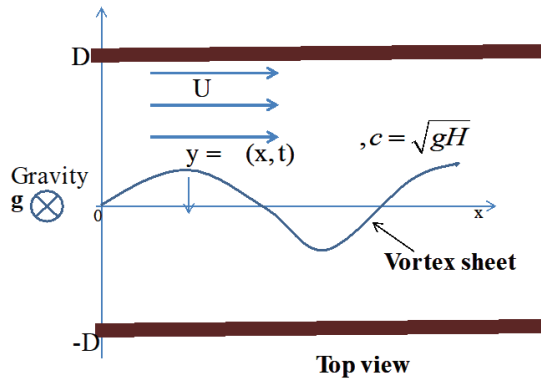
➔ **Bottom friction absorbs energy or the bottom friction has an amplify the negative energy mode and the stream goes unstable over the entire range of the Froude number (U/c) for small γ**

cf. Over-reflection

Miles (1957), Ribner (1957), Acheson (1976)

Effect of finite width

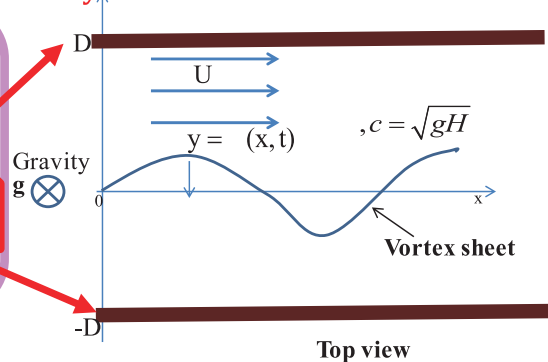
2D



The width of considered region is limited

For a finite width in y – direction $-D \leq y \leq D$

$$\begin{cases} \frac{D\tilde{h}}{Dt} + H(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y) = 0, \\ \frac{D\tilde{u}}{Dt} + g\tilde{h}_x = 0, \\ \frac{D\tilde{v}}{Dt} + g\tilde{h}_y = 0, \end{cases} \quad \text{and} \quad \tilde{v}_D = \tilde{v}_{-D} = 0$$



Dispersion relation equations:

$$\begin{cases} K_1^2 = q^2 - (\omega - qU)^2 / c^2 \\ K_2^2 = q^2 - \omega^2 / c^2 \end{cases}$$

and $\frac{K_1}{K_2} = -\frac{(\omega - qU)^2 \tanh(K_2 D)}{\omega^2 \tanh(K_1 D)}$

Stability condition:

All solutions ω have $Im[\omega] \leq 0$

Infinite-width limit: $K_1 D \rightarrow \infty, K_2 D \rightarrow \infty$

Narrow-width limit: $K_1 D \ll 1, K_2 D \ll 1$

(i). Recover the result of Bezdenkov (1983): $K_1 D \rightarrow \infty, K_2 D \rightarrow \infty$

Dispersion equation:

$$[(\cdot - \cdot \cdot)^2 - \cdot^2][\cdot^2(\cdot - \cdot \cdot)^2 - \cdot^2 \cdot^2(\cdot - \cdot \cdot)^2 - \cdot^2 \cdot^2 \cdot^2] = 0$$

$$\tanh(\cdot_1 \cdot) \approx 1$$

$$\tanh(\cdot_2 \cdot) \approx 1$$

Solutions:

$$\cdot_1 = \frac{\cdot \cdot}{2 \cdot}$$

$$\cdot_{\pm} = \frac{\cdot}{2} \pm \frac{\cdot}{2} \sqrt{4 \cdot^2 + \cdot^2 - 4 \cdot \sqrt{\cdot^2 + \cdot^2}}$$

$$\cdot_{\pm\pm} = \frac{\cdot}{2} \pm \frac{\cdot}{2} \sqrt{4 \cdot^2 + \cdot^2 + 4 \cdot \sqrt{\cdot^2 + \cdot^2}}$$

Stability condition:

$$\cdot \geq 2\sqrt{2} \cdot \quad \text{Bezdenkov}$$

(ii). The considered region is very narrow: $K_1 D \ll 1, K_2 D \ll 1$

Dispersion equation:

$$2 \cdot^2(\cdot - \cdot \cdot)^2 - \cdot^2 \cdot^2(\cdot - \cdot \cdot)^2 - \cdot^2 \cdot^2 \cdot^2 = 0$$

$$\tanh(\cdot_1 \cdot) \approx \cdot_1 \cdot$$

$$\tanh(\cdot_2 \cdot) \approx \cdot_2 \cdot$$

Solutions:

$$\cdot_{\pm} = \frac{\cdot \cdot}{2} \pm \frac{\cdot}{2} \sqrt{2 \cdot^2 + \cdot^2 - 2 \cdot \sqrt{\cdot^2 + 2 \cdot^2}}$$

$$\cdot_{\pm\pm} = \frac{\cdot}{2} \pm \frac{\cdot}{2} \sqrt{2 \cdot^2 + \cdot^2 + 2 \cdot \sqrt{\cdot^2 + 2 \cdot^2}}$$

Stability condition:

$$\cdot \geq 2 \cdot \quad \text{New result}$$

Wide-width asymptotics

$$K_1 D \gg 1, K_2 D \gg 1$$

(iii). In the case $(K_1 D) \gg 1, (K_2 D) \gg 1$, using approximation $\tanh(x) = 1 - 2e^{-x}$ for $x \gg 1$ and we assume that $\omega = \omega_0 + \tilde{\omega}$. In which, K_{01}, K_{02}, ω_0 are undisturbed component of wave number and wave frequency corresponded to equation (9) and $\tilde{K}_1 \ll K_{01}, \tilde{K}_2 \ll K_{02}, \tilde{\omega} \ll \omega_0$ are disturbed components. We find,

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= -\frac{\tilde{\omega}(\omega_0 - qU)}{K_{01}c^2}, \\ \tilde{K}_2 &= -\frac{\tilde{\omega}_0}{K_{20}c^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

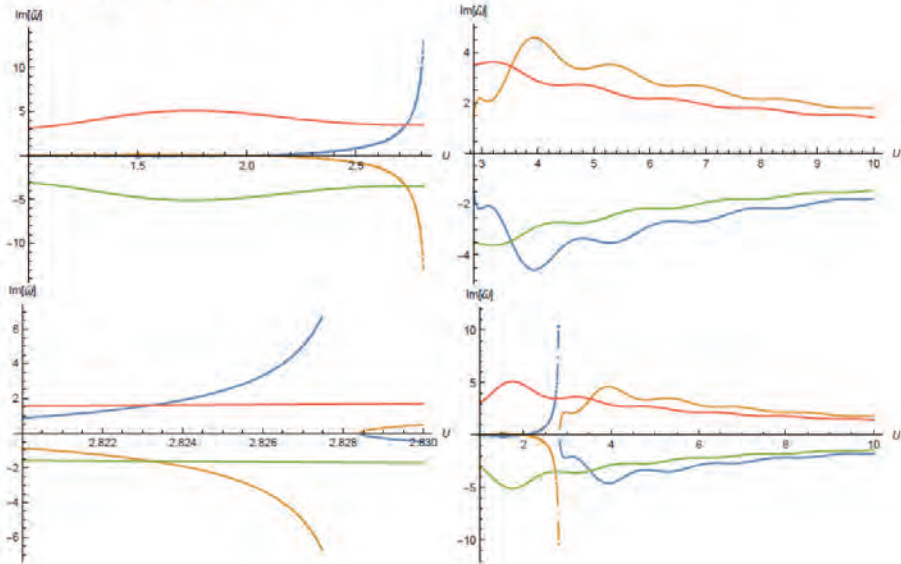
and

$$\tilde{\omega} = -2 \frac{e^{-2K_{01}}(2q^2c^2 - (\omega_0 - qU)^2)K_{02}\omega_0^3(\omega_0 - qU) + e^{-2K_{02}}(2q^2c^2 - \omega_0^2)K_{01}(\omega_0 - qU)^3\omega_0}{(2q^2c^2 - \omega_0^2)K_{01}(\omega_0 - qU)^3 + (2q^2c^2 - (\omega_0 - qU)^2)K_{02}\omega_0^3}. \quad (15)$$

In which, the undisturbed component of wave number K_{01}, K_{02} are reduced from two first equations of (7), corresponding to ω_0 .

Numerical example of perturbed growth rate from large-width asymptotics

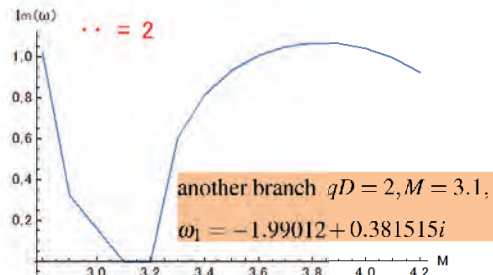
$qD = 2, K_{01}K_{02} > 0$



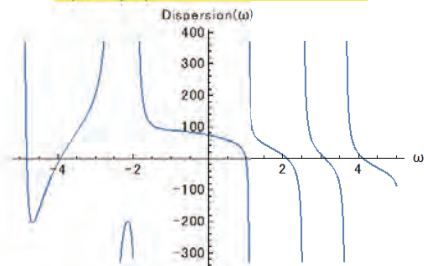
Numerical solution of a general case

(iii). Numerical solution in general case

M	ω	$Im[\omega]$
2.8	$20.946 + 1.02111 i$	1.02111
2.9	$8.04137 + 0.322904 i$	0.322904
3.0	$3.94446 + 1.147 \times 10^{-27} i$	1.147×10^{-27}
3.1	$2.09414 - 1.79836 \times 10^{-22} i$	-1.79836×10^{-22}
3.2	$19.5575 + 4.52293 \times 10^{-16} i$	4.52293×10^{-16}
3.3	$19.9042 + 0.603063 i$	0.603063
3.4	$19.9983 + 0.812888 i$	0.812888
3.5	$20.0946 + 0.93294 i$	0.93294
3.6	$20.192 + 1.00653 i$	1.00653
3.7	$20.2904 + 1.04887 i$	1.04887
3.8	$20.3895 + 1.06678 i$	1.06678
3.9	$20.4891 + 1.06329 i$	1.06329
4.0	$20.5893 + 1.03922 i$	1.03922
4.1	$20.69 + 0.993385 i$	0.993385
4.2	$20.7912 + 0.922137 i$	0.922137



$$\frac{K_1 \tanh(K_1 D)}{(\omega - qU)^2} + \frac{K_2 \tanh(K_2 D)}{\omega^2} = 0$$



3. Summary

1. By exploiting an analogy between a compressible gas flow and a shallow-water flow, we have investigated effect of the gravity wave on the Kelvin-Helmholtz instability.

Sound wave □ *Gravity wave*

2. We show that a flow with tangential discontinuity in velocity of shallow water is destabilized by bottom drag's effect.

3. Numerical solution suggests that a flow with tangential discontinuity in velocity of shallow water is destabilized by the effect of finite width.

4. Conclusions

We have revised the linear stability of the interface of tangential discontinuity in stream velocity of shallow water, and have explored the influence of the bottom drag on the stability. The stability condition $U \geq \sqrt{8}c$ for the case of no bottom drag is recovered. The bottom friction drastically changes this result, and the interface is destabilized for over entire range of the Froude number $Fr = U/c$. By solving dispersion equation numerically, we show that the stability of tangential discontinuity in shallow water is destabilized if the effect of bottom or finite region flows are considered. However, its stability is possible stable if flow is considered in a very narrow region. The necessary ingredient for the dissipation induced instability is negative-energy modes. The energy of waves on the 'supersonic flow' ($Fr > 1$) is worth pursuing. The dissipation induced instability has bearing with the over-reflection. All these questions, particularly the Hamiltonian mechanical viewpoint, invite a future study.

ドレスト光子の理論的定式化

Theoretical Formulation of Dressed Photons

小嶋 泉, (一社) ドレスト光子研究起点

Izumi Ojima, Research Origin for Dressed Photon

概要

ドレスト光子が関与する興味深い諸現象を, 量子場概念と「ミクロ・マクロ双対性」の基本枠に基づいて整合的系統的に記述するため, 「オンシェル粒子」偏重等, 従来の量子場理論につきまってきた種々の偏見を正しつつ, グラスマン多様体・旗多様体とモース理論の基本的発想を取り込むことによって, ドレスト光子の理論的定式化に向けた展望を試みる。

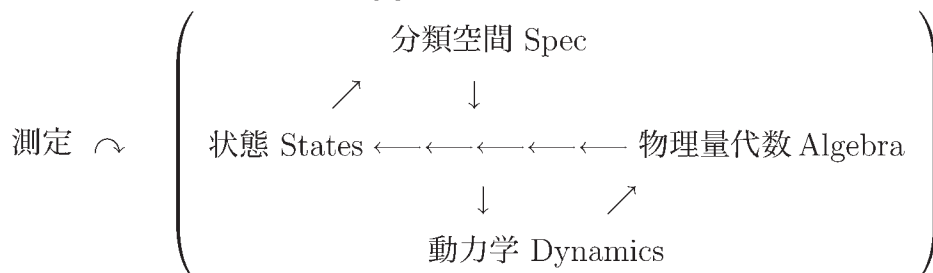
Abstract

In this report, interesting phenomena caused by dressed photons will be attempted to be formulated in a unified and consistent way in the framework of “Micro-Macro duality” in terms of the basic concept of quantum fields. For this purpose, we need to remove many such prejudices in the traditional form of QFT caused by too much sticking to the concept of “on-shell particles” and excluding the aspects of “off-shell” quantities inherent to QFT. For the purpose of aiming at a consistent theoretical framework for dressed photons, the use of Grassmannian and flag manifolds is examined in combination with Morse theory.

1 4項図式から見たドレスト光子 [1]

1.1 現象 1, 11, 6, 7

《ドレスト光子現象 [2] の理論的定式化》の課題に取り組むため、まず、大津先生による [ドレスト光子の特徴づけ] 現象 1 – 16 [3] を、[Micro-Macro duality + 4項図式] [4] の視点から考えてみよう：



《ドレスト光子の生成 Dyn・局在 Spec と移動の場所／必要エネルギー》

場所 Spec ナノ物質の境界面（物質表面など） [：現象 1]・

特異点（物質内の異質物，不純物原子など） [：現象 11]

に生成しそこに局在する（：佐久間さん）

ドレスト光子生成過程におけるエネルギーと状態遷移：

必要な光エネルギーは，電子の励起エネルギー以下で OK [：現象 6]

基底状態・励起状態間遷移は電気双極子禁制でも OK [：現象 7]

（：坂野さん）

1.2 現象 2, 9, 4, 8, 5, 3, 10

4項図式の文脈でドレスト光子の移動は，動力学 Dynamics の Spec = 時空・分類空間への作用 (action) Spec \curvearrowleft Dyn として定式化される：

近接ナノ物質間を双方向かつ自律的に移動し交換され [：現象 2 & 9]，

ドレスト光子場は測定用プローブの挿入で大きく乱される [：現象 4]。

測定 寸法最大値は 50 ~70 nm [：現象 8]，

移動には階層的特徴 [：現象 5] \leftarrow (:) ドレスト光子凝縮の非線型性由来，

移動効率は fiber probe 先端とナノ物質が同じサイズで最大 [：現象 3], エネルギー移動は random walk 過程より急速 [：現象 10] (：西郷さん)。

ナノ物質の特異点や境界面で生成しそこに局在する「局在光子」と on-shell $p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = 0$ から外れた「仮想光子」描像とを統合する統一概念として大津先生が提起されたのが「ドレスト光子」[1] であり, そのドレスト光子を典型例として, オフシェル領域での量子場の系統的組織的記述を目指すのが「オフシェル科学」ということ。

2 Si 結晶におけるドレスト光子 [現象 12,14,13,15,16]

OnShell では発光しないシリコン結晶を発光させることに成功した川添先生の実験からは, 次の 5 つの特徴 [現象 12,14,13,15,16] が取り出される:

ドレスト光子援用アニールを施すと,

[現象 12] Si 結晶中の異質物ボロン (B) 原子の空間分布は, Si 結晶発光の最適分布を実現するよう, 自律的に変化する。

[現象 14] Si 結晶 (間接遷移型半導体) 中の B 原子対の長さ, 方向, 鎖状配列形は自律的に制御される。

[現象 13] この Si 結晶発光デバイスからの光子エネルギーはアニールの際の照射光の光子エネルギーと等しい: i.e., 光子ブリーディング効果

[現象 15] アニールされた Si 結晶は間接遷移型半導体でありながら, 高い光パワーを放出するデバイスとなる。

[現象 16] アニールにより SiC 結晶 (間接遷移型半導体) は強磁性体として機能し, 可視域では巨大磁気光学効果を示す。

3 OnShell の「通説」 [I,II,III,IV,V] との対比

以上のような際立った特徴づけを持つ「ドレスト光子現象」を、OnShell 状態にのみ専ら関わる「通説」と対比させてみよう：

I 光は空間全体に広がって伝搬する波である [：正規分布の中心集中と広い裾野] ゆえに、その寸法は光の波長よりずっと大きい。

$\stackrel{cf}{\iff}$ 現象 1：ドレスト光子の生成・存在の局在性。

II 光の波長より小さい物質の観測、加工は不可能であり、それら微細物質を如何に組合せても光波長より小さい光デバイスは機能しない。

$\stackrel{cf}{\iff}$ ドレスト光子現象はナノサイズ。

▼ 上記 *I* & *II* は、空虚平坦な Mikowski 時空を実現する真空 = 基底状態上 (の on-shell) でのみ成立可能な「通説」の線型性・均質性を担保する **consistency conditions** として機能している！

III 光による電子励起には、電子の二準位間エネルギー差以上の光子エネルギーが必要。

$\stackrel{cf}{\iff}$ 現象 6：ドレスト光子は、電子の励起エネルギー以下の光エネルギー供給で生成される。

IV 電子の二準位間遷移が電気双極子禁制なら、それを光の媒介で実現させることは不可能。

$\stackrel{cf}{\iff}$ 現象 7：基底状態・励起状態間遷移は電気双極子禁制でも OK。

▼ *III* 及び *IV* は、**consistency conditions** *I* & *II* の spectral version に他ならない！

V シリコン結晶は発光しない。

$\stackrel{cf}{\iff}$ 現象 15：アニールされた Si 結晶は間接遷移型半導体でありながら、高い光パワーを放出するデバイスとなる。

4 ドレスト光子凝縮の非線型性・不均質性

上記 I – IV とは対照的に、ドレスト光子凝縮状態の生成とその局在には、非線型性・不均質性・特異性が本質的・内在的に関与している！

[現象 1 & 11]: ドレスト光子凝縮状態は、ナノ物質の境界面、物質表面、物質内の異質物、不純物原子などの特異点に生成してそこに局在する。

この空間的局在性とは dual な関係で、必要エネルギー & 状態遷移への制約は緩い！

[現象 6]: 生成に必要な光エネルギーは電子励起エネルギー以下で OK。

[現象 7]: 基底状態・励起状態間遷移は電気双極子禁制でも OK。

5 ドレスト光子の理論的定式化には何が本質的か？

ドレスト光子現象の理論的整合的理解のために crucial な核心的問題は、通常の量子電気力学で「非物理的粒子」として消去された「縦波モード」が、spacelike な運動量 support を持ち非自明な機能を担う量子場として存在する状況をどう理解するか？に掛かっている。とりあえずの key concepts は、

非物理的粒子 / spacelike な運動量 support / 量子場とその凝縮状態という 3 語に集約されるが、まずその意味を考えたい：

1) 「非物理的粒子」という問題の本質は、「縦波光子モード」が量子場理論の文脈では不定計量を担う量子場として、「負の確率」という形で確率解釈に困難を来す恐れあり！ということ。

2) Spacelike な運動量 support: 量子場に伴う「粒子モード」に関する常識に従えば、timelike な運動量 support を持つモードこそが物理的に意味のある「粒子」概念に対応し、もし spacelike な運動量を持つ対象が「自由粒子」として出現すれば、それは「超光速粒子 tachyon」となるため、そうした概念は非現実的だとの即断に走ってしまう！

6 ドレスト光子における spacelike 運動量の凝縮

3) ところが、上記2つの概念が交叉する位置に立つ「ドレスト光子」の場合、「粒子状態」ではなく「凝縮状態」という形で現れるため、上のような「常識的」解釈では全く不十分であり、「ドレスト光子」の関与する現象で活躍する「量子場」概念の適切な理解が不可欠の前提となる。

その事情を整合的に理解するためには、「通常の」物理的文脈での量子場理解が「on-shell 粒子像」に偏り過ぎていることを考慮して、ドレスト光子現象のメカニズムを明らかにすると同時に、それを踏まえて《off-shell 量子場と相互作用との必然的つながり》を正しく理解し、理論に取り込むことが決定的に重要となる。つまり、従来の量子場理論の枠内で取り込み可能なドレスト光子現象は適切な再解釈と再定式化を施ししつつ、それで納まらない場合には、「on-shell 描像」への偏り過ぎを是正すべき方向で量子場理論の枠を修正することを目指すということが必要となる。実はそれこそが、《spacelike な運動量 support を持つ「凝縮状態」としてのドレスト光子》の理論的定式化において不可欠のカギとなることを、以下で見ることにしたい。

7 On-shell= 粒子 vs. off-shell= 相互作用

まず、量子場概念の数学的一般的理解の視点で、「通常の」物理的文脈における量子場の扱いを見直すならば、そこでの問題構成は、

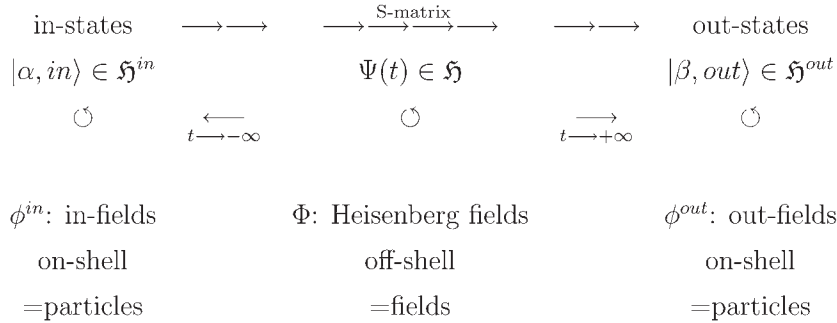
《「無限の過去」に in-field ϕ^{in} の入射粒子で近似された始状態 in-state $\Psi(t = -\infty) \sim |\alpha, in\rangle = (\phi^{in})_{\alpha_1}^* \cdots (\phi^{in})_{\alpha_m}^* |0\rangle$ が

量子場間相互作用によってどう変換され、

「無限の未来」に out-field ϕ^{out} の散乱粒子で近似された終状態 out-state $\Psi(t = +\infty) \sim |\beta, out\rangle = (\phi^{out})_{\beta_1}^* \cdots (\phi^{out})_{\beta_n}^* |0\rangle$ に落ち着くか？》

という形で定式化された LSZ(=Lehmann-Symanzik-Zimmermann) 的な

散乱過程 [5] だけを専ら視野に納め、それを洗練することのみ集中する：



8 量子場の相互作用を S 行列に還元してしまう “particle physics”

加えて，“interpolating Heisenberg 場” が支配する中間領域 = [相互作用の場] は視野の外に置かれ、理論の考察対象は in & out 漸近領域のみ！即ち，“particle physics” = [in & out の on-shell 漸近粒子間の関係だけで記述された物理] に帰着する。

ところが公理的量子場理論の文脈だと、そうした設定で「無限の過去・未来」で時間的運動量 support を持つ漸近場 $\phi^{in/out}$ の粒子描像で量子場を近似できる標準状況ですら、入射始状態を散乱終状態へ非自明に変換する量子場間相互作用を Heisenberg 量子場で記述するためには、どんな量子場であれ不可避免的に spacelike な運動量 support の存在が数学的一般的に要求される [6] のである！摂動展開だけに頼って量子場の相互作用を追跡する「通常の」物理的文脈では、結局のところ on-shell particles しか視野にないため、数理物理学では周知の本質的に重要なこの帰結が全く顧慮されない・意識されない、という驚くべき状況が背景にある！

9 Off-shell 量子場と相互作用との必然的繋がり

《「量子場」概念の適切な理解が不可欠》という 3) の主張の根拠はこうした状況認識に由来すると共に、ドレスト光子の関与する現象では、相互作用する量子場に遍く付随した “spacelike な運動量 support” の存在とその意味が、抽象的数学的文脈から物理的現実的状况に引き摺り出された初めてケースだということが注目に値する。

10 量子場の「表示」と相互作用項との関係

通常の量子論では、Schrödinger 表示 Φ_S , 相互作用表示 Φ_I , Heisenberg 表示 Φ_H の 3 つの表示があつて、それら相互の関係が、時間推進の生成演算子 (= Hamiltonian) H を自由場部分 H_0 と相互作用部分 H_1 に分けた時、

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1, \\ \Phi_I(t, \mathbf{x}) &= \exp(iH_0t)\Phi_S(\mathbf{x})\exp(-iH_0t), \\ \Phi_H(t, \mathbf{x}) &= \exp(iHt)\Phi_S(\mathbf{x})\exp(-iHt) \\ &= \exp(iHt)\exp(-iH_0t)\Phi_I(t, \mathbf{x})\exp(iH_0t)\exp(-iHt) \\ &= U(t)\Phi_I(t, \mathbf{x})U(t)^*, \end{aligned}$$

という形になるというのが標準的な説明である。ただし、

$$\begin{aligned} U(t) &:= \exp(iHt)\exp(-iH_0t) \\ &= T\left(\exp\left[i\int_{-\infty}^t \exp(iH_0s)H_1\exp(-iH_0s)ds\right]\right). \end{aligned}$$

11 漸近場 vs 相互作用表示

この「標準的説明」に対して、先の議論での Heisenberg 場 Φ , in- & out-fields $\phi^{in/out}$, 運動量 support の間の相互関係はどうなるのか? 実は両

者の考え方には大きな違いがあり、後者では、抽象的な動力学が先に自己同型写像で与えられ： $(t, \mathbf{x}) \xrightarrow{\alpha} \alpha_{(t, \mathbf{x})}(\Phi) = \Phi(t, \mathbf{x}) = \Phi_H(t, \mathbf{x})$, Heisenberg 場 Φ が Hilbert 空間で表現 π された後に、それから事後的に定まるユニタリー表現 $U(t, \mathbf{x}) = \exp(iHt - i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x})$ の生成子として Hamiltonian H と運動量 \mathbf{P} を扱う：

$$\begin{aligned} \pi(\alpha_{(t, \mathbf{x})}(\Phi)) &= \exp(iHt - i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x})\pi(\Phi)\exp(-iHt + i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}) \\ &= Ad_{\exp(iHt - i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x})}(\pi(\Phi)). \end{aligned}$$

それゆえ、自由場項 H_0 と相互作用項 H_1 への Hamiltonian H の分解： $H = H_0 + H_1$ が a priori に定まっているわけではない。平坦時空での真空表現でなければ、 $\phi^{in} = \phi^{out} = \Phi_I$ に導く相互作用表示 Φ_I が自立する内在的保証はなく、運動量 support も Heisenberg 場 Φ の Hilbert 空間での表現 π に応じてその都度変わるべき概念である。こういう理由で、3 表示 Φ_S, Φ_I, Φ_H に対する「標準的説明」は平坦時空での真空表現でのみ可能な特殊状況で、ドレスト光子現象の記述には適合しない。

12 オフシェル科学とは？(1)

ドレスト光子が引き起こす多様な現象の解析を通じて明らかにされてきたその本質的特徴の一つは、

$$p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 < 0$$

によって特徴づけられた spacelike な運動量を担う off-shell photon の関与する量子電磁現象というところにある。量子場概念で記述される物理現象を扱うと称しながら、実際には on-shell 条件 (=質量殻条件) $p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 > 0$ を満たす粒子モードに専ら議論を焦点化してしまう「通常の物理学」に対して、この off-shell photon の関与する状況は全く異なる視点を要求する。粒子モードしか考えない「通常の物理学」の枠内で spacelike な運動量 $p^2 < 0$ を担う粒子モードを考えれば、それはた

ちまち因果律を破る tachyon (= 光速を越えて走る粒子) となり、現実の物理現象を記述する語彙を供給することはできない。

こういう tachyon のような古典的自由粒子の形を取りえないがゆえに、位置と運動量の量子論的不確定性関係によって統制され、そのお蔭で現象 I でのドレスト光子場の局在性が保たれ得ることになる！

13 オフシェル科学とは？(2)

量子場理論 (QFT) の歴史を振り返るなら、実はこのような偏った見方ばかりで成立っていたわけではなく、

Haag: Algebraic QFT (: Algebra + States) [7];

Wightman : QFT in terms of Wightman functions

= correlation functions of Wightman fields [8];

LSZ formalism based on LSZ reduction formulae [5]

という3つの主要な流れがあったのだが、LSZ formalism から導かれる「粒子像」が、素粒子物理学とのつながりの中で一方的に膨張し、その偏った形で QFT がマイクロ物理学に持ち込まれることによって、上のような一面化が進行してしまったということである。

ここで、空間座標 \mathbf{x} は spacelike な運動量 \mathbf{p} と dual であり、spacelike な運動量が超光速を記述するのに対して、空間座標 \mathbf{x} は逆の描像を持つことに注意！

重要なことは、「粒子モード」の形で現象に関与するのではなく、spacelike な運動量を持つ off-shell photons が形成する「凝縮モード」にこそドレスト光子の本質がある。このような現象を系統的組織的に扱うために新たな科学の文脈を切り開くこと、それが「オフシェル科学の始まり」という言葉の含意である。

14 対称性の破れ, 対称空間と保型形式

「通常の物理学」 = on-shell physics とのこうした本質的違いのゆえに, ドレスト光子現象を理論的立場から整合的に記述するためには, 現象記述に必要な種々の概念装置を十分な吟味なく安直に用いることは可能な限り回避しなければならない。ここでは, ドレスト光子が絡む諸現象におけるもう一つの重要な側面として「対称性の破れ」に注目し, それを自然な形で取り込むため, 保型形式概念 [9] の導入可能性を吟味する:

群 G で記述される系の対称性が破れて, その部分群 H が破れずに残ったとき, 物理系の状態空間上で対称性の破れを一般的に定式化すると, 等質空間 $G/H := M$ は関係式 $[m, m] \subset \mathfrak{h}$ を満たし, 対称空間 [10] であることが確認できる [11]。ただし, $\mathfrak{m}, \mathfrak{h}$ はそれぞれ, Lie 環レベルで M, H に対応する無限小生成子。

実は率直な話, 《現象記述に必要な種々の概念装置を十分な吟味なく安直に用いることは可能な限り回避しなければならない》と上に書いたのは, 深い自省を籠めてのこと!: [対称空間 M への G -作用が 1 次分数変換

$$gz = (az + b)/(cz + d) \quad \text{for} \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, z \in M$$

で記述され, 保型形式 ϕ が $\phi(gz) = \sigma(cz + d)^{-1} \phi((az + b)/(cz + d))$ で特徴づけられる] という記述は数論でよく目にし, また相対論的物理学の文脈なら共形変換群などで類似の状況に絶えず出会う。

ところが, 物理での一般的な対称性の破れに現れる非線型な対称空間 G/H への非線型な G -作用 γ s.t.

$$G \ni g \mapsto \gamma_g := [G/H \ni g_1 H \mapsto \gamma_g(g_1 H) := gg_1 H \in G/H]$$

が, いつ 1 次分数変換 $G \ni g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (az + b)/(cz + d)$ with $z = g_1 H \in G/H$ に帰着されるのか? どんな条件が成り立てば, ドレスト光子現象のように非線型不均質な基底状態が絡む場合にも OK か?

現象 1, 11, 6, 7 とオンシエル科学での I, II, III, IV との対比は、ドレスト光子現象のオフシエルの本質を否定的双対的な形で明らかにした。同様の対比を現象 2,9,5,3,10,8,4 (および 12–16) にも見出せば、オンシエル科学との対比という否定的特徴づけを肯定的表現に移し替えた暁、ドレスト光子現象の理論化が実現するという事だろうか？

15 対称性の破れ, グラスマン多様体と旗多様体

この文脈でモース理論的側面の理解を、特にグラスマン多様体 [10] と旗多様体 [10] との関連で深めることは、保型形式の一般的考察の目的だけでなく、ドレスト光子論を深めるためにも、有益と思われる。ここでは、《Family of Grassmann manifolds $GM(V_1, V_2)$ 》 \leftrightarrow 《Family of Flag manifolds $Flg(V_1, V_2, \dots, V_k)$ 》という「可解方程式系」の普遍系列が、「対称性の破れ」の普遍的な model として浮かび上がる。ここで、Grassmann manifold = グラスマン多様体は

$$GM(V_1, V_2) := U(V_1 \oplus V_2)/[U(V_1) \times U(V_2)],$$

Flag manifold = 旗多様体は

$$\begin{aligned} Flg(V_1, V_2, \dots, V_k) \\ = U(V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k)/[U(V_1) \times U(V_2) \times \dots \times U(V_k)] \end{aligned}$$

によって定義され、一見して旗多様体の方がグラスマン多様体よりも一般性が高いことは明らか。

しかるに,

$$\begin{aligned}
& Flg(V_1, V_2, \dots, V_k) \\
&= U(V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k) / [U(V_1) \times U(V_2) \times \dots \times U(V_k)] \\
&= [U(V_1 \oplus V_2) / U(V_1) \times U(V_2)] \\
&\times [U((V_1 \oplus V_2) \oplus V_3 \oplus \dots \oplus V_k) / U(V_1 \oplus V_2) \times U(V_3) \times \dots \times U(V_k)] \\
&= GM(V_1, V_2) \times Flg(V_1 \oplus V_2, V_3, \dots, V_k) \\
&= GM(V_1, V_2) \times GM(V_1 \oplus V_2, V_3) \times GM(V_1 \oplus V_2 \oplus V_3, V_4, \dots, V_k) \\
&\times \dots \times GM(V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_{k-1}, V_k)
\end{aligned}$$

という関係式が成り立つので、より一般性の高い旗多様体も詰まるところ、グラスマン多様体の積に分解される。この意味で、グラスマン多様体 $GM(V_1, V_2)$ は、理論に備わる対称性とその破れに関する全ての重要な情報を担う概念に他ならないだろう。

15.1 富田・竹崎理論とグラスマン多様体の非可換拡張

この方向への一つの準備的考察として、統計力学の作用素環的定式化に現れる富田・竹崎理論による熱平衡状態の扱い [12] を振り返って見よう。真空状態を基礎に展開される真空場の量子論が、或る意味での「一体問題」だとすれば、富田・竹崎理論による熱平衡状態の扱いは、非可換環を基礎に展開された「グラスマン多様体的な二体問題」だと見ることができると言える。

ここでの熱平衡状態の記述から従う理論の数学的構造を一言で言い表せば、熱平衡状態に置かれた対象系の物理量を記述する von Neumann 環 \mathcal{M} とその可換子環 \mathcal{M}' とが、modular conjugation と呼ばれる或る種の複素共役反転作用素 J を介して、「反線型共役同型」

$$\mathcal{M} \ni A \mapsto JAJ \in \mathcal{M}' = J\mathcal{M}J$$

の関係で結ばれ、 \mathcal{M} と \mathcal{M}' を併せた全系の動力学は modular automorphism group $\sigma : \mathbb{R} \times (\mathcal{M} \vee \mathcal{M}') \rightarrow (\mathcal{M} \vee \mathcal{M}')$ の作用によって、

$\sigma_t(X) = \Delta^{it} X \Delta^{-it}$ s.t. $J\Delta J = \Delta^{-1}$ という形で記述される。 $J\Delta J = \Delta^{-1}$ という関係を形式的に書き表わすと

$$\Delta = \exp(H - JHJ)$$

という形で理解できるから、これは、「対象系」 \mathcal{M} と「熱浴」 $\mathcal{M}' = J\mathcal{M}J$ とが両者を反転させる作用素 J の働きを通して、反線型複素共役に結ばれている状況を記述していると見ることができる。この意味で対象系と熱浴とは dual の関係にあり、グラスマン多様体の非可換拡張版と見ることができよう。このような見方を採るならば、旗多様体の非可換拡張概念を非平衡定常状態に対応付けるのも自然な考え方であるに違いない。

16 ドレスト光子の「凝縮状態」

このような文脈でグラスマン多様体を「物理系化」して考える延長線上で、現象 2,9,4,8,5,3,10 の意味を改めて振り返ることで、ドレスト光子「凝縮状態」に潜む階層構造とグラスマン多様体・旗多様体の分解構造との平行性を見出すことはできないだろうか？

[現象 2 & 9]: ドレスト光子は近接ナノ物質間を双方向かつ自律的に移動,

[現象 4]: ドレスト光子場は測定用プローブ挿入で大きく乱される,

[現象 8]: 測定寸法最大値は 50 ~ 70 nm,

[現象 5]: 移動にはドレスト光子凝縮の非線型性から来る階層的特徴あり,

[現象 3]: 移動効率は fiber probe 先端とナノ物質が同じサイズで最大,

[現象 10]: エネルギー移動は量子 walk 過程か？

17 ドレスト光子「凝縮状態」の近似的単位？

上記の内容を力学系理論や量子場理論の概念構成に従って解釈すると、ドレスト光子の凝縮状態は 50 ~ 70 nm の大きさを単位とする「塊り」か

ら成り [現象 8], それをより細かく分割することには抵抗するという意味で或る種の「既約性」 [現象 4] を持つ。この「塊り」は階層的特徴を持ち [現象 5], 近接ナノ物質間を双方向かつ自律的に移動することができ [現象 2 & 9], fiber probe 先端とナノ物質が同じサイズのとき移動効率は最大となる [現象 3]。そして, この移動過程は random walk より急激な量子 walk で記述される可能性が大きい [現象 10]。

そこで, 普遍グラスマン多様体を用いてソリトン方程式系を解く佐藤理論を参考にしつつ, この移動過程を記述する量子確率過程としての量子 walk を, 逆正弦則分布を或る種の「単位」として分解することが良い近似的記述を与えると想定すると, random walk の時の正規分布の特徴: 中心集中と広い裾野とはちょうど対照的に, 裾野に大きい存在確率を持つ近似的単位がドレスト光子の「凝縮単位」として機能して, その数学的記述が flag 構造で与えられるという可能性はないだろうか?

18 旗多様体の「生成汎函数」: 合成と分解

そのために, グラスマン多様体の定義 $GM(V_1, V_2) := U(V_1 \oplus V_2) / (U(V_1) \times U(V_2))$ において「引数」 (V_1, V_2) を $U(V_1) & U(V_2)$ に対応させ, それを相関函数の「外線」と見ることにすれば, 「引数」 (V_1, V_2) の各々は, ドレスト光子が双方向かつ自律的に移動できる部分空間と解釈することができるだろう (: 現象 2 & 9)。このような解釈を採用すれば, 「ドレスト光子場は測定用プローブ挿入で大きく乱される」 (: 現象 4) のは, グラスマン多様体 $GM(V_1, V_2) := U(V_1 \oplus V_2) / (U(V_1) \times U(V_2))$ の一方の引数だけを別個に抽出することで V_1 と V_2 との相関を破壊することに対応すると解釈されるだろう。このような見方を展開すれば, 「ドレスト光子凝縮の非線型性から来る階層的特徴」 (: 現象 5) はグラスマン多様体の非線型性として理解され, 「測定寸法最大値」の存在 (: 現象 8) はグラスマン多様体の共形不変性からの反転操作によって理解されると期待できる。

この考え方を一般化して, 任意個数の引数 (V_1, V_2, \dots, V_n) を持つ旗多

様体 $Flg(V_1, V_2, \dots, V_n)$ とその「引数」 (V_1, V_2, \dots, V_n) との関係、相関関数の「母関数」とその「引数」との関係と parallel に想定すると同時に、その「引数」 (V_1, V_2, \dots, V_n) には後述のモース理論に現れる不定内積を伴う states ϕ with signatures を随伴させることにする。このように考えれば、probe を挿入して定めた《ドレスト光子が双方向かつ自律的に移動できる部分空間》の family から旗多様体の「母関数」を再構成することによって、元々実現していたドレスト光子の「凝縮状態」を（恐らくは保型形式の形で）推測することも可能となるだろう。

ひょっとして、線型空間 V を引数とした微分積分の概念には抵抗があるかも知れないが、これは「函数による微積分」＝汎函数微積分の特殊化・線型化に過ぎないことに注意したい。特に、一般の場合の汎函数積分＝径路積分の基礎付けを試みようとするならば、線型空間を引数とする積分概念の考察はそのために有効な予備的考察の舞台を与えてくれるのではないだろうか？

とすれば最後に残るのは、Si 結晶に関わる現象 12 – 16 に加えて、「移動効率は fiber probe 先端とナノ物質が同じサイズで最大」（：現象 3）に対する合理的解釈を与える問題に帰着されると考えられる。富田竹崎理論での対象系と熱浴との間の共役同型性が熱平衡性と深いつながりを持つことを考慮すると、この後の方の問題にも自然な答えが期待されるだろう。

18.1 鞍部点不安定性とモース函数, グラスマン多様体

上のシナリオが正しいとすれば、次に問題となるのはこの文脈でのドレスト光子現象記述に現われる具体的な現象の中味とその数学的物理解釈である。典型的特徴的現象として現れるのはドレスト光子凝縮によって加速される反応の急速な進行であり、それは数学的には鞍部点不安定性 (saddle point instability) に対応する：ここで重要なのは、対称性の破れに由来する上記対称空間 $M = G/H$ を「分類空間」として位置付けるホモトピー理論 [13] とモース理論 [14] と呼ばれる数学理論の視点で、

鞍部点不安定性はモース函数と呼ばれる M 上の函数で記述される。モース函数とは、分岐点 $\partial f = 0$ での 2 階微分が定める Hessian $\partial\partial f$ が非退化な M 上の滑らかな函数で、Hessian の負の固有値から M のコホモロジーが定まるので、その次元を "モース指数" と呼ぶ。

鞍部点の不安定性は、Hessian の固有値が正負両方の符号を持つ分岐点で実現され、正固有値が安定振動の方向、負固有値が不安定散逸の方向に対応する。正固有値の安定方向は中心集中型の正規分布、負固有値の不安定方向は逆正弦則のような周辺分布を持つ熱浴に対応し、この正負固有値の相互関係がグラスマン多様体を構成する 2 つの部分空間の双対性を規定する。

19 ホモトピー & モース理論

こうした状況の記述にはホモトピー理論とモース理論が適するが、あいにく数学でのホモトピー理論・モース理論の内容の殆ど全ては、対称空間 M がコンパクトな場合に限定され、例えば、上記の非自明な "モース指数" を持つ点での M の特異性構造は、鞍部点不安定性としてではなく、「ハンドル体」のループの穴として理解されている。

これを鞍部点不安定性と整合させるためには、不安定散逸が許容されるよう、閉じた「ループを開いて」理論全体を非コンパクトな状況に拡張することが必要である。そうした理論の拡張を通じて、先に導入しようとした保型形式との理論的整合性も保証され、それによって、ドレスト光子現象を記述する数学的概念装置が整うと同時に、数論的・ホモトピー理論的な文脈においてその記述内容を整合的に解釈することが可能となるのではないか？

20 ホモトピー&モース理論の非コンパクト拡張

それを具体化・数量化するのには、鞍部点不安定性に伴って析出する対称空間 M のコホモロジー $H^*(M)$ であるが、 M に $H^*(M)$ を対応させる関手 H^* は *Brown* 関手と呼ばれるホモトピー不変性を備えているお蔭で、

$$H^*(M) = [B \rightarrow M],$$

分類空間 B から多様体 M への関数のホモトピー集合という表示 [13] を持ち、ホモトピー変換を局所ゲージ変換の特殊化と見なせば、ちょうど、ゲージ不変量の計算に対応する。特に、分類空間 B がグラスマン多様体や旗多様体のような対称空間の典型例で実現される場合には、Schubert calculus という形でコホモロジーの具体的計算法も最近大きな進歩を遂げており [10]、このような手法を有効に活用することによって、ドレスト光子現象の実験的理論的解析は今後大きく進むことが期待される。

謝辞

昨年企画された第1回目の「ドレスト光子に関する基礎的数理研究」に引き続いて、その第2回目の企画を可能にして下さった九州大学 IMI のメンバーと秘書の方々、特に、福本康秀先生、落合啓之先生、古谷智恵美様、には心より感謝申し上げます。そして、last but not least、ドレスト光子という非常に豊かな内容を持った物理学・工学の一大領域に筆者をいざなって下さった大津元一先生、この研究会の企画運営に大きく貢献して下さいました佐久間弘文さん、ドレスト光子研究に寄与して下さいました方々全てに深い感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] 大津元一、「ドレスト光子」(朝倉書店、東京 2013);
Ohtsu M., Dressed Photons, (Springer, Heidelberg, 2013).

- [2] Sakuma, H., Ojima, I. and Ohtsu, M., Dressed photons from the viewpoint of photon localization: the entrance to the off-shell science, *Appl. Phys.* A123, 724 (2017);
 Sakuma, H., Ojima, I. and Ohtsu, M., Dressed photons in a new paradigm of off-shell quantum fields, *Progress in Quantum Electronics* 55, 74-87 (2017).
- [3] 大津元一, ドレスト光子の実験研究の最新状況とオフシェル科学への期待 (当研究会:九州大学 IMI 共同利用・研究集会 (II) ドレスト光子に関する基礎的数理解研究, への報告).
- [4] 小嶋 泉, 量子場とマイクロ-マクロ双対性, 丸善出版, 2014 ;
 小嶋 泉, 岡村和弥, 無限量子系の物理と数理, SGC98, サイエンス社, 2014;
 Ojima, I., A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria —Order parameters of symmetries and of thermal situations and physical meanings of classifying categorical adjunctions—, *Open Systems and Information Dynamics* 10, 235-279 (2003);
 Ojima, I., Micro-macro duality in quantum physics, pp.143–161, *Proc. Intern. Conf. “Stochastic Analysis: Classical and Quantum”*, World Scientific, 2005;
 Ojima, I., Micro-Macro duality and emergence of macroscopic levels, *Quantum Probability and White Noise Analysis*, **21**, 217 - 228 (2008);
 Ojima, I., Meaning of non-extensive entropies in Micro-Macro Duality, *J. Phys.: Conf. Ser.* 201 012017 (2010).
- [5] Lehmann, H., Symanzik, K. and Zimmermann, W., Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien, *Nuovo Cim.* **1**, 425 (1955).
- [6] Dell’Antonio, G.F., Support of a field in p space, *J. Math. Phys.* **2**, 759 - 766 (1961);

- Robinson, D.W., Support of a field in momentum space, *Helvetica Physica Acta* **35**, 403 - 413 (1962);
- Greenberg, O.W., Heisenberg fields which vanish on domains of momentum space, *J. Math. Phys.* **3**, 859 - 866 (1962).
- [7] Haag, R., *Local Quantum Physics* (2nd. ed.), Springer-Verlag (1996);
- Doplicher, S., Haag, R. and Roberts, J.E., Fields, observables and gauge transformations I & II, *Comm. Math. Phys.* **13**, 1-23 (1969); **15**, 173-200 (1969);
- Doplicher, S. and Roberts, J.E., Endomorphism of C*-algebras, cross products and duality for compact groups, *Ann. Math.* **130**, 75-119 (1989);
- Doplicher, S. and Roberts, J.E., A new duality theory for compact groups, *Inventiones Math.* **98**, 157-218 (1989);
- Doplicher, S. and Roberts, J.E., Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, *Comm. Math. Phys.* **131**, 51-107 (1990).
- [8] Wightman, A.S., Quantum field theory in terms of vacuum expectation values, *Phys. Rev.* **101**, 860-866 (1956);
- Streater, R.F. & Wightman, A.S., *PCT, Spin and Statistics and All That*, Benjamin (1964).
- [9] 吉田敬之, 保型形式論 -現代整数論講義-, 朝倉書店. 2015.
- [10] 前野俊昭, Schubert 多項式とその仲間たち 数学書房, 2016;
- 池田 岳, 数え上げ幾何学講義 -シューベルト・カルキュラス入門-, 東京大学出版会, 2018.
- [11] Ojima, I., Micro-Macro Duality and Space-Time Emergence, *Proc. Intern. Conf. "Advances in Quantum Theory"*, 197 - 206 (2011);
- Ojima, I., Space(-Time) Emergence as Symmetry Breaking Ef-

- fect, Quantum Bio-Informatics IV, 279 - 289 (2011). (arXiv:math-ph/1102.0838 (2011));
- Ojima, I., Control over inclusion relations via Induction & Imprimitivity, pp.107—115 in Prog. In Nanophotonics 5, T. Yatsui (ed.), 2018, Springer.
- [12] Bratteli, O. & Robinson, D.W., Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, Vols.1 & 2, Springer-Verlag (1979, 1981); Takesaki, M.: Theory of Operator Algebras, Vol. II Springer-Verlag (2003).
- [13] 西田吾郎, ホモトピー理論, 共立出版, 1985.
- [14] ミルナー, モース理論, 吉岡書店, 1968; .松本幸夫, Morse 理論の基礎, 岩波書店, 2005.

クレブシュ双対場の量子化に関わる問題とドレスト
光子の量子的表現について
(On the quantization of Clebsch dual field and quantum
representation of dressed photon)

佐久間弘文；(一社) ドレスト光子研究起点

Hirofumi Sakuma; Research Origin for Dressed Photon

概要 / Abstract

量子場の相互作用を、運動量空間という切り口から眺めた場合、空間的運動量の関与も必須であるという数学的帰結がある。その事実を、「ドレスト光子の生成を説明する」という挑戦にどう具体的に反映するのかという問題意識から導入された数理的概念がクレブシュ双対場である。ここでは、それに関する研究の進展を review の形で行うと同時に、最近始めた量子化の試みとそれに関連した興味深い研究テーマについてその概要説明を行う。

There exists a firmly-established mathematical consequence that quantum field interactions in terms of a 4-momentum viewpoint cannot be described without the contribution from spacelike components. In order to implement that consequence to our challenging attempt of understanding the generating mechanism of dressed photon, we have introduced a new notion of Clebsch-dual electromagnetic wave field. A brief review of the new notion including recent attempt of its quantization is given here together with an intriguing research theme beyond nanophotonics.

何を目指すのか？

- オフシェル科学

On-shell (可視) — Off-shell (非可視)

電磁気学では

可視的なセクター：光子(横波)

非可視的なセクター：仮想光子
(含む縦波クーロンモード)

何を目指すのか？

- 必要とされる新たな基礎理論の概要

Unitary 同値な単一セクターのみの

有限自由度系の量子力学



Unitary 非同値な複数セクターから成る

無限自由度系の量子場理論

可視 & 非可視セクターから創発するミクロ・マクロ双対性の存在を記述するのが小嶋の理論。電磁場に対するその具体化に必要な古典的表現がクレブシュ双対場。

研究の経緯 (1): Maxwell の方程式の見直し

- 慣例に従い、まず、場の強さとしての電場と磁場を

$$(E^1, E^2, E^3) \text{ と } (H^1, H^2, H^3)$$

で表す。以下、真空中の場を考えると、電束密度 \vec{D} と磁束密度 \vec{B} は、それぞれ $\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E}$ 、 $\vec{B} \equiv \mu_0 \vec{H}$ で与えられる。ここに、 c を光速とすると $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ が成立する。

- ベクトルポテンシャルの定義

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \partial \vec{A} / \partial t \quad (1)$$

研究の経緯 (2): Maxwell の方程式の見直し

- 電磁場 $f^{\mu\nu}$ の 4 次元 (x^0, x^1, x^2, x^3) 表示

$$f^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1/c & E^2/c & E^3/c \\ -E^1/c & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2/c & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3/c & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

- Maxwell の式 ($f^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ として)

$$\partial_\nu f^{\mu\nu} = -\partial^\nu \partial_\nu A^\mu + \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = \mu_0 j^\mu. \quad (3)$$

研究の経緯 (3):

エネルギー運動量テンソル: T_{μ}^{ν}

- Signature $(+1, -1, -1, -1)$ に対するエネルギー運動量テンソル T_{μ}^{ν} の表現。 $F_{\mu\nu} \equiv f_{\mu\nu}/\sqrt{\mu_0}$ と定義すれば、

$$T_{\mu}^{\nu} = -F_{\mu\sigma}F^{\nu\sigma} + \frac{1}{4}g_{\mu}^{\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \quad (4)$$

- T_{μ}^{ν} の発散: ($A^{\mu}/\sqrt{\mu_0}$ を新たに A^{μ} と見做す)

$$\begin{aligned} \partial_{\nu} T_{\mu}^{\nu} &= F_{\mu\nu} \partial_{\sigma} F^{\nu\sigma} \\ &= F_{\mu\nu} (-\partial^{\sigma} \partial_{\sigma} A^{\nu} + \partial^{\nu} (\partial_{\sigma} A^{\sigma})) = \sqrt{\mu_0} F_{\mu\nu} j^{\nu}. \end{aligned} \quad (5)$$

研究の経緯 (4):

エネルギー運動量テンソル: T_{μ}^{ν}

- 「通常」の解釈: 4元電流 j^{ν} が存在しなければ、 $\partial_{\nu} T_{\mu}^{\nu} = 0$ 。
- やや広い可能性を模索する: (j^{ν} でなく A^{ν} で考える。) 例えば、 $\partial^{\sigma} \partial_{\sigma} A^{\nu} = 0$ で且つベクトル $\partial^{\nu} (\partial_{\sigma} A^{\sigma})$ が $F_{\mu\nu}$ に直交すればよい。ここで、まず **ゲージ不変** という事を満たす場合を考えれば、それは物理的には4元電流の保存なので $\partial_{\nu} j^{\nu} = 0 \rightarrow \square(\partial_{\sigma} A^{\sigma}) = 0$ 。すなわち、スカラー $\phi \equiv \partial_{\sigma} A^{\sigma}$ が $F_{\mu\nu}$ に直交する方向 (縦波方向) に波動伝搬すればよい。

研究の経緯（5）：

ゲージ不変性を満たす縦波伝搬

- この条件は、 $\partial^\sigma \partial_\sigma A^\nu = 0$ と両立するか？
 A^ν の Helmholtz 分解とゲージ変換について（光の横波は α^ν に対応）

$$A^\nu = \alpha^\nu + \partial^\nu \chi,$$

$$\text{where } \partial_\nu \alpha^\nu = 0 : \underline{\phi = \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu \partial^\nu \chi}. \quad (6)$$

従って、 $\partial^\sigma \partial_\sigma A^\nu = 0$ は以下となる。

$$\partial^\sigma \partial_\sigma \alpha^\nu + \partial^\sigma \partial_\sigma (\partial^\nu \chi) = 0. \quad (7)$$

ここで、 $\alpha^\nu_{(h)}$ を斉次方程式の解、 $\alpha^\nu_{(i)}$ を非斉次方程式の解とすれば

研究の経緯（6）：

ゲージ不変性を満たす縦波伝搬

- 回転場と非回転場とのバランス解
 $\alpha^\nu_{(h)}$ と $\alpha^\nu_{(i)}$ は、それぞれ以下の方程式を満たす。

$$\partial^\sigma \partial_\sigma \alpha^\nu_{(h)} = 0, \quad \partial^\sigma \partial_\sigma \alpha^\nu_{(i)} + \partial^\nu \phi = 0. \quad (8)$$

すなわち、2番目の非斉次方程式においては、 ϕ を指定するば、 $\alpha^\nu_{(i)}$ が求まる。このバランスは、2次元流体における解析的な流れが満たす Cauchy-Riemann の式と同形。よって、波動方程式を満たしつつ、 $F_{\mu\nu}$ に直交する方向に伝搬するスカラー：
 $\phi = \partial_\nu A^\nu$ は $\partial^\sigma \partial_\sigma A^\nu = 0$ と整合的である。

研究の経緯（7）： ゲージ固定のラグランジアンについて

- 以下のラグランジアンを考える。（歴史的には Fermi が始めに導入した）

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{GF}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\nu A^\nu)^2. \quad (9)$$

簡単な変分計算より

$$(-\partial_\sigma F^{\nu\sigma} + \partial^\nu(\partial_\sigma A^\sigma))\delta A_\nu = 0. \quad (10)$$

を得る。この係数は、式（5）と同じである。（すなわち、エネルギー・運動量保存を満たす古典的な縦波解）

研究の経緯（8）： ゲージ固定のラグランジアンについて

- Nakanishi-Lautrup 形式との比較

この形式においては、以下に示す B に補助条件を課して、Lorentz 共変的な量子化を可能にしている。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{GF}} &= B\partial_\mu A^\mu + \alpha B^2/2, \\ \text{where } \partial_\mu A^\mu + \alpha B &= 0, \quad \partial^\tau \partial_\tau B = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

この式で $\alpha = 1$ （Feynman ゲージ）とすると（9）が得られる。

古典的記述としてのクレブシュ双対場（1）

- 素粒子の相互作用は、通常、散乱（S）行列で計算される。この操作は、symbolically に

$$S_{f,i} = \langle \Phi_f | \hat{U}(+\infty, -\infty) | \Phi_i \rangle \quad (12)$$

ここに、 $S_{f,i}$ は S 行列、 $\hat{S} = \hat{U}$ は S 演算子。

- Caveat! QED(Quantum Electrodynamics) において電磁相互作用を担う（ゲージボゾンの）力学モデルの構築にあたっての基礎知識：
（1）相互作用を担う Heisenberg 場は、自由場として設定される始状態および終状態とユニタリー変換で繋げない。

古典的記述としてのクレブシュ双対場（2）

- Caveat! QED(Quantum Electrodynamics) において電磁相互作用を担う（ゲージボゾンの）力学モデルの構築にあたっての基礎知識（続き）：
（2）相互作用を 4-momentum p^μ で表した場合、timelike and lightlike ($p_\nu p^\nu \geq 0$) 及び spacelike ($p_\nu p^\nu < 0$)、すなわち、すべての momentum support が必要という事が数学的に示される。この事は、あくまでも量子場として $p_\nu p^\nu < 0$ が必須という事であり、「超光速粒子タキオン」の存在を仮定する事ではない。

古典的記述としてのクレブシュ双対場（3）

- QEDにおいて相互作用を担うU(1)ゲージボソンは、S行列の摂動計算に現れる描像で、その特徴は、電磁場のローレンツ共変的な量子化で”非物理的”（時空の不定計量が起因となる負のノルムが現れる為）であるとして排除される縦（Coulomb）モードを含む事である。
- 前頁の相互作用に必要な空間的運動量 $p_\nu p^\nu < 0$ と U(1)ゲージボソンの描像に負のノルムとなる縦波が含まれるという事実に注目すれば、空間的運動量を担う電磁場で相互作用を表現するアプローチを見直す事は自然であると言える。

古典的記述としてのクレブシュ双対場（4）

- その様な見直しにおいて、量子場の運動量空間での記述は、古典論におけるスペクトルモデルと”同形”：場をフーリエ基底（基本モード）の完全系で表現（その振幅の増減は、生成消滅演算子に対応）この見方からすると、空間的運動量領域にも場を記述するための”基本モード”が存在し、それが摂動計算で主役を演じる仮想光子に対応するであろうと推測される。

古典的記述としてのクレブシュ双対場（5）

- 電荷保存（ゲージ不変）に対応する $\phi \equiv \partial_\nu A^\nu$ の振る舞いと、Clebsch 変数の導入。

以下に示す前述（スライド7）の(10)の第2式から、電荷保存： $\partial_\nu \partial_\tau F^{\tau\nu} = 0$ に対応して

$$\underline{-\partial_\tau F^{\nu\tau} + \partial^\nu(\partial_\tau A^\tau) = 0} \Rightarrow \partial^\nu \partial_\nu \phi = 0, \quad (13)$$

となり、これは ϕ が波動方程式を満たして、且つベクトル方程式 $\underline{F_{\mu\nu} \partial^\nu \phi = 0}$ も満たす事を示す。

古典的記述としてのクレブシュ双対場（6）

- 電荷保存（ゲージ不変）に対応する $\phi \equiv \partial_\nu A^\nu$ の振る舞いと、Clebsch 変数の導入（続き）。

この式は順圧流体の相対論的運動方程式： $\omega_{\mu\nu} v^\nu = 0$ （ v^ν は4元速度ベクトル、 $\omega_{\mu\nu}$ は相対論的渦度テンソル）と同形なので、順圧流体のHamiltonian構造で用いられる正準変数である一組のClebsch変数（ λ, ϕ ）で電磁ベクトルポテンシャル U_μ 、その回転で定義される電磁場 $S_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu$ を

$$U_\mu \equiv \lambda \partial_\mu \phi, \quad S_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu. \quad (14)$$

と定義する。（これは、ベクトルポテンシャルがPoyntingベクトルに平行な場合となる）

古典的記述としてのクレブシュ双対場 (7)

- λ と ϕ が満たす方程式

式(13)より ϕ は massless の波動方程式を満たすとした。この段階では天下りの的ではあるが、 λ を以下のように導入する。

$$\partial^\tau \partial_\tau \lambda - (\kappa_0)^2 \lambda = 0, \quad \partial^\tau \partial_\tau \phi = 0. \quad (15)$$

更には、 $C_\mu \equiv \partial_\mu \phi \Rightarrow (C^\tau C_\tau = 0)$, $L_\nu \equiv \partial_\nu \lambda$ で定義される二つのベクトルは、以下の直交条件を満たすものと仮定する。

$$C^\tau L_\tau = 0. \quad (16)$$

古典的記述としてのクレブシュ双対場 (8)

- λ と ϕ が満たす方程式 (続き)

Lightlike なベクトルと直交するベクトルは、それ自身か又は、spacelike なベクトルであるので、(16) は (15) の第一式 と整合的。

- Lightlike なクレブシュ双対場の電磁ポテンシャル U_μ 及び電磁場 $S_{\mu\nu}$

$$U_\mu = \lambda C_\mu, \quad S_{\mu\nu} = \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu = L_\mu C_\nu - C_\mu L_\nu. \quad (17)$$

古典的記述としてのクレブシュ双対場 (9)

- 電磁ベクトルポテンシャル U_μ はヌル測地線に平行なベクトル

$$U^\tau \partial_\tau U_\mu = 0. \quad (18)$$

- エネルギー運動量テンソル (通常場 T_μ^ν とクレブシュ場 \hat{T}_μ^ν との比較)

$$T_\mu^\nu = -F_{\mu\sigma} F^{\nu\sigma} \quad (\partial_\nu T_\mu^\nu = 0). \quad (19)$$

$$\hat{T}_\mu^\nu = -S_{\mu\sigma} S^{\nu\sigma} = \rho C_\mu C^\nu \quad (\partial_\nu \hat{T}_\mu^\nu = 0), \quad \rho \equiv -L_\tau L^\tau. \quad (20)$$

古典的記述としてのクレブシュ双対場 (10)

- 縦波モードと空間的運動量

上式 (20) は、スライド 14 で述べた「相互作用の記述には空間的運動量 ($p^2 < 0$) の関与が必須」という事と整合的で、(20) は QED の摂動計算に現れる「横波」($S_{\mu\nu}$) と「縦波」(ρC_μ) の双方を含んだ massless の $U(1)$ ゲージボゾンの古典的なモデルと見做せる。

- 双対場の意味 (Clebsch Eq. vs. Proca Eq.)

$$\partial^\sigma \partial_\sigma U^\nu - (\kappa_0)^2 U^\nu = 0 \iff \partial^\sigma \partial_\sigma A^\nu + m^2 A^\nu = 0. \quad (21)$$

古典的記述としてのクレブシュ双対場 (1 1)

- Lightlike ($U_\sigma U^\sigma = 0$) から Spacelike ($U_\sigma U^\sigma < 0$) への拡張 (ゲージ及び共形不変の破れ)

$$U_\mu = \frac{1}{2}(\lambda C_\mu - \phi L_\mu), \quad \partial^\tau \partial_\tau \lambda - (\kappa_0)^2 \lambda = 0, \quad (22)$$

$$\partial^\tau \partial_\tau \phi - (\kappa_0)^2 \phi = 0, \quad C^\tau L_\tau = 0. \quad (23)$$

以上の様に再定義すると、 $U^\tau U_\tau < 0$ なる U_μ が lightlike な場合と同様に、測地線に平行な条件： $U^\tau \partial_\tau U_\mu = 0$ を満たす。

古典的記述としてのクレブシュ双対場 (1 2)

- Riemann 曲率テンソル $R_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}$ で表される Einstein 方程式との類似

更に、この時、保存則 $\partial_\nu \hat{G}_\mu^\nu = 0$ を満たすエネルギー運動量テンソル \hat{G}_μ^ν は以下の形となり、

$$\hat{G}_\mu^\nu = -\hat{S}_{\mu\sigma}{}^{\nu\sigma} + \frac{1}{2}\hat{S}_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} g_\mu^\nu; \quad \hat{S}_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho} \equiv S_{\mu\nu} S^{\sigma\rho}. \quad (24)$$

これは、Einstein 方程式と同形である。

$$G_\mu^\nu = \kappa T_\mu^\nu, \quad G_\mu^\nu = -R_{\mu\sigma}{}^{\nu\sigma} + \frac{1}{2}R_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} g_\mu^\nu. \quad (25)$$

古典的記述としてのクレブシュ双対場 (13)

- 古典的クレブシュ双対場のまとめとして、以下の事を示した。
 - ★流体力学のクレブシュ変数表示を用いて、 $U(1)$ ゲージボゾンの「クレブシュモデル」を構築した。
 - ★そのモデルをゲージ及び共形不変性が破れるケースに拡張し「spacelike なクレブシュ双対場」を得た。その場は、Einstein 方程式の曲率項と同形となった。この場は相互作用における運動量の空間成分を表現する為の基底としての役割を果たす「基本モード」と見做せる。

古典的記述としてのクレブシュ双対場 (14)

- 量子化に向けての、古典場の問題点
 - (1) 既知の電磁場の量子化： $E = \hbar\nu$ との整合性をどうするのか？
 - (2) 空間的 Klein Gordon(KG) 方程式： $\partial^\nu \partial_\nu \lambda - (\kappa_0)^2 \lambda = 0$ を考えたが、 κ_0 の起源は？
 - (3) クレブシュ双対変数の直交性： $C^\nu L_\nu = 0$ は何を意味しているのか？

量子化について (1)

- 問題点 (1) 及び (2) に対して

(1) については、式(20) $\hat{T}_\mu^\nu = \rho C_\mu C^\nu$; $\rho = -L_\tau L^\tau$ の ρC^ν を $E = \hbar\nu$ と比較して、 ρ が離散化されていれば整合的である。また、 $C^\nu = \partial^\nu(\partial_\tau A^\tau)$ から L_μ の次元は長さとなるので、離散化されるのは長さである。

(2) に関して：従って、上の議論より、 κ_0 は離散化される長さの逆数である。

量子化について (2)

- Dirac 方程式からの Majorana 場の導入

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)\Psi = 0, \quad (26)$$

において、 $m \Rightarrow i\kappa_0$ とすれば

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)\Psi = 0, \implies (\gamma^\nu \partial_\nu + \kappa_0)\Psi = 0 \quad (27)$$

一方、Majorana 場に対しては $\gamma^\nu = -i\hat{\gamma}^\nu$ なるある実数の $\hat{\gamma}^\nu$ が存在するので、これは上式と同形となって、結局、空間的 KG 方程式の「平方根」として Majorana ピノール場が存在する事になる。

量子化について (3)

- 問題点 (3): $C^\nu L_\nu = 0$ について

これについては、スピン偏極を定量的に記述する以下の Pauli-Lubanski 4-vector W_μ を使って議論する。

$$M_{\mu\nu} p^\nu = (N_{\mu\nu} q^\nu =) W_\mu. \quad (28)$$

ここに、 $M_{\mu\nu}$ と p^ν は着目する量子の角運動量と運動量である。上式は、運動量が直交する二つの状態が同一の W_μ を共有する可能性を示す。すなわち、上記の意味で二つの直交するフェルミオンが結合してスピン1のベクトルボゾンとなる事が可能である。

量子化について (4)

- 量子化の結論

前項の結果より、CD場を生み出す式(22)：

$U_\mu = (\lambda C_\mu - \phi L_\mu)/2$ で与えられるベクトル場は直交する一組の Majorana スピノール場から作られるスピン1のベクトルボゾンの場であり、これが電磁相互作用において空間的運動量成分の基底的模式となる。

- ドレスト光子の数学的表現

ここでは、球対称： $\Psi(x^0, r) = \exp(ik_0 x^0) R(r)$ な解を考え、空間的な KG 方程式へ代入すると、

$$R'' + \frac{2}{R} R' + [(k_0)^2 + (\kappa_0)^2] R = 0. \quad (29)$$

量子化について (5)

- 空間的ベクトルが point source と相互作用する際の振る舞い (Aharonov et al. (1969) の解析)
(時間的ベクトルは不安定になる。 $k_0 \rightarrow \pm i\hat{k}_0$)

式 (29) より、 $\Psi(x^0, r) = \exp(\pm \hat{k}_0 x^0) R(r)$,
 $(k_{\dagger})^2 \equiv (\hat{k}_0)^2 - (\kappa_0)^2$

$$R'' + \frac{2}{R} R' - (k_{\dagger})^2 R = 0, \quad (30)$$

となり、 $(k_{\dagger})^2 > 0$ の時に、上式は (時間的) 湯川ポテンシャル: $R(r) = \exp(-k_{\dagger} r)/r$ を解に持つ式となる。

量子化について (6)

- 時間的な解について
時間依存項は、振幅が増加するものと減少するものがあるが、これは定性的には量子論の生成と消滅演算子に対応する性質を持ち、特に古典的な場と異なる量子的な Majorana 場については、この二つは時間が前に進むか、それとも後ろ向きに進むかという「量子-反量子」(フェルミオンの対生成が結合してボゾン場となる) と見做せるので、電磁場の二次式で表されるエネルギー場は、調和振動子のハミルトニアンが生成・消滅演算子の積として書けるように、

$$\exp(\hat{k}_0 x^0) R(r) \cdot \exp(-\hat{k}_0 x^0) R(r) = R(r)^2. \quad (31)$$

と表現される。

DP 最大寸法および宇宙定数 (1)

- ” スピン 3/2 を持つ量子状態 ”。

スライド 29 の式 (28)

$$M_{\mu\nu}p^\nu = N_{\mu\nu}q^\nu = (L_{\mu\nu}r^\nu =)W_\mu.$$

は、時空には直交する空間的な測地線が最大 3 本存在する事が可能なので、それぞれの方向に、Majorana スピノールの 4 元運動量を 1 つずつ割り当てれば、合計のスピンが 3/2 となる状態が存在できる事を示している。観測によれば、宇宙は大域的にも非常に平坦であるので、これらの測地線は直線と見做す事ができ、これまで議論して来た平面波の解がそのまま適用できる。

DP 最大寸法および宇宙定数 (2)

- ” スピン 3/2 を持つ量子状態 ” (続き - 1)

スライド 24 の式 (24)

$$\hat{G}_\mu^\nu = -\hat{S}_{\mu\sigma}{}^{\nu\sigma} + \frac{1}{2}\hat{S}_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta}g_\mu^\nu; \quad \hat{S}_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho} \equiv S_{\mu\nu}S^{\sigma\rho}.$$

で表現されるベクトルボゾンは、相互作用における空間的運動量を担う ” 仮想量子 ” 的存在として導入されたが、上記のスピン 3/2 状態は、実量子の特殊な状態 (一様に無限に広がる平面波) として存在可能な事を以下に示す。また、電気的には中性なのでニュートリノの様に通常の物質と殆ど相互作用しないと予想される。

DP 最大寸法および宇宙定数 (3)

- ” スピン 3/2 を持つ量子状態 ” (続き-2)

互いに直交する空間的な 3 本のベクトル L^μ, M^μ, N^μ を考える。具体的には、

$$L^\mu = (L^0, 0, L^2, L^3), \quad M^\mu = (M^0, M^1, 0, M^3), \quad (32)$$

$$N^\mu = (N^0, N^1, N^2, 0). \quad (33)$$

直交条件から、

$$L^\mu \perp M^\mu \rightarrow L^0 M^0 - L^3 M^3 = 0 \quad (34)$$

$$L^\mu \perp N^\mu \rightarrow L^0 N^0 - L^2 N^2 = 0 \quad (35)$$

$$M^\mu \perp N^\mu \rightarrow M^0 N^0 - M^1 N^1 = 0. \quad (36)$$

DP 最大寸法および宇宙定数 (4)

- ” スピン 3/2 を持つ量子状態 ” (続き-3)

このスピン 3/2 状態は 3 本のベクトル L^μ, M^μ, N^μ で記述される Majorana スピノールの複合状態と見做す事ができ、3つの組み合わせ $(L^\mu, M^\mu), (L^\mu, N^\mu), (M^\mu, N^\mu)$ のそれぞれがスピン 1 のベクトルボゾン場 (24) を伴っている。この 3つの場を足し合わせた (等方的) 状態を考えると、それを記述する L^μ, M^μ, N^μ は無数に存在するが、物理的状态としては、どれも等価である。従って Pauli の排他律に従えば、この (同一の) 複合状態は三つの Majorana 量子によって占有される。以下、この状態を定量的に解析する。

DP 最大寸法および宇宙定数 (5)

- ”量子状態” (3/2) が時空に及ぼす影響

これを以下の様に見積もる。まず、スライド 21 の式 (20): $\hat{T}_\mu^\nu = \rho C_\mu C^\nu$ に立ち返り、lightlike な場合 (ρ は離散化されているが、 ϕ は連続量として) から議論を進める。以下に示す一組の平面波の解を用意する。

$$\phi = \hat{\phi} \exp(ik_\nu x^\nu), \quad \lambda = N_\lambda \hat{\lambda}_0 \exp(il_\nu x^\nu). \quad (37)$$

ここに、 N_λ は離散化された振幅を持つ量子の個数、 $k_\nu k^\nu = 0$ 、 $l_\nu l^\nu = -(\kappa_0)^2$ 。

DP 最大寸法および宇宙定数 (6)

- ”量子状態” (3/2) が時空に及ぼす影響 (続き - 1)

$$C_\mu = ik_\mu \hat{\phi} \exp(ik_\nu x^\nu), \quad C^\nu = ik^\nu \hat{\phi} \exp(ik_\sigma x^\sigma), \quad (38)$$

これより

$$C_\mu (C^\nu)^* = k_\mu k^\nu \hat{\phi} (\hat{\phi})^*. \quad (39)$$

同様に

$$\begin{aligned} \rho &= -L_\nu (L^\nu)^* = -l_\nu l^\nu (N_\lambda)^2 \hat{\lambda}_0 (\hat{\lambda}_0)^* \\ &= (\kappa_0)^2 (N_\lambda)^2 \hat{\lambda}_0 (\hat{\lambda}_0)^*. \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} &(\text{using } \hat{\lambda}_0 (\hat{\lambda}_0)^* = (\kappa_0)^{-4}) \\ \rho &= (N_\lambda)^2 (\kappa_0)^{-2}. \end{aligned} \quad (41)$$

DP 最大寸法および宇宙定数 (7)

- ”量子状態” (3/2) が時空に及ぼす影響 (続き-2) 従って

$$\text{Re}(\rho C_\mu C^\nu) = (\kappa_0)^{-2} (N_\lambda)^2 k_\mu k^\nu [\hat{\phi}(\hat{\phi})^*]. \quad (42)$$

C^ν は x^1 軸に平行と仮定し、 x^1 軸に垂直な単位平面 [$\epsilon (= 1) m^2$] と x^1 軸に平行な距離 $1/k_1$ で囲まれた体積 $V = \epsilon/k_1$ でエネルギー密度 $T_0^0 = \text{Re}(\rho C_0 C^0)$ を積分すれば、

$$\int_V T_0^0 dx^1 dx^2 dx^3 = (N_\lambda)^2 (\kappa_0)^{-2} \epsilon [\hat{\phi}(\hat{\phi})^*] \nu_0 / c, \quad (43)$$

$$\text{where } k_0 = \nu_0 / c.$$

DP 最大寸法および宇宙定数 (8)

- ”量子状態” (3/2) が時空に及ぼす影響 (続き-3)

この電磁場のエネルギーが $E = h\nu$ で離散化されているというのが Planck の光量子仮説に対応。これは、上式で $N_\lambda = 1$ として

$$(\kappa_0)^{-2} \epsilon [\hat{\phi}(\hat{\phi})^*] / c = h. \quad (44)$$

次に、スライド 23 の式 (22) で表される $U_\sigma U^\sigma < 0$ の場合を考える。

$$C_\mu = ik_\mu \hat{\phi} \exp(ik_\nu x^\nu), \quad L_\mu = il_\mu N_\lambda \hat{\lambda}_0 \exp(il_\nu x^\nu), \quad (45)$$

$$k_\nu k^\nu = l_\nu l^\nu = -(\kappa_0)^2. \quad (46)$$

DP 最大寸法および宇宙定数 (9)

- ”量子状態” (3/2) が時空に及ぼす影響 (続き - 4)

これより

$$U_\mu = \frac{i}{2} N_\lambda \hat{\lambda}_0 \hat{\phi}(k_\mu - l_\mu) \exp i(k_\nu + l_\nu)x^\nu \quad (47)$$

$$(U^\mu)^* = -\frac{i}{2} N_\lambda (\hat{\lambda}_0)^* (\hat{\phi})^* (k^\mu - l^\mu) \exp(-i(k_\nu + l_\nu)x^\nu) \quad (48)$$

ベクトル k^μ と l^μ の直交条件を使うと、 $V \equiv U_\mu U^\mu / 2$ に対して

$$|V| = \frac{1}{2} U_\mu (U^\mu)^* = -\frac{(\kappa_0)^{-2}}{4} (N_\lambda)^2 (\hat{\phi} \hat{\phi}^*). \quad (49)$$

DP 最大寸法および宇宙定数 (1 0)

- ”量子状態” (3/2) が時空に及ぼす影響 (続き - 5)

$\Omega \equiv S_{\mu\nu} S^{\mu\nu}$ として、式 (24) から $N_{\lambda=1}$ に対して

$$|\Omega| = 8(\kappa_0)^2 |V| \implies |\Omega| = -2(\hat{\phi} \hat{\phi}^*). \quad (50)$$

これを宇宙定数からなる宇宙項のトレースと比較する為に、”等方的 U^μ の輻射場”を得るには x^1, x^2, x^3 方向の場を足し合わせる必要があるので、上式の $|\Omega|$ を 3 倍して

$$\Lambda g^\nu_\nu = 4\Lambda = -3 \times \frac{8\pi G}{c^4} \times 2(\hat{\phi} \hat{\phi}^*). \quad (51)$$

DP 最大寸法および宇宙定数 (11)

- ”量子状態” (3/2) が時空に及ぼす影響 (続き-6)
この式にスライド40の式(44)を代入して

$$\Lambda = -\frac{12\pi G}{c^3} h(\kappa_0)^2. \quad (52)$$

ドレスト光子の実験結果によると、その最大寸法は50nm程度なので、(30)の $(\kappa_+)^2 > 0$ より

$$\kappa_0 \approx 2 \times 10^7 m^{-1}; \Rightarrow \Lambda \approx -2 \times 10^{-53} m^{-2} \quad (53)$$

一方、Planck satelliteによる最新の観測値は、 $\Lambda_{obs} \approx -3 \times 10^{-53} m^{-2}$ である。

- 進行中の研究：現在、電磁場と重力場の共形不変の破れの観点から、この結果が偶然の産物でない事を示そうとしている。

謝辞

ドレスト光子の研究推進の為にこのような研究集会を持たせた事は、大変有意義な事であり、ここにご尽力を頂いた九州大学IMIの関係者の皆様に感謝申し上げます。また、この間、大津先生、小嶋先生をはじめとするRODrePの研究会でのメンバーの方々との交流を通して頂いた有形、無形の貢献が本研究集会の成功の大きな要因になっている事を想い、そのご協力に感謝申し上げます。最後になりましたが、本研究を推進するに当たり、(公財)光科学技術研究振興財団からの助成を受けました。

ドレスト光子の対称性

Symmetry on dressed photons

落合啓之 (Hiroyuki Ochiai)

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所
(IMI, Kyushu University)

Abstract

ドレスト格子、特に、オフシェル科学で提唱されている幾つかの空間の対称性を整理する。また、佐久間・小嶋・大津の論文で展開された Clebsch variable の計算に関して、不変式論の立場からの説明を追加する。

We summarize the symmetry on spaces related with off-shell science and dressed photons. We also add a remark on the paper by Sakuma-Ojima-Ohtsu from the invariant theory point of view.

1 on-shell と off-shell

$p^2 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$ の値によって決まる $\mathbb{R}^{1,3}$ の超曲面は符号によって形が異なっている。

- $p^2 > 0$. time-like. 2葉双曲面の1枚。等質空間としての表示は $G/H = SO_0(1, 3)/SO(3)$.
- $p^2 < 0$. space-like. 1葉双曲面。等質空間としての表示は $G/H = SO_0(1, 3)/SO(1, 2)$.

- $P^2 = 0$. cone. 錐。等質空間としての表示は $G/H = SO_0(1, 3)/E(2)$.

$G/H = SO_0(1, 3)/SO(3)$ や $G/H = SO_0(1, 3)/SO(1, 2)$ は対称空間であるが、 $G/H = SO_0(1, 3)/E(2)$ は対称空間ではない。 $E(2)$ は2次元のユークリッド運動群である。これらに現れた幾つかの群の性質について整理する。

群	compact	reductive	可換
$SO(3)$	Y	Y	N
$SO_0(1, 2)$	N	Y	N
$E(2)$	N	N	N
$SO(2)$	Y	Y	Y
$SO_0(1, 1)$	N	Y	Y

なお、 $SO_0(1, 1)$ は、正の実数が掛け算でなす群や \mathbb{R} が足し算に関してなす群と同型である。 $SO(2)$ は $U(1)$ や単位円周 S^1 と同型である。 $SO(2)$ の上の調和解析が通常の一変フーリエ展開を、 $SO_0(1, 1)$ の上の調和解析が通常の一変フーリエ変換の理論に対応している。

1.1 dual

鍵となるのは双対性であると考えられる。非コンパクトリーマン対称空間とコンパクトリーマン対称空間の間には双対があることはよく知られている。今の事例で言えば、2葉双曲面の1枚 $SO_0(1, 3)/SO(3)$ が非コンパクトリーマン対称空間、3次元球面 $S^3 = SO(4)/SO(3)$ がコンパクトリーマン対称空間である。両者で位相的性質などは異なるものの、共通の複素化を持つ異なる実形なので、不変微分作用素環などの代数的な構造は共通している。

もう一つの双対性は擬リーマン対称空間を巻き込むもので、例えば2葉双曲面の1枚 $SO_0(1, 3)/SO(3)$ と1葉双曲面 $SO_0(1, 3)/SO(1, 2)$ が双対の関係にある。

コンパクトリーマン対称空間のスペクトルは離散的であり、既約表現は有限次元ユニタリ表現である。既約な非コンパクトリーマン対称空間のスペクトルは連続スペクトルのみであり、離散スペクトルを持たない。擬リーマン対称空間のスペクトルは一般には複雑である。

1.2 accidental isomorphism

一般の階数では

名称	記号	タイプ
線形群、ユニタリ群	GL, SL, U	A 型
直交群	SO	B 型, D 型

となり、階数が4以上であれば、リストに重なりはないが、階数が小さい群では局所同型が存在する。今までに出てきた群における局所同型を書くと、

- $SO(4)$ と $SU(2) \times SU(2)$.
- $SO_0(1, 3)$ と $SL(2, \mathbb{C})$.
- $SO(3)$ と $SU(2)$.
- $SO_0(1, 2)$ と $SL(2, \mathbb{R})$.

したがって、上で紹介した2種類の双対

$$SO(4)/SO(3) \leftrightarrow SO_0(1, 3)/SO(3) \leftrightarrow SO_0(1, 3)/SO(1, 2)$$

は、A 型を使って

$$(SU(2) \times SU(2))/SU(2) \leftrightarrow SL(2, \mathbb{C})/SU(2) \leftrightarrow SL(2, \mathbb{C})/SL(2, \mathbb{R})$$

と書くこともできる。

1.3 コンパクト化

さて、ローレンツ空間 $\mathbb{R}^{1,3}$ は共形コンパクト化すると $SO_0(2, 4)/P$ と書ける。 $P = MAN$ は $SO_0(2, 4)$ の極大放物形部分群であり、 $M = SO_0(1, 3)$, $A = SO_0(1, 1)$, $N = \mathbb{R}^{1,3}$ はそれぞれ、 $\mathbb{R}^{1,3}$ に付随した不定値直交群、原点中心の拡大縮小、平行移動を表す部分群である。したがって P は $\mathbb{R}^{1,3}$ の相似変換群と思って良い。 $\mathbb{R}^{1,3}$ が持つ対称性は P なのだが、コンパクト化する

と対称性が $SO_0(2,4)$ まで大きくなる。 P の次元は $6 + 1 + 4 = 11$ であり、 $SO_0(2,4)$ の次元は 15 である。

この事情は次元が下がったおもちゃのモデルで考えるとわかりやすい。複素関数論で 1 次分数変換を学習するときに平面 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付け加えて、リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を考える。リーマン球面は $SO_0(1,3)/P$ と表すことができる。ただし、 $P = MAN$ は $SO_0(1,3)$ の放物形部分群であり、 $M = SO(2)$, $A = SO_0(1,1)$, $N = \mathbb{R}^2$ がそれぞれ \mathbb{R}^2 の回転、拡大縮小、平行移動を表す。 P の次元は 4 であり、 $SO_0(1,3)$ の次元は 6 である。accidental isomorphism を使うと $SO_0(1,3)$ は $SL(2, \mathbb{C})$ と局所同型であり、 $SO_0(1,3)/P$ は $SL(2, \mathbb{C})/B$ と同型である。ここで B は上三角行列からなる部分群である。

元に戻って、 $\mathbb{R}^{1,3}$ は $SO_0(2,4)/P$ の稠密な開集合として含まれている。 $\mathbb{R}^{1,3}$ は $SO_0(1,3)$ の軌道に分けることができている、それは p^2 の値で決まっていた。このことは、 $MA = SO_0(1,3) \times SO_0(1,1)$ の $\mathbb{R}^{1,3}$ への作用と考えることができる。 $G = SO_0(2,4)$ と書くと、 G/P を M の作用の軌道に分解することが shell を記述することに相当し、 G/P を MA の作用の軌道に分解することは、同じ形の shell をまとめる（束ねる）ことにあたる。逆に G/P を MA の作用の軌道に分解し、さらに A の軌道に分解することは、不変量 p^2 で軌道に分けることに相当する。今の事例の場合は特別に MA が G の対称部分群である、という事情があるので、問題は、 $MA \backslash G/P$ という両側剰余類分解の問題となる。この問題は一般に、対称部分群と放物形部分群による両側剰余類の問題として松木敏彦によって解かれていて、特に有限個の軌道に分かれることが著しい。

また、 P は G の極大放物形部分群であり、 G/P はグラスマン多様体の一種である。

2 Clebsch parametrization

この節では、佐久間先生の講演と同じ記号を使う。すなわち、

- U : electromagnetic field, velocity field.
- S : field of strength, vorticity field

とする。また、ここでは Clebsch parametrization が

$$U_\mu = \lambda \nabla_\mu \phi$$

となっていると仮定している。記号

$$C_\mu = \nabla_\mu \phi, \quad L_\mu = \nabla_\mu \lambda$$

を用いる。これらの外積として

$$S_{\mu\nu} = C_\mu L_\nu - L_\mu C_\nu$$

とする。ここでは

$$C_\nu C^\nu = 0, \quad L_\nu C^\mu = 0, \quad L_\nu L^\mu = -\rho \quad (1)$$

を仮定している。

SOO の論文では、 $\det(S_{\mu\nu}) = 0$, $\text{Pf}(S_{\mu\nu}) = 0$ が導かれている。これは、Segre 埋め込みもどきの写像

$$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \ni (C, L) \mapsto S \in \text{Alt}(4)$$

の像が $\text{Alt}(4)_{\text{rk} \leq 2}$ に含まれることを意味している。ここで $\text{Alt}(4)$ は4次の交代行列全体を、 $\text{Alt}(4)_{\text{rk} \leq 2}$ はそのうち、正則行列でないもの全体を表した。交代行列の階数は必ず偶数次なので、四次の交代行列で正則でないものの階数は2または0である。 $\text{Alt}(4)$ には $GL(4)$ が座標変換で自然に作用している。この作用は推移的ではないが、開集合 $\text{Alt}(4)_{\text{rk}=4}$ への作用は推移的であり、このような作用を持つ線型空間を概均質ベクトル空間と呼ぶ。交代行列

上の行列式は既約多項式ではなく、Pfaffian の 2 乗になる。四次の交代行列の場合は行列式は 4 次式なので、Pfaffian は 2 次式である。具体的には、

$$\text{Pf}(S) = S_{01}S_{23} + S_{02}S_{31} + S_{03}S_{12}$$

と書ける。一方で、 $SL(4)$ と $SO_0(3,3)$ は局所同型であり、 $SO_0(3,3)$ は $\mathbb{R}^{3,3}$ に自然に作用する。 $Alt(4)$ と $\mathbb{R}^{3,3}$ は群作用込みで線型同型であり、 $Alt(4)$ 上の Pfaffian は $\mathbb{R}^{3,3}$ 上の自然な 2 次式と対応している。 $Alt(4)_{\text{rk} \leq 2}$ は概均質ベクトル空間 $\mathbb{R}^{3,3}$ の cone と思うとわかりやすい。

さて、

$$\hat{T}_\mu^\nu = -S_{\mu\sigma}S^{\nu\sigma}$$

と定めると、(1) より

$$\hat{T}_\mu^\nu = \rho C_\mu C^\nu$$

となる。これは Veronese 埋め込み

$$\mathbb{R}^4 \ni C \mapsto C {}^t C \in \text{Sym}(4)_{\text{rk} \leq 1}$$

の像に \hat{T} が入っていることを意味する。行列の 2 乗による写像

$$\text{Alt}(4) \rightarrow \text{Sym}(4)$$

によって、 $Alt(4)_{\text{rk} \leq 2}$ の像は $\text{Sym}(4)_{\text{rk} \leq 2}$ に含まれることはわかるが、 $\text{Sym}(4)_{\text{rk} \leq 1}$ に入るには格別な理由が必要である。条件 (1) は $SO_0(1,3)$ では保たれるが、 $GL(4)$ では保たれない。不変式 Pf が持つ $GL(4)$ の大きな対称性を、対称部分群 $SO_0(1,3)$ の対称性に落としていることが効いている。(群の次元は、それぞれ 15 と 6。)

なお、Segre, Veronese, Plücker 埋め込みの像の決定問題は行列式多様体 (determinantal variety) や Plücker 関係式として古くから研究されている。

3 課題

講演後の質疑によって、off-shell 科学に結びつける際に、幾つか考えるべき問題があぶり出されてきた。

- コンパクト化で得られた多様体の対称性を記述せよ。
- モース理論的に軌道分解を理解せよ。

これらは今後の課題である。


量子確率論からドレスト光子へ From Quantum Probability to Dressed Photon

西郷甲矢人, 長浜バイオ大学
Hayato Saigo, NIBST

アブストラクト:本稿では、ドレスト光子の基礎数理として「量子確率論」および「量子ウォーク」を用いることを提唱する。

Abstract: In the present note we propose the framework in terms of quantum probability and quantum walk to provide fundamental mathematical scheme for dressed photons.

アウトライン

- ・ドレスト光子とは
 - ・なぜドレスト光子は「特異点」に生ずるか？
 - ・量子確率論、逆正弦法則、量子古典対応
 - ・量子確率論からドレスト光子へ
 - ・もうひとつの道：量子ウォーク
- 

ドレスト光子とは



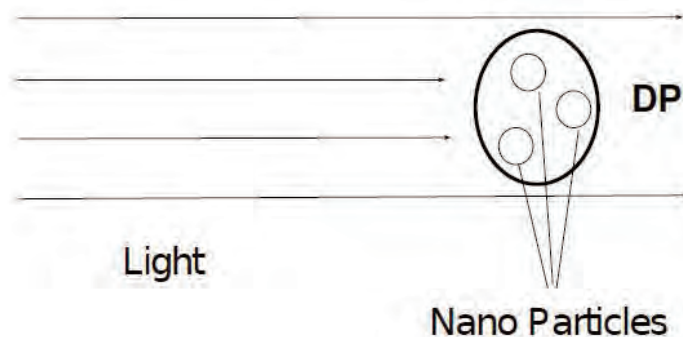
ドレスト光子とは

ドレスト光子とは、(ナノ)物質系と相互作用する量子場としての光の鮮烈な振る舞いを指す。自由光子は局在化不可能だが、物質との相互作用を通じて「有効質量をもつことにより局在化が可能となる。言い換えれば、運動量・エネルギー的な広がりをもつのであり、単一のマスセル上のみの議論の寄せ集めでは記述できないオフシェル光子である。

ドレスト光子とは

このようなオフセルの場を考えることは、相互作用する量子場を考える上では不可欠である。とくにその比較的高エネルギー・高運動量の部分は、比較的低エネルギー・低運動量の部分をいわば「熱浴」とすることを通じてきわめてユニークなふるまいを示す。これがドレスト光子である(という定義のもとで話を進めていく)。

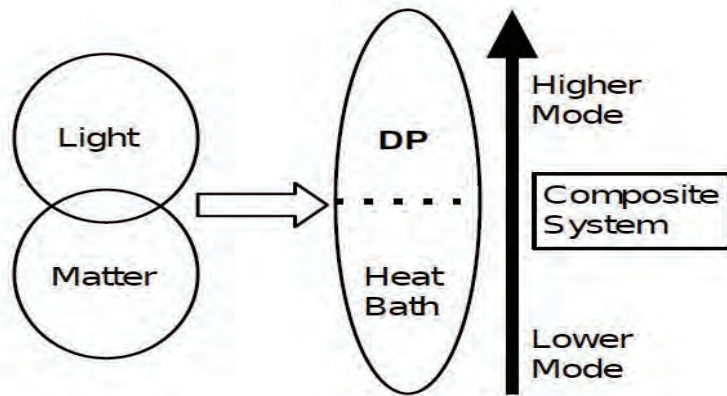
ドレスト光子とは



ドレスト光子とは

ただし、ここでいう「熱浴」というのは、「目に見える」伝搬光として放出されるという意味での「散逸」を可能にするという意味であり、通常の「より見えない側」が熱浴という理解とは異なってくることに注意しておく。光が、物質と相互作用することによって自らの環境をいわば作り出すのである。ドレスト光子が「系」であり、その環境との関係、つまり状態が主題となっている。

ドレスト光子とは



なぜドレスト光子は「先端」に生ずるか？

なぜドレスト光子は「先端」に生ずるか？

ドレスト光子の実験においては、ファイバプローブの先端にドレスト光子が発生しているという知見がある。本稿においては、「ファイバプローブの先端にドレスト光子が発生するのはなぜか」という問いを、量子確率論や量子ウォークの立場から考えていく。

光の有効質量と局在化

まず、物理的描像について確認しよう。数理物理の文脈において知られているように、質量0スピン1の粒子としての光子は局在化不可能である。確率分布すらうまく定義できない。しかし、物質との相互作用により有効質量をもつならば、局在化は可能となる。一葉媒質においてはこれが「ポラリトン」という概念であり、さらにナノ粒子の相互作用を考えると局在するドレスト光子となる。

局在の在り方: 調和振動子と逆正弦法則

では、その局在のありよう、具体的にはドレスト光子=「場の高エネルギー部分」全体の位置の確率分布はどうなるのか？

ドレスト光子を(質量をもつ)調和振動子とみなすと、その位置の1次元分布は逆正弦法則に近づくことがわかる。そのために量子確率論を用いることができる。

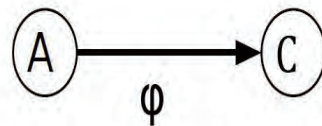
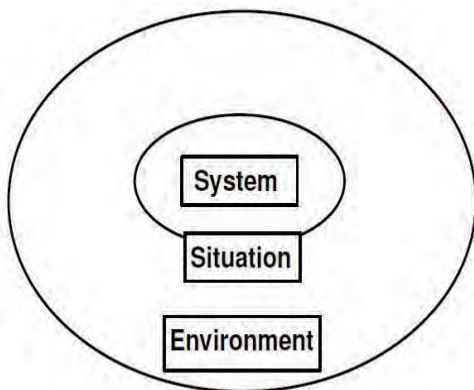


量子確率論・逆正弦法則・量子古典
対応

量子確率論とは

量子確率論とは、古典的な確率論の一般化であり、量子論を包含する。基本概念である量子確率空間は(非可換な)「代数」と「状態」(期待値汎関数)の組である。可換性に基づいて、古典確率論が生まれる。この枠組みにおいて、いわゆる量子古典対応を、スケールに比した非可換性の消失ととらえることができる。これにより、逆正弦法則が導かれる。

量子確率論とは



A: Algebra of Quantities

φ : State

C: Complex Numbers

逆正弦法則



$$\mu_{As}(dx) = \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}},$$

逆正弦法則の特徴

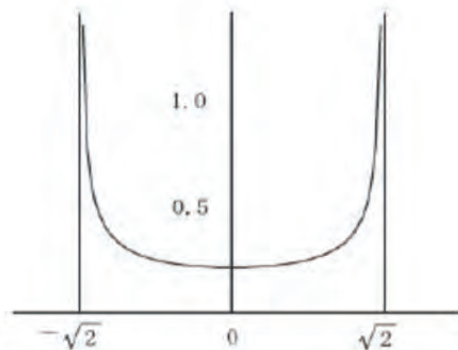
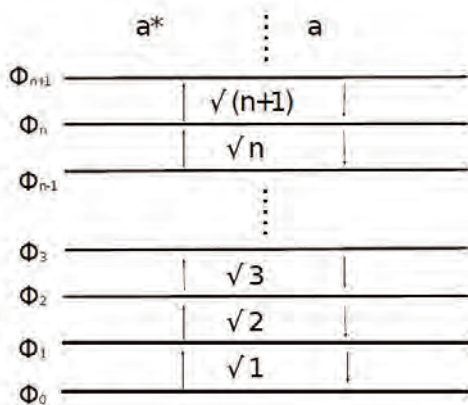
ブラウン運動の理論、単調確率論、数論などとの関連があつる。逆釣り鐘型である。コンパクト台をもち、ゆえにモーメントにより一意に定まる。モーメントは下の通り。

$$M_{2m+1} = 0, \quad M_{2m} = \frac{1}{2^m} \binom{2m}{m}.$$

量子古典対応の数理: 量子確率論からの視点

量子確率論を用いると、量子古典対応の数理について透徹した理解と一般化が得られる。具体的には、量子調和振動子における量子数無限大の極限において、その位置の分布が逆正弦法則となることが、「漸近的な可換性」からわかる。逆正弦法則は「古典調和振動子の位置分布」に対応しており、これは量子古典対応である。さらにこの手法では、調和振動子をより一般化したものでも同様といえる。

量子古典対応の数理



定理: 量子古典対応 (HS and H. Sako 2016)

Theorem 5.3. *Let $\Gamma_{\omega,\alpha} := (\Gamma(\mathbb{C}), A, B, C)$ be an interacting Fock space satisfying asymptotic commutativity (RAC1). Then the classical limit distribution given in Definition 3.2 exists and is the arcsine law $\frac{dx}{\pi\sqrt{2-x^2}}$.*

古典極限の概念

As the case for the quantum harmonic oscillator, we define the notion of classical limit distribution for interacting Fock spaces. It is a distribution to which the distribution for X under φ_n , after normalization, converges in moment.

Definition 3.2 (Classical Limit distribution). Let $\Gamma_{\omega,\alpha} := (\Gamma(\mathbb{C}), A, B, C)$ be an interacting Fock space and let X be $A+B+C$. Let μ_n be a probability distribution on \mathbb{R} such that

$$\frac{X - \alpha_n}{\sqrt{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}}} \sim_{\varphi_n} \mu_n.$$

A probability distribution μ on \mathbb{R} is called a classical limit distribution of $\Gamma_{\omega,\alpha}$, if μ_n converge μ in moment.

By the normalizations $-\alpha_n$ and $\cdot/\sqrt{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}}$, the measure μ_n has mean 0 and variance 1.

条件(RAC1)

Definition 5.1. The interacting Fock space is said to satisfy (RAC1), if the commutators $[A, C]$ and $[A, B]$ are asymptotically zero in the following sense:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{AC - CA}{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}} \Phi_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{AB - BA}{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}} \Phi_n = 0.$$

Recall that $\langle \cdot, \Phi_n, \Phi_n \rangle$ stands for the n -th state of the interacting Fock space. The denominator $\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}$ is the variance of the algebraic random variable $X = A + B + C$ with respect to the state $\langle \cdot, \Phi_n, \Phi_n \rangle$.

Lemma 5.2. *The condition (RAC1) is equivalent to*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_{n+1/2}}{\omega_{n-1/2}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\sqrt{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}}} = 0.$$

応用

Theorem 5.3 implies the following asymptotic behavior of orthogonal polynomials:

Corollary 5.7. *Let μ be a probability measure such that the corresponding Jacobi sequence $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ satisfies (RAC1). Let P_n be the normalized orthogonal polynomial with degree n . The measure μ_n defined as $\mu_n(dx) := |P_n(\sqrt{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}}x)|^2 \mu(\sqrt{\omega_{n+1/2} + \omega_{n-1/2}}dx)$ weakly converge to the arcsine law μ_{As} .*

It turns out that many kinds of orthogonal polynomials such as Legendre polynomials, Laguerre polynomials or q -Hermite polynomials for $-1 < q \leq 1$ satisfy the above condition.

量子確率論からドレスト光子へ

なぜドレスト光子は「先端」に生ずるか？

- ・ファイバプローブの先端にドレスト光子が発生するのはなぜか
- ・物理的描像: 有効質量を持つ光、その「調和振動子」
- ・ドレスト光子 = 「場の高エネルギー部分」全体の振る舞いはどうなるのか？

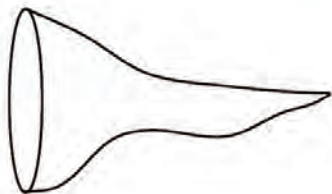
なぜドレスト光子は「先端」に生ずるか？

- ・量子確率論の答え: その位置の1次元分布は逆正弦法則に近づく;
- ・その3次元分布はどうなるか? ⇒「先端」の密度がもっとも大きくなる!
- ・説明から設計へ⇒「最良」なファイバプローブの形状は?;

なぜドレスト光子は「先端」に生ずるか？



$$\mu_{vol}(dx) = C \frac{dx}{S(x)\sqrt{2-x^2}}$$



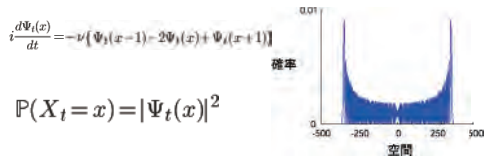
さらなる展開に向けて

- ・散逸も考慮に入れたファイバプロープの設計
- ・フォトンブリーディングに関する新しい予想;境界効果?
- ・境界と不純物→特異点
- ・特異点の数理とドレスト光子etc.
- ・量子ウォーク!

もうひとつの道:量子ウォーク

量子ウォーク

・量子ウォークとは、
「ランダムウォークの量子版」
と考えられている
数学的なモデルの総称。



(連続時間・Z上)量子ウォーク

町田拓也「量子ウォーク」

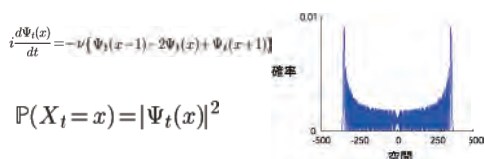
<<http://www.geocities.jp/tacmachida/quantumwalk/>>(最終アクセス日 2019/01/06)

量子ウォーク

・もうひとつの方向性:量子ウォーク

・逆正弦法則との関連

・量子確率論とのかかわり
(発展中)



(連続時間・Z上)量子ウォーク

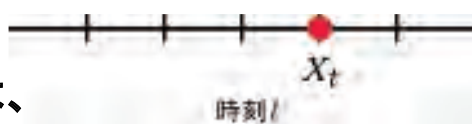
町田拓也「量子ウォーク」

<<http://www.geocities.jp/tacmachida/quantumwalk/>>(最終アクセス日 2019/01/06)

量子ウォーク

「ウォーカー」の状態は
時間推進作用素によって
時間発展し、その位置の確率分布は、
ボルの確率規則を通じて
与えられる。

$$P(X_t = x) = \|\psi_t(x)\|^2$$



町田拓也「量子ウォーク」

<<http://www.geocities.jp/tacmachida/quantumwalk/>>(最終アクセス日 2019/01/06)

量子ウォーク

量子ウォークの具体例はさまざまにあるが、その基本的な「型」としては「離散時間量子ウォーク」および「連続時間量子ウォーク」とよばれるものがあげられる。これらは、単に時間を離散化するかどうかといった単純な違いではなく、定義から自明にその関係が見通せるものでもない。また、極限分布の形も一般に異なる。

量子ウォーク

さらに、「歩き回る」場であるところのグラフの性質をも反映して意外な性質が数多く見つかっており、「一般的な定理」を証明することは決してたやすくはない。・・・とはいえ、普遍的なことが何もない、わけでもない！

量子ウォークの「迅速性」

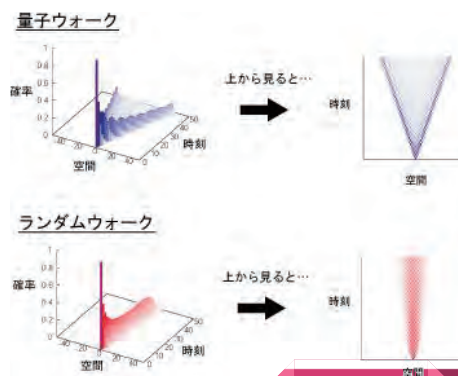
・量子ウォーク:

「時間そのもの」に比例。

⇒ランダムウォークとの鋭い

対照！

量子ウォークの「迅速性」

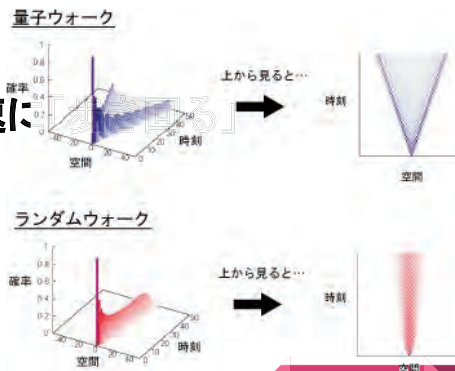


町田拓也「量子ウォーク」

<<http://www.geocities.jp/tacmachida/quantumwalk/>>(最終アクセス日 2019/01/06)

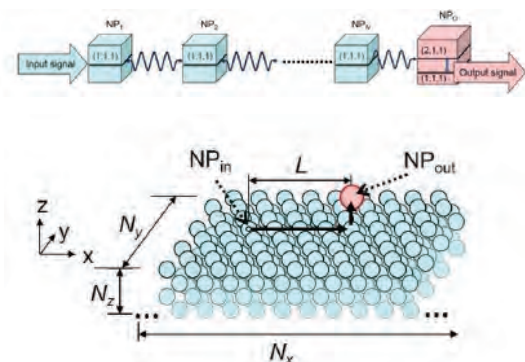
量子ウォークの「迅速性」

- 通常のランダムウォーカーに比べて量子ウォーカーは非常に迅速に
- ランダムウォーク:
平均の移動距離は「時間の平方根」に比例。

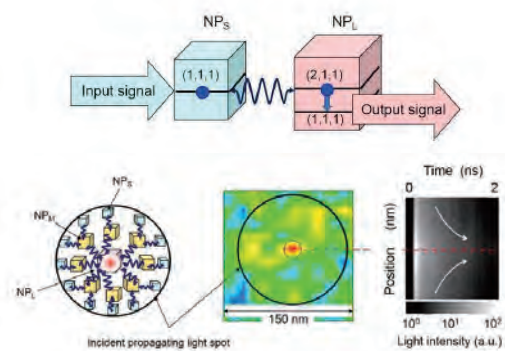


町田拓也「量子ウォーク」
<http://www.geocities.jp/tacmachida/quantumwalk/>
 (最終アクセス日 2019/01/06)

ドレスト光子の「迅速性」

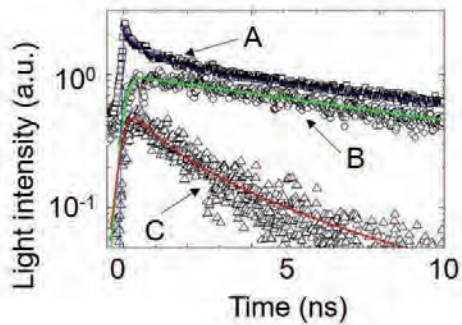
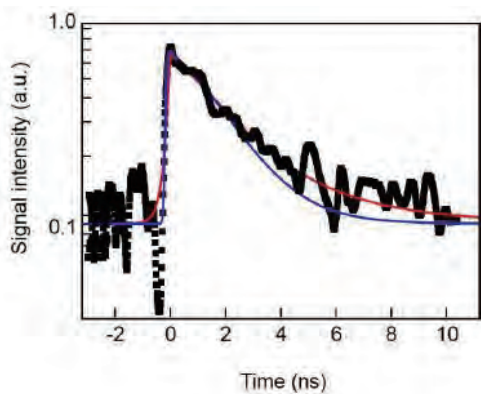


Spatial and Temporal Evolutions of Dressed Photon Energy Transfer, M. Ohtsu, T. Kawazoe and H.S. (Offshell:1710R.001.v1)



Spatial and Temporal Evolutions of Dressed Photon Energy Transfer, M. Ohtsu, T. Kawazoe and H.S. (Offshell:1710R.001.v1)

「迅速性」:ドレスト光子は量子ウォーク?



Spatial and Temporal Evolutions of Dressed Photon Energy Transfer, M. Ohtsu, T. Kawazoe and H.S. (Offshell:1710R.001.v1)

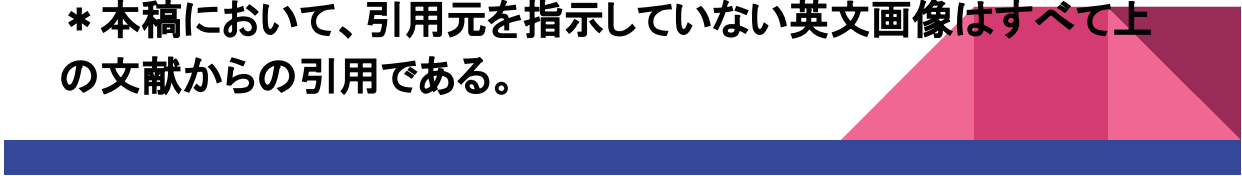
参考文献

参考文献1

Hayato Saigo and Hiroki Sako, The Arcsine law and an asymptotic behavior of orthogonal polynomials, **ANNALES DE L'INSTITUT HENRI POINCARÉ D** Volume 3, Issue 4, 2016, pp. 405–427, DOI: 10.4171/AIHPD/34

Also available on arXiv:1407.0792


* 本稿において、引用元を指示していない英文画像はすべて上の文献からの引用である。



参考文献2

Hayato Saigo, Quantum Probability for Dressed Photons: The Arcsine Law in Nanophotonics (August 2018)
DOI: 10.1007/978-3-319-98267-0_3, In book: Progress in Nanophotonics 5 (ed. T. Yatsui)

* 本稿において、引用元を示していない図版はすべてこの文献からの引用である。



量子ウォークから誘導される力学系における 固定点の特徴づけ

A characterization of the fixed point of a dynamical system

induced by quantum walk

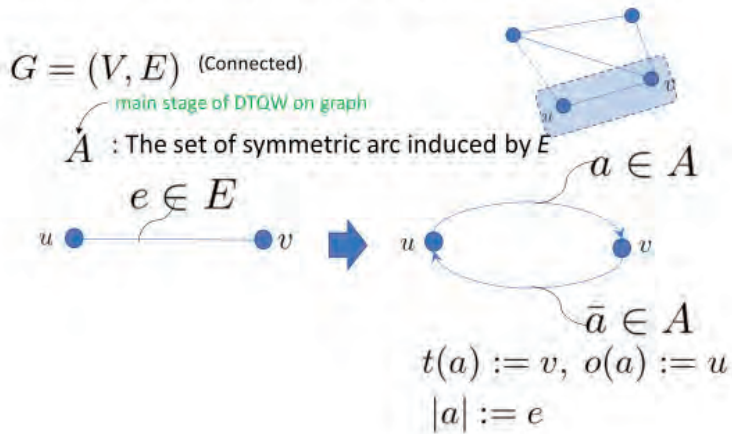
瀬川悦生, 横浜国立大学

Etsuo Segawa, Yokohama National University

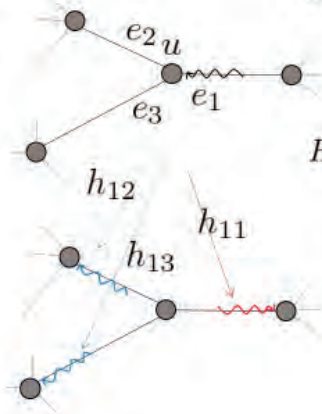
アブストラクト 有限グラフ上の量子ウォークは一般的に、全ての固有値の絶対値が 1 なので、ランダムウォークのような定常状態への収束が期待できない。そこで、有限グラフに幾つかの半無限長の tail をつけ、そこから自由量子ウォーカーを無限に中のグラフに流し込むことを考える。すると、入ってくる自由量子ウォーカーと各 tail へ出ていく量子ウォーカーがちょうど釣り合って、中で定常的なる。入ってくる量子ウォーカーと出ていく量子ウォーカーの関係は、tail の本数が r のときは、 r 次元の Grover 行列によって結ばれる。さらに、定常状態は、各辺の上に抵抗値 1 を配置した電気回路の電流と、対称なランダムウォークの定常状態の和で記述される。

Abstract We propose a quantum model having a fixed point of a dynamical system on a finite graph. To this end, we add infinite length tails on the finite graph and provide infinite free quantum walkers to this internal graph. Then by the restriction of this walk to the internal graph, we obtain a dynamical system. We show that this system converges to the fixed point and the relation between the outflow is described by the Grover matrix transition to the inflow. Moreover the stationary state is a linear combination of an electric current flow and the stationary state of simple random walk.

§ 1 A definition of quantum walk



General graph



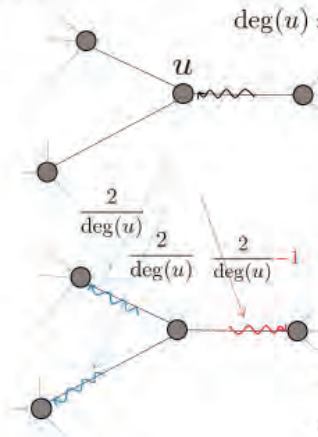
⊙ Table of complex-valued weight associated with the transition at u

= quantum coin

$$H_u = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} \\ h_{12} & h_{22} & h_{32} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{matrix}$$

$\in U(\text{deg}(u))$

"Grover walk"



Remark 1.
Related to "quantum graph"
[Exner, *Rep. Math. Phys.*, **28** (1989), 7–26]
with potential free case

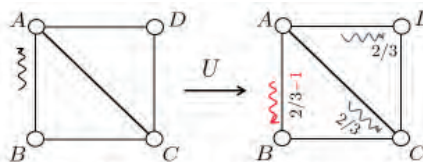
E. Feldman, M. Hillery (2005, *Contemp. Math*)
Higuchi-Konno-Sato-S (2013, *YMJ*)

Remark 2.
There is an underlying isotropic RW
which provides spectrum of Grover walk

Szegedy (2004)
Higuchi Konno Sato S (*JFA*, 2014)
Suzuki and S (*Quantum Stud.: Math. Found* 2015)

Example

Grover walk on

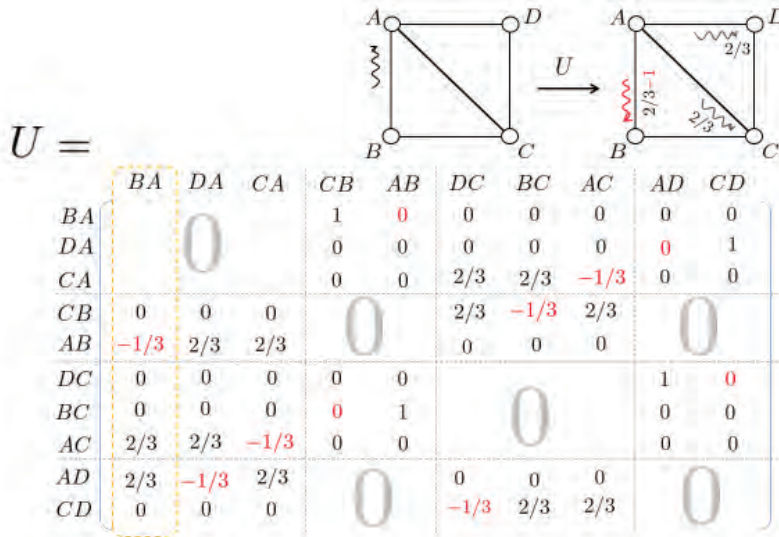


	BA	DA	CA	CB	AB	DC	BC	AC	AD	CD
AB	-1/3	2/3	2/3							
AD	2/3	-1/3	2/3							
AC	2/3	2/3	-1/3							
BC				0	1					
BA				1	0					
CD						-1/3	2/3	2/3		
CB						2/3	-1/3	2/3		
CA						2/3	2/3	-1/3		
DA									0	1
DC									1	0

2-dim Grover matrix

n-dim Grover

$$G_n = \frac{2}{n} J_n - I_n$$



A definition of DTQW

- (1) The total Hilbert space of the DTQW is generated by a given discrete-set Ω

$$\mathcal{H} = \ell^2(\Omega) = \{\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{\omega \in \Omega} |\psi(\omega)|^2 < \infty\}$$

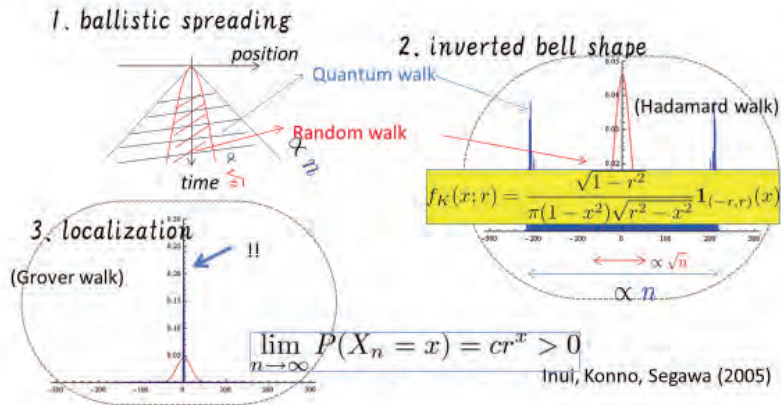
- (2) Time evolution is discrete iteration of a unitary map

$$\begin{array}{ccccccc}
 U : \ell^2(\Omega) & \rightarrow & \ell^2(\Omega) & & \psi_k = U\psi_{k-1} \\
 \psi_0 & \xrightarrow{U} & \psi_1 & \xrightarrow{U} & \dots & \xrightarrow{U} & \psi_n \\
 \phi \downarrow & & \phi \downarrow & & & & \phi \downarrow \\
 \mu_0 & & \mu_1 & & & & \mu_n \quad \mu_n := \phi(\psi_n)
 \end{array}$$

- (3) Probability distribution μ_n is obtained by taking the square modulus of ψ_n

$$\mu_n(\omega) = |\psi_n(\omega)|^2 \quad \left(\begin{array}{l} \Omega' \subset \Omega \\ \mu_n(\Omega') := \sum_{\omega \in \Omega'} \mu_n(\omega) \end{array} \right)$$

Typical behaviors of QW



§ 2 Study purpose and motivation

① Stationarity

RW: P transition matrix (finite)

$$\sigma(P) \subseteq [-1, 1] \text{ and } 1 \in \sigma(P)$$

$$\lambda^n \rightarrow 0 \quad \forall |\lambda| < 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

⇒ Only the ± 1 eigenspaces remain !

⇒ Stationary state is 1 eigenvector

QW: U time operator matrix (finite)

$$\sigma(U) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

⇒ Every eigenspace remains ! ($n \rightarrow \infty$)

⇒ Stationary state ???

(Today's talk)

We propose a construction way to get a stationary state of QW for any connected and finite graph with some modification.

Theorem 2.2 (Matsue Matsuoka Ogurisu and S 2018)

If we assign the following quantum coin,
 then the stationary state of our model is isomorphic to
 that of the resonance tunneling model in the limit of
 $w \downarrow 0$ with $V_0/w \rightarrow \alpha$ ($w \downarrow 0$)

☆ \equiv The resonance tunneling model in the limit $w \downarrow 0$



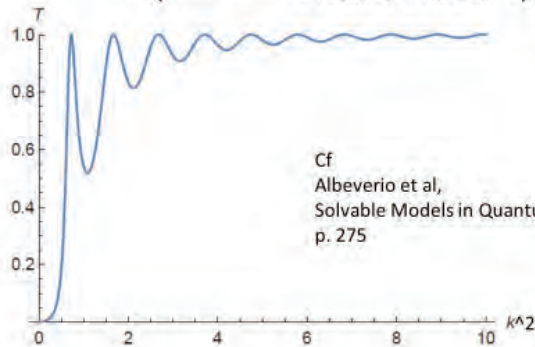
☆ \equiv The quantum coin: $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} (m=1)$

$$\alpha = \gamma = e^{ikL} \left(\frac{2}{2 + i\alpha/k} - 1 \right) \quad \beta = \gamma = \frac{2e^{ikL}}{2 + i\alpha/k}$$

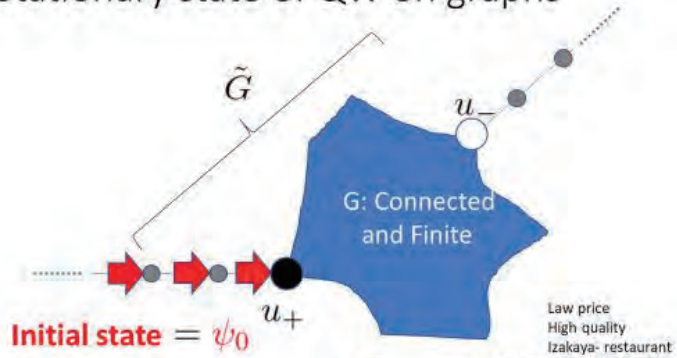
Corollary [The transmitting rate]

$$T = |t|^2 = \left(\frac{1 - \frac{(\alpha/k)^2}{4 + (\alpha/k)^2}}{\left| 1 + e^{2ikL} \frac{2 - i(\alpha/k)}{2 + i(\alpha/k)} \frac{(\alpha/k)^2}{4 + (\alpha/k)^2} \right|} \right)^2$$

($\alpha=1, L=3$)

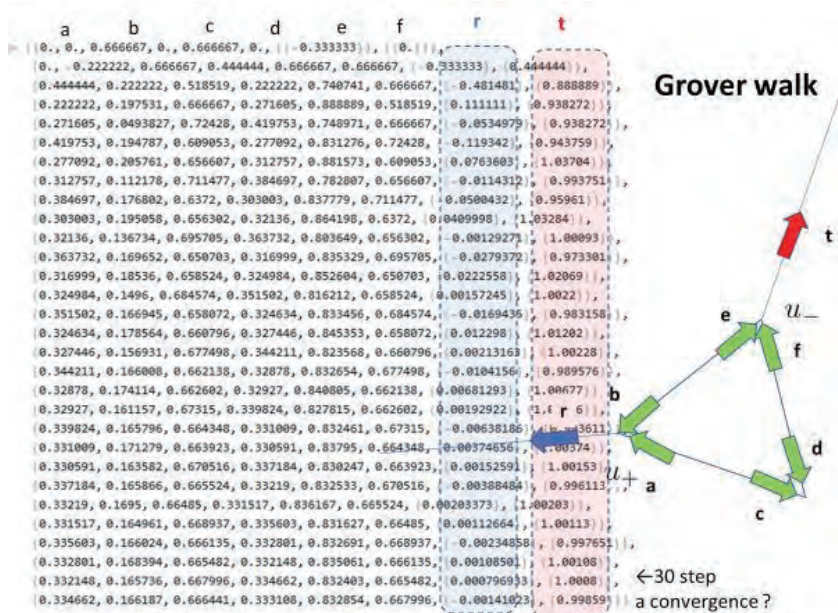


§ 3 Stationary state of QW on graphs



We obtained this idea in our favorite restaurant
 Named "Ponta" in Sendai.
 We called this model "Ponta model"

Higuchi and S, arXiv: 1812.04730



The dynamical system of the internal graph

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \\ e_{n+1} \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

External source $\rho = \chi^U \psi_0$

$$\Rightarrow E_{PON} = \chi^U \chi$$

$$r_{n+1} = 2/3(a_n + b_n) - 1/3, \quad t_{n+1} = 2/3(e_n + f_n)$$

The dynamical system

$$\psi_0 = 0$$

$$\psi_{n+1} = E_{PON} \psi_n + \rho$$

➡ $\psi_n = (1 + E_{PON} + \dots + E_{PON}^{n-1}) \rho$

How to show this?

Remark

E_{PON} is not ensured the normality in general.

So... $E_{PON} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(E_{PON})} E_{PON}|_{W(\lambda)}$

is decomposed into **generalized** eigenspaces
(Jordan decomposition)

* The generalized eigenspace:

$$W(\lambda) := \{\psi \in \mathbb{C}^{A_0} \mid \exists m \geq 1 \text{ s.t.}, (\lambda - E_{PON})^m \psi = 0\}$$

Theorem 3.1 [Higuchi and S 2018+]

Assumptions:

- (1) A unitary time evolution on the arcs
- (2) Free walk on the tails
- (3) Initial state:

$$\Psi_0(a) = \begin{cases} \alpha_j & : a \in A(\text{Tail}_j), \text{dist}(t(a), G_0) < \text{dist}(o(a), G_0) \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n (=:\psi_\infty)$$

What are properties of ψ_∞ for Grover walk ?

Theorem 3.2 [Higuchi and S 2018+]

<Reproductive property of the local dynamics of Grover walk>

$\alpha_j \in \mathbb{C}$: the inflow to u_j $\beta_j \in \mathbb{C}$: the outflow from u_j



$$\begin{bmatrix} 2/r - 1 & 2/r & \cdots & 2/r \\ 2/r & 2/r - 1 & \cdots & 2/r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2/r & 2/r & \cdots & 2/r - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix}$$

Cor. If $r=2$ and $\alpha_1=1, \alpha_2=0$, then the perfect transmitting happens.



Theorem 3.3 [Higuchi and S 2018+]

<The internal graph is dressed by quantum walkers>

$$M(G_0) := \|\psi_\infty|_{A_0}\|^2 = \sum_{a \in A_0} |\psi_\infty(a)|^2$$

Then we have

(The mass in the internal graph)

$$M(G_0) \geq 2|E_0| \cdot |\text{ave}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)|^2$$

Theorem 3.4 [Higuchi and S 2018+]

$$j(a) := \psi_\infty(a) - \text{ave}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$$

For the **Grove walk**,

j is the current flow in the electric circuit described by G_0 assigned resistance value 1 at every edge! (in the following meaning)

(i) Kirchhoff **current** law

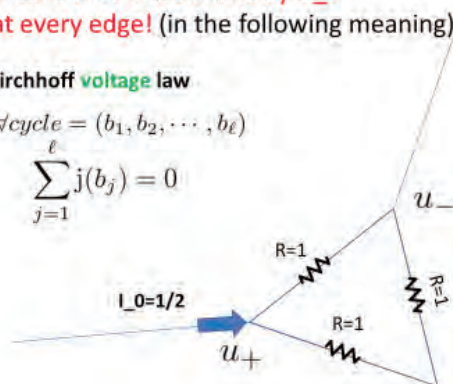
$$j(a) + j(\bar{a}) = 0,$$

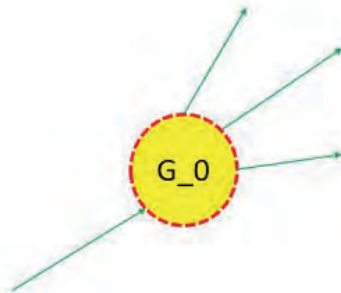
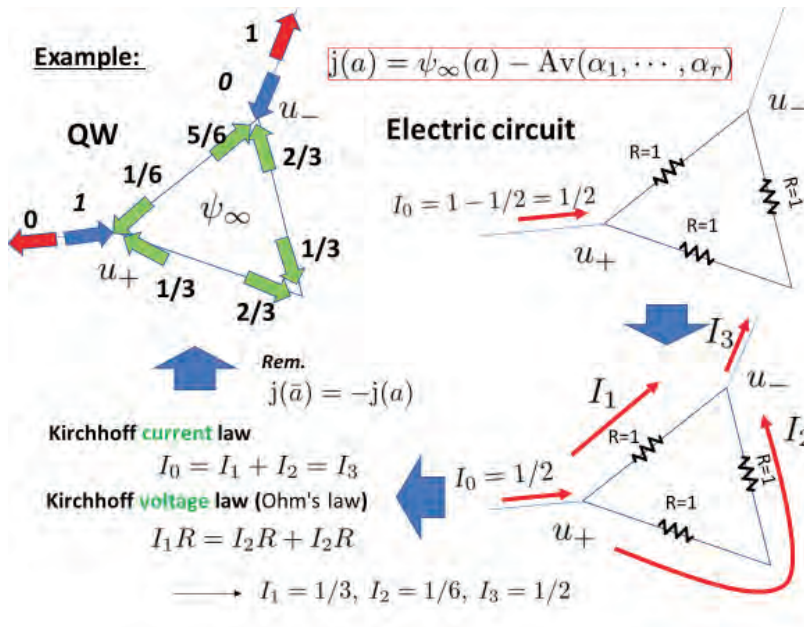
$$\sum_{t(a)=u} j(a) = 0$$

(ii) Kirchhoff **voltage** law

$$\forall \text{cycle} = (b_1, b_2, \dots, b_\ell)$$

$$\sum_{j=1}^{\ell} j(b_j) = 0$$





$$\psi_\infty(a) = j(a) + \text{Ave}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$$

Remark

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_r = 0$$

$$\Leftrightarrow \psi_\infty(a) = j(a) \quad \dots \text{“電流”}$$

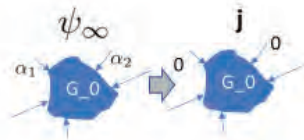
$$\alpha_1 = \dots = \alpha_r =: \alpha$$

$$\Leftrightarrow j(a) = 0 \quad \forall a \in A_0$$

$$\Leftrightarrow \psi_\infty(a) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \mu_\infty(u) = |\alpha|^2 d(u) \propto \mu_\infty^{(RW)}(u)$$

... “ランダムウォーク”



§ 4. Proof of Theorems

Theorem 3.1 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n (=:\psi_\infty)$

Theorem 3.2 A Global scattering reproduces the local scattering.

$$\begin{bmatrix} 2/r-1 & 2/r & \dots & 2/r \\ 2/r & 2/r-1 & \dots & 2/r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2/r & 2/r & \dots & 2/r-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix}$$

Theorem 3.3 The internal graph is dressed by quantum walkers

$$M(G_0) \geq 2|E_0| \cdot |\text{ave}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)|^2$$

Theorem 3.4 Stationary state of QW is a linear combination of the electric current and the reversible measure of RW

$$\psi_\infty(a) = j_{EC}(a) + \text{ave}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) m_{RW}(a)$$

Proof of Thm 3.1

$$\mathbb{C}^{\tilde{A}} := \{\psi \mid \psi: \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}\}$$

$$\mathbb{C}^{A_0} := \{\psi \mid \psi: A_0 \rightarrow \mathbb{C}\}$$

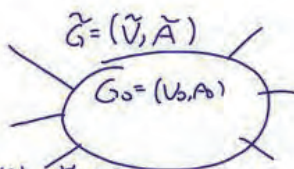
$$\chi: \mathbb{C}^{\tilde{A}} \rightarrow \mathbb{C}^{A_0} \text{ s.t., } (\chi\psi)(a) = \psi(a) \quad \forall a \in A_0$$

$$\chi^*: \mathbb{C}^{A_0} \rightarrow \mathbb{C}^{\tilde{A}} \text{ s.t., } (\chi^*\psi)(a) = \begin{cases} \psi(a) & : a \in A_0 \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

Rem $\chi\chi^* = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^{A_0}}$, $\chi^*\chi = \text{Projection op. w.r.t. } \mathbb{C}^{A_0}$.

$$\tilde{\Psi}_n = U\tilde{\Psi}_{n-1}$$

$$\mapsto \psi_n := \chi\tilde{\Psi}_n$$



$$\begin{aligned} \psi_n &= \chi\tilde{\Psi}_n \in \mathbb{C}^{\tilde{A}} \\ \mathbb{C}^{A_0} &\stackrel{\approx}{=} \chi U\tilde{\Psi}_{n-1} = \underbrace{\chi U}_{E_{\text{pol}}} \underbrace{\chi^* \tilde{\Psi}_{n-1}}_{\psi_{n-1}} + \underbrace{\chi U (1 - \chi^* \chi)}_{\chi U \tilde{\Psi}_0} \tilde{\Psi}_{n-1} \\ &\qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\rho} \end{aligned}$$

★ Dynamical system

$$\begin{cases} \psi_n = E_{\text{pol}} \psi_{n-1} + \rho \\ \psi_0 = 0 \end{cases} \quad |A_0| \times |A_0|$$

Rem. E_{pol} is the submatrix of U w.r.t A_0

$\mapsto E_{\text{pol}}$ is NOT ensured by the normality.

Generalized eigenspace

$$W(\lambda) := \left\{ \psi \in \mathbb{C}^{A_0} \mid \exists m \geq 1 \text{ s.t. } (\lambda - E_{\text{pol}})^m \psi = 0 \right\}$$

$$\mathcal{H}_u := \bigoplus_{|\lambda| > 1} W(\lambda) \quad (\text{unstable g.e.s.})$$

$$\mathcal{H}_c := \bigoplus_{|\lambda| = 1} W(\lambda) \quad (\text{center g.e.s.})$$

$$\mathcal{H}_s := \bigoplus_{|\lambda| < 1} W(\lambda) \quad (\text{stable g.e.s.})$$

Rem. $\mathbb{C}^{A_0} = \mathcal{H}_u \oplus \mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_s$

$\mathcal{H}_u = \emptyset$

Lemma 1

If $|\lambda| = 1$ and $\varphi_\lambda \in \text{Ker}(\lambda - E_{\text{pol}})$, then

$$\xrightarrow{\text{Projection}} E_{\text{pol}}^* \varphi_\lambda = \bar{\lambda}^{-1} \varphi_\lambda$$

Proof $E_{\text{pol}} \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda \Rightarrow \chi U \chi^* \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$

Let us see: $\chi^* \chi U \chi^* \varphi_\lambda = U \chi^* \varphi_\lambda$ — (1)

Assume that

$$\chi^* \chi U \chi^* \varphi_\lambda \neq U \chi^* \varphi_\lambda \Rightarrow \text{supp}(U \chi^* \varphi_\lambda) \cap A_0 \neq \emptyset \quad \circ: |\lambda| = 1$$

$$\Rightarrow \|U \chi^* \varphi_\lambda\| \geq \|\chi U \chi^* \varphi_\lambda\| = \|E_{\text{pol}} \varphi_\lambda\| = \|\varphi_\lambda\|$$

On the other hand,

$$\|U \chi^* \varphi_\lambda\| = \|\chi^* \varphi_\lambda\| = \|\varphi_\lambda\| \quad \text{by unitarity of } U$$

Then the contradiction happens.

Then we have

$$x U x^* \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda \Rightarrow \underbrace{x^* x U x^* \varphi_\lambda}_{\text{By } \textcircled{1}} = \lambda x^* \varphi_\lambda$$

$$\therefore U^{-1} x^* \varphi_\lambda = \lambda^{-1} x^* \varphi_\lambda$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x U^{-1} x^* \varphi_\lambda}{(x U x^*)^*}}_{\substack{\text{E}_{\text{pow}} \\ \text{E}_{\text{pow}}^*}} = \lambda^{-1} \frac{x x^* \varphi_\lambda}{1_{\mathbb{C}^{A_0}}} \quad \square$$

Lemma 2 $\mathcal{H}_c = \bigoplus_{|\lambda|=1} \ker(\lambda - E_{\text{pow}})$

(i.e., $\forall \psi \in W(\lambda) \subset \mathcal{H}_c, (\lambda - E_{\text{pow}})^m \psi = (\lambda - E_{\text{pow}}) \psi = 0$ $\forall m \geq 1$)

Proof $\varphi \in W(\lambda)$ with $(|\lambda|=1)$

$$(\lambda - E_{\text{pow}})^m \varphi = 0, (\lambda - E_{\text{pow}})^{m-1} \varphi \neq 0, \dots, (\lambda - E_{\text{pow}}) \varphi \neq 0$$

Assume $m \geq 2$.

Then $\underbrace{(\lambda - E_{\text{pow}})^{m-1} \varphi}_{\substack{\phi \\ \phi \neq 0}} \in \ker(\lambda - E_{\text{pow}})$

$$\Rightarrow 0 \neq \|\phi\|^2 = \langle (\lambda - E_{\text{pow}})^{m-1} \varphi, \phi \rangle \quad \text{By Lem 1}$$

$$= \langle (\lambda - E_{\text{pow}})^{m-2} \varphi, \underbrace{(\lambda - E_{\text{pow}})^* \phi}_{\substack{\lambda^{-1} \phi \\ \text{E}_{\text{pow}}^* \phi = 0}} \rangle$$

= 0 contradiction. \square

Lemma 3 $\mathcal{H}_c \perp \mathcal{H}_s$ $\lambda \neq 1$

proof) Put

$$\begin{cases} \varphi_\lambda \in W(\lambda) \subset \mathcal{H}_c \quad (|\lambda| = 2) \\ \varphi_\mu \in W(\mu) \subset \mathcal{H}_s \quad (|\lambda| < 1) \\ \text{with } (\mu - E_{\text{pow}})^m \varphi_\mu = 0, (\mu - E_{\text{pow}})^{m-1} \varphi_\mu \neq 0, \dots, (\mu - E_{\text{pow}}) \varphi_\mu \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\mu - E_{\text{pow}})^m \varphi_\mu, \varphi_\lambda \rangle = \langle \varphi_\mu, (\mu - E_{\text{pow}})^{*m} \varphi_\lambda \rangle \quad \text{By Lem 1} \\ &= \langle \varphi_\mu, (\underbrace{\mu^{-1} - \lambda^{-1}}_{\neq 0})^m \varphi_\lambda \rangle \\ \therefore \langle \varphi_\mu, \varphi_\lambda \rangle &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 4 $\rho \in \mathcal{H}_s$

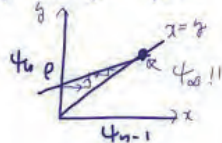
proof put $\varphi_\lambda \in W(\lambda) \subset \mathcal{H}_c \quad (|\lambda| = 2)$

$$\begin{aligned} \langle \rho, \varphi_\lambda \rangle &= \langle \lambda U \bar{\varphi}_0, \varphi_\lambda \rangle \\ &= \langle \bar{\varphi}_0, U^* \lambda^* \varphi_\lambda \rangle \quad \text{By Lem 1} \\ &= \lambda^{-1} \langle \bar{\varphi}_0, \lambda^* \varphi_\lambda \rangle \\ &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

Recall that.

$$\begin{cases} \psi_{n+1} = E_{\text{pow}} \psi_n + \rho \\ \psi_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \psi_n = (1 + E_{\text{pow}} + \dots + E_{\text{pow}}^{n-1}) \rho$$

Then. $\psi_n \in \mathcal{H}_s$



$$\psi_n = E_{\text{pow}} \psi_{n-1} + \rho$$

$$\Rightarrow \psi_\infty = (1 - E_{\text{pow}}|_{\mathcal{H}_S})^{-1} \rho.$$

$$\mathbb{C}^{A_0} = \mathcal{H}_C \oplus \mathcal{H}_S$$

What is \mathcal{H}_C for the Grover walk?

For any cycle $c = (a_1, \dots, a_s)$

$\omega_c \in \mathbb{C}^{A_0}$ is defined by

$$\omega_c(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in \{a_1, \dots, a_s\} \\ -1 & \text{if } a \in \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s\} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



Theorem 3.0

$$\bullet \text{ Ker}(1 - E_{\text{pow}}) = \{\omega_c \mid c \in \text{cycle of } G_0\}$$

$$\bullet \text{ dim Ker}(1 - E_{\text{pow}}) = |E_0| - |V_0| + 1$$

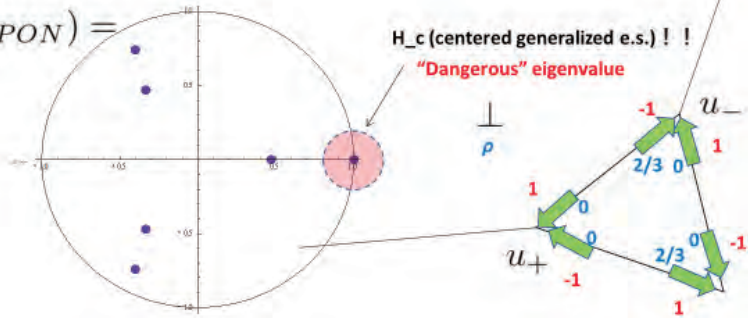
↑
number of the fundamental
cycles.

" "
1st betti number, $b_1(G)$.

Rem $\psi_\infty \perp \omega_c \quad \forall c \in \text{Cycle. for the Grover walk.}$

i.e., $\sum_{j=1}^s (\psi_\infty(a_j) - \psi_\infty(\bar{a}_j)) = 0$

$$\sigma(E_{PON}) =$$



Proof of Thm 3.2

$$\begin{cases} d(u) : \text{degree of } u \text{ in } G_0 \\ \tilde{d}(u) : \quad \quad \quad \tilde{G} \end{cases}$$

Boundedly operator.

$$K: \mathbb{C}^{A_0} \rightarrow \mathbb{C}^{V_0} \text{ s.t.}$$

$$(K)_{\substack{u, a \in A_0 \\ v_0}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d(v_0)}} & : \text{if } t(a) = v_0 \\ 0 & : \text{otherwise.} \end{cases}$$

• Properties of K

$$(i) (KK^*)_{\substack{u, v \in A_0 \\ v_0}} = \delta_{u,v} \cdot \frac{d(u)}{\tilde{d}(u)}$$

"almost" + the identity matrix
unitarily equivalent to RW with SU

$$(ii) (KSK^*)_{u,u} = (T)_{u,u} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d(u)d(v)}} & : u,v \text{ in } G_0 \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(iii) E_{PON} = S(2K^*K - I), \text{ where } S\delta_a = \delta_{\bar{a}}$$

$$f_{in} \in \mathbb{C}^{V_0} \text{ s.t. } f_{in}(u) = \sum_j \alpha_j$$

$j: P(V_j) \cap V_0 = \{u\}$

$$K_n(u) := (K\psi_n)(u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda(u)}} \sum_{\substack{a \in A_0 \\ t(a)=u}} \psi_n(a)$$

Remark 1

The transmitting value to P_j

$$t_n^{(j)} = \frac{2}{\sqrt{\lambda(u)}} K_n(u) + \left(\frac{2}{\lambda(u)} f_{in}(u) - \alpha_j \right)$$

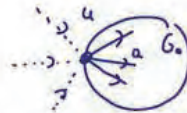
* K_n is the key to obtain $t_n^{(j)}$

penetration from G_0 reflection

Remark 2 Inflow from the tails

$$\rho(a) = (SK^*g_{in})(a)$$

where $g_{in}(u) = \frac{2}{\sqrt{\lambda(u)}} f_{in}(u)$



$$\begin{aligned} K_n &= K\psi_n \\ &= K(1 + E_{p_0} + \dots + E_{p_0}^{n-1}) \rho \\ &= K(1 + E_{p_0} + \dots + E_{p_0}^{n-1}) SK^*g_{in} \\ &= \underbrace{KSK^*g_{in}}_{\mathbb{F}_0} + \underbrace{KE_{p_0}SK^*g_{in}}_{\mathbb{F}_1} + \dots + \underbrace{KE_{p_0}^{n-1}SK^*g_{in}}_{\mathbb{F}_{n-1}} \end{aligned}$$

$\left. \begin{aligned} \psi_{n+1} &= E_{p_0} \psi_n + \rho \\ \psi_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \\ & \text{Remark 2} \end{aligned}$

Lemma $\begin{cases} \xi_0 = T g_{in} \\ \xi_1 = (2T^2 - D) g_{in} \\ \xi_n = 2T\xi_{n-1} + (1-2D)\xi_{n-2} \quad (n \geq 2) \end{cases} \quad (\xi_n := K E_{\text{pad}}^n S K^*)$

∴ Using properties of K \square

By Theorem 3.1. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n :=: K_{\infty}$.

Then, by the above Lemma, we have.

$$\underbrace{(T-D)}_{\uparrow} (2K_{\infty} + g_{in}) = 0$$

?

Lemma. $\text{Ker}(T-D) = \mathbb{C} \tilde{\alpha}^{1/2}$
where $\tilde{\alpha}^{1/2}(u) = \sqrt{\tilde{\alpha}(u)}$.

Proof) $(P')_{u,v} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}(u)}} : u=v \\ & \& u,v \in SV \\ 0 : \text{otherwise} \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} T-D = M^{-1/2} P' M^{1/2} - D \\ = M^{-1/2} (P' - D) M^{1/2} \quad \textcircled{1} \\ = M^{-1/2} (P'D^{-1} - I) D M^{1/2} \\ (M^{1/2})_{u,v} = \delta_{u,v} \sqrt{\tilde{\alpha}(u)} \\ (P_0)_{u,v} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}(u)}} : u=v \\ 0 : \text{otherwise} \end{cases} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} = M^{-1/2} (P_0 - I) D M^{1/2} \quad \textcircled{2} \\ \text{∴ if } f \in \text{Ker}(T-D), \\ D M^{1/2} f = \exists c \tilde{\alpha} \quad \square \end{array} \right.$

Rem. $T = M^{-1/2} P' M^{1/2} \dots \textcircled{1}$
 $P_0 = P'D^{-1} \dots \textcircled{2}$ (By Perron-Frobenius)

Then we have.

$$2K_{\infty} + g_{in} = \exists c \tilde{d}^{1/2}$$

$$\Rightarrow K_{\infty}(u) = -\frac{1}{2} g_{in}(u) + c \sqrt{\tilde{d}(u)}$$

$$\Rightarrow \sum_{a \in \tilde{A}: t(a)=u} \tilde{\Psi}_{\infty}(u) = c \tilde{d}(u) \quad \forall u \in \tilde{V}$$

$$\Rightarrow \tilde{\Psi}_{\infty}(a) + \tilde{\Psi}_{\infty}(\bar{a}) = 2c \quad \forall a \in \tilde{A}$$

$$\Rightarrow t_{\infty}^{(i)} = C - d_j \quad (\star)$$

What is the value of c ?

Lemma. $c = 2 \text{ave}(d_1, \dots, d_r)$

°° By the unitarity of U ,

$$\sum_{j=1}^r |t_{\infty}^{(ij)}|^2 = \sum_{j=1}^r |d_j|^2$$

$$\Rightarrow c = 0 \text{ or } 2 \text{ave}(d_1, \dots, d_r)$$

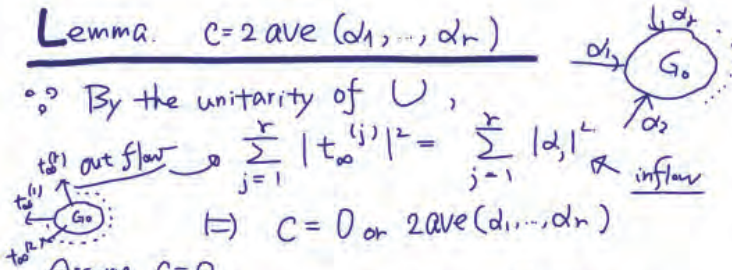
Assume $c=0$.

$$\text{Then } \sum_{a \in \tilde{A}: t(a)=u} \tilde{\Psi}_{\infty}(a) = 0, \quad \tilde{\Psi}_{\infty}(a) + \tilde{\Psi}_{\infty}(\bar{a}) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{u \in V_0} \sum_{a \in A_0: o(a)=u} \tilde{\Psi}_{\infty}(a) = -\sum_{u \in V_0} \sum_{a \in A_0: t(a)=u} \tilde{\Psi}_{\infty}(a) = -(d_1 + \dots + d_r) \\ \sum_{u \in V_0} \sum_{a \in A_0: t(a)=u} \tilde{\Psi}_{\infty}(a) = d_1 + \dots + d_r \end{array} \right.$$

Both of LHS are

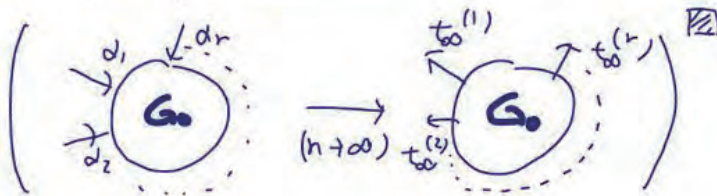
$$\sum_{a \in A_0} \tilde{\Psi}_{\infty}(a) \Rightarrow \text{Contradiction!}$$



Recall that $t_{\infty}^{(j)} = c - d_j$.

Since $c = 2 \text{ave}(d_1, \dots, d_r)$, we have

$$\begin{pmatrix} t_{\infty}^{(1)} \\ \vdots \\ t_{\infty}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/r - 1 & \text{triangle } 2/r \\ \text{triangle } 2/r & 2/r - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{pmatrix}$$



Proof of Thm 3.3 & 3.4

We have already obtained by the previous proofs

$$(1) \frac{1}{\tilde{d}(u)} \sum_{\substack{a \in \tilde{X}: \\ t(a)=u}} \tilde{\Psi}_{\infty}(a) = \frac{1}{\tilde{d}(u)} \sum_{\substack{a \in \tilde{X}: \\ o(a)=u}} \tilde{\Psi}_{\infty}(a) = \text{ave}(d_1, \dots, d_r) \quad (\forall u \in \tilde{V})$$

$$(2) \frac{1}{2} (\tilde{\Psi}_{\infty}(a) + \tilde{\Psi}_{\infty}(\bar{a})) = \text{ave}(d_1, \dots, d_r) \quad (\forall a \in \tilde{X})$$

$$(3) \forall C = (a_1, \dots, a_s) \text{ cycle in } G_0, \sum_{j=1}^s \tilde{\Psi}_{\infty}(a_j) = 0 \quad \leftarrow \text{Thm 3.0}$$

Put $j(a) := \tilde{\Psi}_{\infty}(a) - \text{ave}(d_1, \dots, d_r)$. We see ...

$$\text{By (1) (2)} \begin{cases} j(a) + j(\bar{a}) = 0 \\ \sum_{t(a)=u} j(a) = \sum_{o(a)=u} j(a) = 0 \end{cases} \quad \text{By (3)} \sum_{j=1}^s j(a) = 0 \quad \forall (a_1, \dots, a_s) \in \text{cycle.} \quad \square$$

$$\begin{aligned}
M_0 &:= \|\Psi_\infty|_{A_0}\|^2 \\
&= \sum_{a \in A_0} |\Psi_\infty(a)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{a \in A_0} \left(|\Psi_\infty(a)|^2 + |\Psi_\infty(\bar{a})|^2 \right) \\
M_0 &\geq \frac{1}{2} \sum_{a \in A_0} \frac{1}{2} \underbrace{|\Psi_\infty(a) + \Psi_\infty(\bar{a})|^2}_{2 \operatorname{ave}(d_1, \dots, d_n)} \\
&\quad \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 \geq \frac{1}{2} |\alpha + \beta|^2 \right) \\
&= |A_0| |\operatorname{ave}(d_1, \dots, d_n)|^2 \quad \square
\end{aligned}$$

Summary

arXiv: 1812.04730

Finite graph \rightarrow Semi-infinite graph, ℓ^∞ initial state



" $|\lambda|=1$ "



" $|\lambda|<1$ " + Out source

$$\psi_0 = 0$$

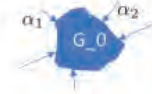
For every quantum walk,

$$\psi_{n+1} = E_{PON} \psi_n + \rho$$

Theorem 3.1

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n (=:\psi_\infty)$$

Summary



For the Grover walk case,

Theorem 3.2 A global scattering reproduces the local scattering.

$$\begin{bmatrix} 2/r - 1 & 2/r & \cdots & 2/r \\ 2/r & 2/r - 1 & \cdots & 2/r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2/r & 2/r & \cdots & 2/r - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix}$$

Theorem 3.3

$$M(G_0) \geq 2|E_0| \cdot |\text{ave}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)|^2$$

Theorem 3.4 The stationary state of QW is a linear combination of the electric current and the reversible measure of RW

$$\psi_\infty(a) = j_{EC}(a) + \text{ave}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) m_{RW}(a)$$

Thanks for your attention!

ドレスト光子シミュレーション: エネルギー移動特性の評価および制御

Numerical Simulation of Dressed Photons: Evaluation of Energy-Transfer Dynamics and Its Control

三宮 俊, 株式会社リコー
Suguru Sangu, Ricoh Company, Ltd.

概 要

本論文では、ドレスト光子のシミュレーションの実現を目指し、その基本となる駆動因子として、ドレスト光子のエネルギー移動、エネルギー散逸、および生成（励起）の導入の仕方を説明し、その結果得られた数値解について考察を与える。また、具体的な（大規模な）構造への適用を考え、ナノ構造を部分的に分割しアダマール行列を適用した本系特有のユニタリー行列による基底変換を提案し、次元圧縮の可能性について議論する。次元圧縮において、くりこみ手法により近似精度を向上する試みを進めており、その概略（途中経過）について説明する。本近似解析手法とドレスト光子の物理描像の間に対応関係があることを予測しており、その考察内容について紹介する。

Abstract

In this paper, the way to introduce driving factors of dressed photons, such as energy transfer, dissipation, and excitation of dressed photons, are explained for realization of the dressed-photon simulation, and characteristics of the dressed photon dynamics are examined numerically. In order to apply the simulation to more complex and larger systems, unique unitary transformation of bases is proposed for reduction of state dimensions, where the Hadamard matrix is utilized in nanometric structures appropriately divided. A method of renormalization is also explained as a future work to improve precision of approximation for dimension reduction. Moreover, relationship between the analytic formulation of renormalization and physical picture of dressed photon is pointed out from scientific interests.

1 はじめに

本研究集会「ドレスト光子に関する基礎的数理研究」において取り上げるドレスト光子は、実験研究が先行して進んでいる分野であり、それらを説明する新しい理論の登場が待たれている[1]。ドレスト光子とは相互作用環境下にある光子であり、環境との相互作用による支援を受けて古典光学および従来の量子光学では説明できない物理現象を捻出する準粒子と考えられている。本研究の目標は、ドレスト光子の振る舞いを定量的に可視化するシミュレーションを構築することである。また、新たな理論、数理モデルの有効性や正統性を検証する仮想的な実験場に発展することを期待している。本発表ではその前段として、シミュレーションに取り込むべきドレスト光子の駆動因子および大規模計算に向けた定式化の方法について議論する。

本シミュレーションにより表現したい物理現象の一つに光ファイバプローブの形状最適化の問題がある。光ファイバプローブは、ナノフォトニクス研究分野では幾分古風な検討対象の印象を受けるが、テーパー構造の根元に位置するマクロ系からプローブ先端のマイクロ系までを連続的につなぐ構造を有しており、この連続的な変化を十分に説明する理論は現時点では知られていない。もしくは、光ファイバプローブの形状最適化は未だ直感的な手段でしか行われていない。また、異なる物理現象として、エンジニアリング的な視点から、間接半導体であるシリコンの発光現象が上げられる。ドレスト光子を媒介することでドーパント原子の自己組織的な配置が決定されるといった、定性的な仮説は提案されているが、定量的な原理究明には至っていない現象がある。これらを数値シミュレーションから推測できるようになれば、これは新規デバイス設計やプロセス開発に役立つことは明白である。

最近のトピックスとして、ドレスト光子のエネルギー移動と量子ウォークとの関連性が指摘されている。すなわち、ドレスト光子の光ファイバプローブ先天への局在や、量子ドット間的高速（バリステック）なエネルギー移動特性が、量子コヒーレンスのもたらす影響であるとの推察である。本シミュレーションでは、まず初めにドレスト光子なる特定の場所に局在する粒子があることを前提とし、実験事実と矛盾のない形で理論拡張していくことを目指している。

本発表のタイトルを、発表申し込み時点で「エネルギー移動特性の評価と制御」としていた。シミュレーションの次元を拡大し、複雑な物質形状の解析にまで足を踏み入れることを想定して「制御」と題したが、その後の進捗が思うように進まず、「制御」に関する話題提供にまで至らなかった。この点はお詫びして、ご了承いただきたい。

以下では、シミュレーションに取り込む現象や重要なパラメータの具体的な

定式化について説明したのち (2 節および 3 節)、初期段階のシミュレーション結果を説明する。次いで、シミュレーションの大規模化を見据えて、基底状態の取り方に関する提案を行い (4 節)、さらにはくりこみ手法を用いた次元圧縮の構想について述べる (5 節)。また 6 節では、粗視化のために用いたくりこみの意味するところについて考察を述べる。最後に、本研究集会での質疑内容を紹介して総括 (まとめ) とする (7 節)。

2 ドレスト光子のシミュレーションモデル

本シミュレーションの取り込まれているドレスト光子の駆動因子の概略を図 1 に示す。図中に表記するようにエネルギー移動をコントロールする仕組みとして 4 つの要素、(1)コヒーレントなエネルギー移動、(2)外場によるコヒーレントな励起、(3)プローブへの散逸、(4)自由光子場への散逸を導入した。概説すると次の通りである。プローブ中に存在するドレスト光子は格子点に局在するが、量子ウォーク的にエネルギー移動すなわちホッピングして近傍の異なる格子点へ移動する。量子ウォーク的と述べたのは、ホッピング (相互作用) の強さを有限距離で広がる湯川関数により与えており、最近接以外の離れた格子点とのカップリングも許容しているためである。ドレスト光子の生成 (励起) は、プローブの末端の面 (ライン) のみで行われると仮定し、コヒーレントに励振を続ける。

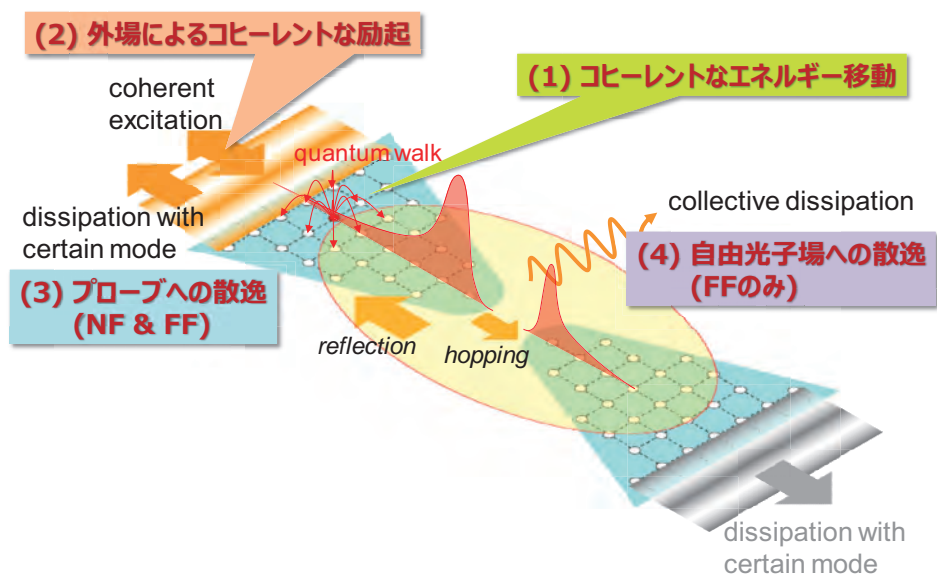


図 1: ドレスト光子シミュレーションの概略

散逸は2つの経路を仮定する。すなわち、プローブ端の面（ライン）からエネルギーを失う過程と、プローブ系全体から自由空間へ散逸する過程を考えている。つまり、プローブの根元側から一方向へエネルギーを流しながらプローブサンプル近傍に停留するドレスト光子の振る舞いを観察する構成となり、これは非平衡開放系をなしている。

具体的なダイナミクスは、以下に述べる密度演算子を用いた量子マスター方程式（Liouville 方程式）により与えられる。一般的な Liouville 方程式は閉じた系を対象としており、上記に述べた散逸項は摂動近似として表現する。

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}(t), \hat{H}] \\
 &\approx \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}(t), \hat{H}_0] \\
 &+ \textcircled{1} \text{コヒーレントなエネルギー移動} \\
 &+ \textcircled{2} \text{コヒーレントな励起} \\
 &+ \textcircled{3} \text{プローブ散逸} \\
 &+ \textcircled{4} \text{自由光子場散逸}
 \end{aligned} \tag{1}$$

これらの各項の記述程の表現方法について以下に説明する。

①コヒーレントなエネルギー移動

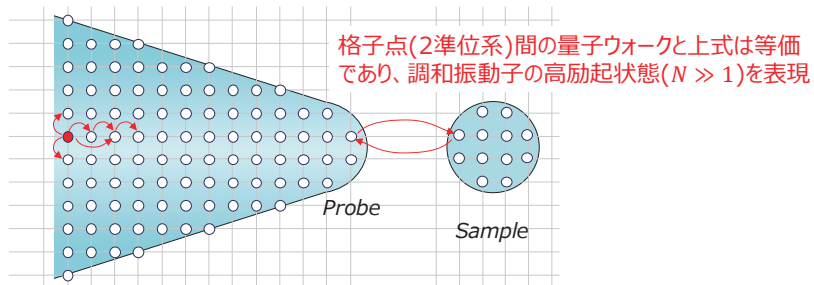
プローブ内部のエネルギー移動を与える相互作用ハミルトニアンを次式により与える。

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{\text{int}} &= \hbar \sum_{i \neq j} Y(|r_i - r_j|) (\hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j + \hat{A}_i \hat{A}_j^\dagger) \\
 Y(r) &= \frac{A \exp(-r/a)}{r}
 \end{aligned} \tag{2}$$

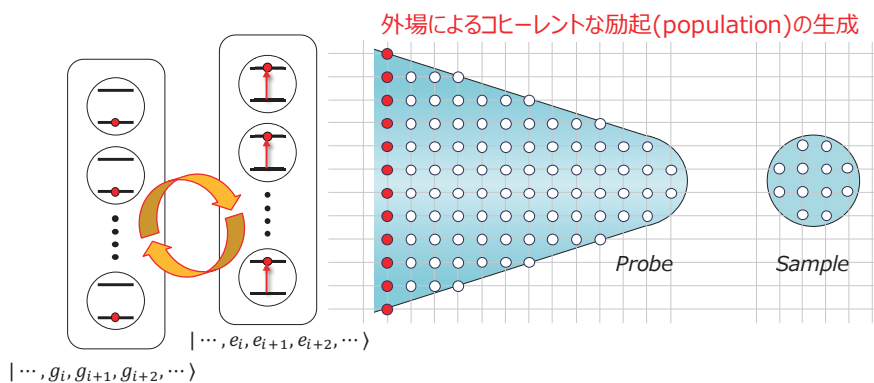
ここで、 i, j は格子点のラベルであり、また2つの格子点間のホッピングの強さを湯川関数で与える（ $i = j$ の点は除外）。図 2(a)はこのエネルギー移動の様子を示している。湯川関数の減衰係数は暫定的に隣接する格子点間の距離 a の逆数に仮定している。係数 A は隣接する格子点間の距離 a の時に大きさが1になるように規格化している。すなわち、 $A = ae$ としている。後の数値解析では、距離 a は実際のスケールに近い値を採択するとして 10nm に設定した。(1)式の量子マスター方程式中で本項は次式のように書き表される。

$$\textcircled{1} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}(t), \hat{H}_{\text{int}}] \tag{3}$$

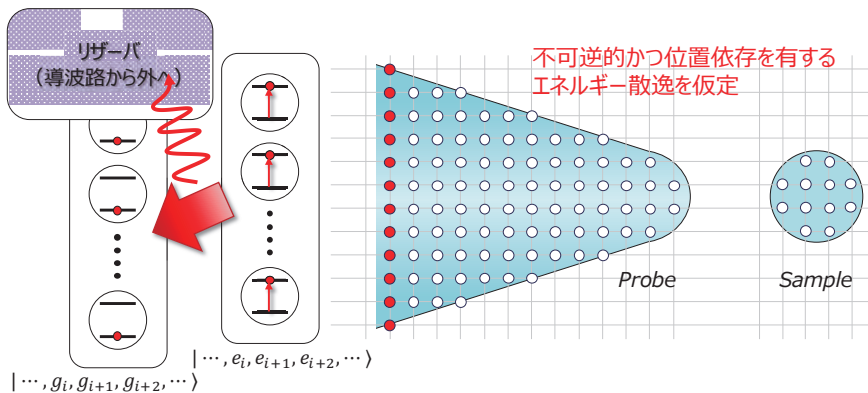
(3)式のように、密度演算子と非対角成分を有するハミルトニアンとの交換関係



(a) コヒーレントなエネルギー移動



(b) 外場によるコヒーレントな励起



(c) プローブへの散逸

図 2: ドレスト光子系における駆動因子

で記述される運動はコヒーレントな章道運動を誘起する。

②コヒーレントな励起

外場とのコヒーレントな相互作用を記述する場合、外場を古典的な場と見なし（係数として扱い）、ドレスト光子を真空状態から生成する、またはドレスト光子を消して真空状態に遷移するように以下の数式にて記述する。

$$\hat{H}_{\text{ext}} = \sum_{i=(\text{input})} \mu_i(t) (\hat{A}_i^\dagger + \hat{A}_i) \quad (4)$$

$$\textcircled{2} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}(t), \hat{H}_{\text{ext}}]$$

ただし、 i は図 2(b) に示すように、プローブ根元の境界面(線)上の格子点である。(4)式は形式的には電気双極子相互作用と同等であるが、生成・消滅する粒子はドレスト光子であることに注意を払いたい。

③プローブへの散逸

熱浴（リザーバ）への散逸は、最も基本的な摂動モデル（Born-Markov 近似）を用いた場合、次式のような Lindblad 方程式と呼ばれる形式で表現できる。

$$\textcircled{3} = \frac{\gamma_{WG}}{2} \sum_{i,j=(\text{edge})} \{2\hat{A}_i \hat{\rho}(t) \hat{A}_j^\dagger - \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j\} \quad (5)$$

この項は、遷移行列に書き出すとエネルギー準位の占有確率に比例した減衰（減衰定数： γ_{WG} ）を示し、レーザレート方程式と同等の構造を有する[2]。図 2(c) に散逸の様子を図式的に示した。この散逸項はプローブを介した影響をシミュレートするものであるが、波長以下の構造からの散逸であるものと考え、微分方程式の連続境界条件ではなく、エバネッセント的な減衰として表現している。

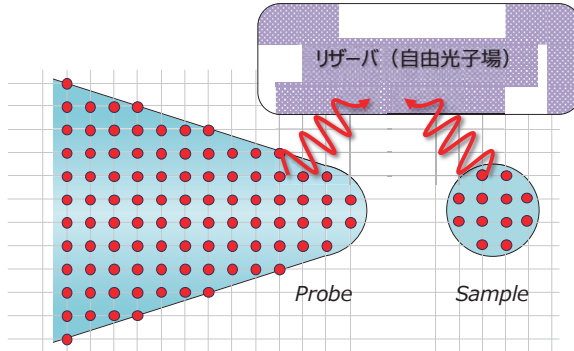
④自由光子場への散逸

自由光子場への散逸も③と同様の考え方である（図 2(d)参照）。ただし、すべての格子点の和を取っている。

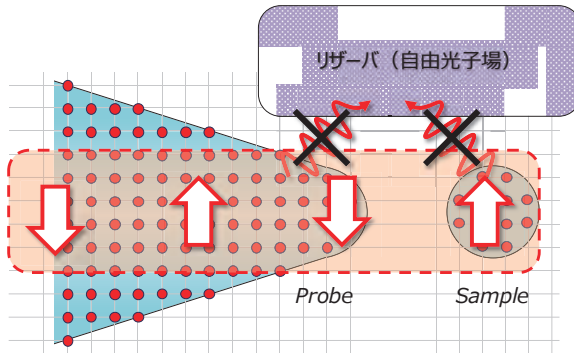
$$\textcircled{4} = \frac{\gamma_{fp}}{2} \sum_{i,j} \{2\hat{A}_i \hat{\rho}(t) \hat{A}_j^\dagger - \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j\} \quad (6)$$

(6) 式の和は、プローブ先端の禁制（ダーク）状態もしくは四重極子の遠方場光子との禁制状態を含める意図がある（図 2(e)参照）。

以上、(1)式中の①～④の内容について用いた数式とともに概説した。これらの項を(1)の運動方程式に代入し、数値シミュレーションを行った。



(d) 自由光子場への散逸



(e) 放射禁制状態

図 2: ドレスト光子系における駆動因子(続き)

3 近接場光相互作用の記述

次に、(2)式において導入した相互作用（ホッピング）の強さについて、その導出方法を概説する。図 3 は環境との相互作用中におかれた 2 つのナノ物質間の遷移の様子を図示している。これを、図 3 の右図に示すように、2 体間のエネルギー移動と見なしたい。そこで、注目したい主系（P 空間）と環境にあたる副系（Q 空間）とを考え、射影演算子を導入してこれらを分離する。有限自由度をもつ P 空間を初期状態および終状態とし、Q 空間の寄与は中間（仮想）状態としてくりこむことを考える。すなわち、次式に示す変形を行う。

$$V = \langle \Psi_f | \hat{H}_{\text{int}} | \Psi_i \rangle = \langle \Psi_f^P | \hat{V}_{\text{eff}} | \Psi_i^P \rangle \quad (7)$$

導出の詳細は文献[3]に譲るが、Q 空間の状態は次式のように無限級数の形で記述できる。

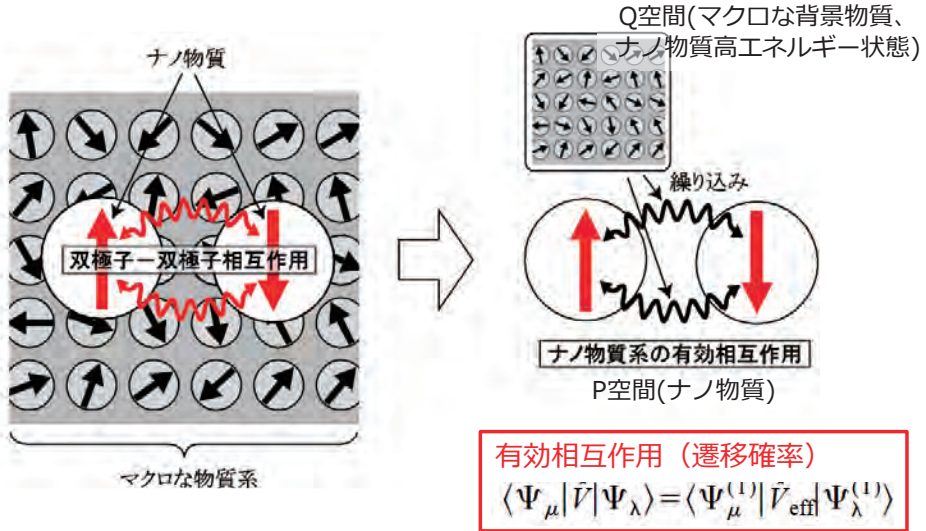


図3: 環境中に置かれたナノ物質間の相互作用

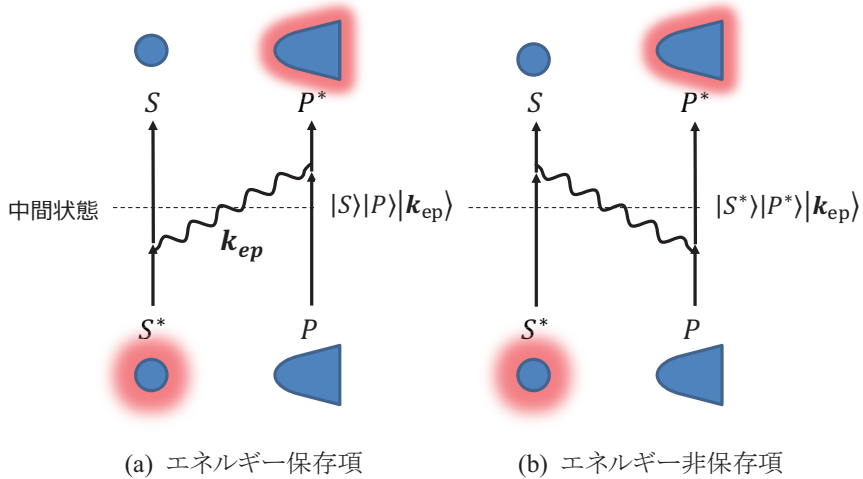


図4: エネルギー移動を表すダイヤグラム

$$\hat{Q} |\phi_i^{(0)}\rangle = \left[1 + (E_i - \hat{H}_0)^{-1} \hat{Q} \hat{V} + \dots \right] (E_i - \hat{H}_0)^{-1} \hat{Q} \hat{V} \hat{P} |\phi_i^{(P)}\rangle \quad (8)$$

1 次の相互作用項までに制限すると、有効相互作用は次式のように表わされる。

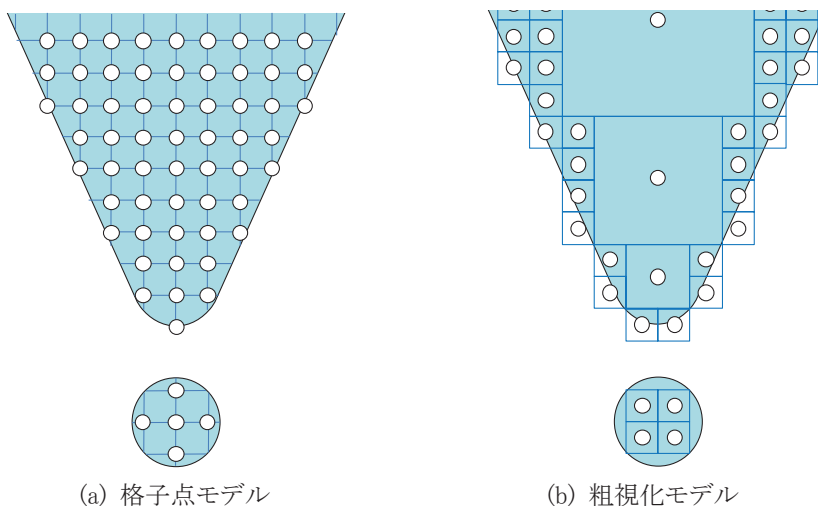
$$V_{\text{eff}} = \sum_j \langle \psi_f^P | P \hat{V} Q | \psi_j^Q \rangle \langle \psi_j^Q | Q \hat{V} P | \psi_i^P \rangle \left(\frac{1}{E_i^P - E_j^Q} + \frac{1}{E_f^P - E_j^Q} \right) \quad (9)$$

この相互作用を表すダイヤグラムを図4に示した。図4(a)は、始状態にサンプル

側にある励起が、サンプル側を基底状態に落とし、中間状態の励起子ポラリトンを生成する。その後、励起子ポラリトンを消滅し、プローブ側に励起を生成する。これは、エネルギー保存の成り立つ過程で、(9)式において遅延効果をもつ球面波を生成する。ただし、高い波数を有し、局在する性質に従わない成分として、無視している。(今後、この項の効果についても考えていく必要がある。) 短距離の局在性をもつ相互作用は図 4(b)であり、サンプルが励起状態にある始状態から、環境からエネルギーを借りて先に励起子ポラリトンを生成し、この励起子ポラリトンを通じてプローブが励起状態に遷移し、またサンプル側の励起を環境に渡してエネルギー損得のない状態に戻る。この状態は仮想的であり、(9)式において湯川関数で表わされる項を生成する。また、その相互作用距離は、考えるナノ系のサイズ程度となる。(2)式の湯川関数の指数の肩に現れる格子間距離 a は上記の有効相互作用を定性的に反映した関数になっている。

4 基底関数の取り方(粗視化へ)

(1)式の密度演算子による運動方程式に N 個の格子点の直積で与えられる状態を作用させた密度行列を数値的に解析することによりドレスト光子エネルギー移動のダイナミクスを得る。図 5(a)はプローブ形状を例に、格子点を2次元的に可視化した図である。当然ながら、物質系が大きくなり、または形状が複雑化し、格子点数が増えるにしたがい解くべき微分方程式の本数が N のべき乗で増加していくため、解析領域を大きく取れないのが現状である。対して、図 5(b)は後述



(a) 格子点モデル

(b) 粗視化モデル

図 5: プローブ形状のモデリング(格子点の取り方)

する粗視化のイメージを表しているが、現時点では説明を省略する。まず、図5(a)のモデルを用い、(1)式の運動方程式の定常解を算出した結果を図6示す[4]。図6の(a)と(b)の差異は、テーパの根元（上段部）の形状であり、(b)のほうがプローブ先端部までドレスト光子を移動しやすい形状となっている。図は上段から、採用した格子点モデル、ドレスト光子存在確率の2次元マッピング結果、プローブ中央断面（線）における存在確率の1次元分布である。(b)の場合のほうが(a)に比べて、プローブ先端のドレスト光子存在確率が2倍強の増強が見られる。その原因については現時点で十分に究明できていないが、(a)の形状にお

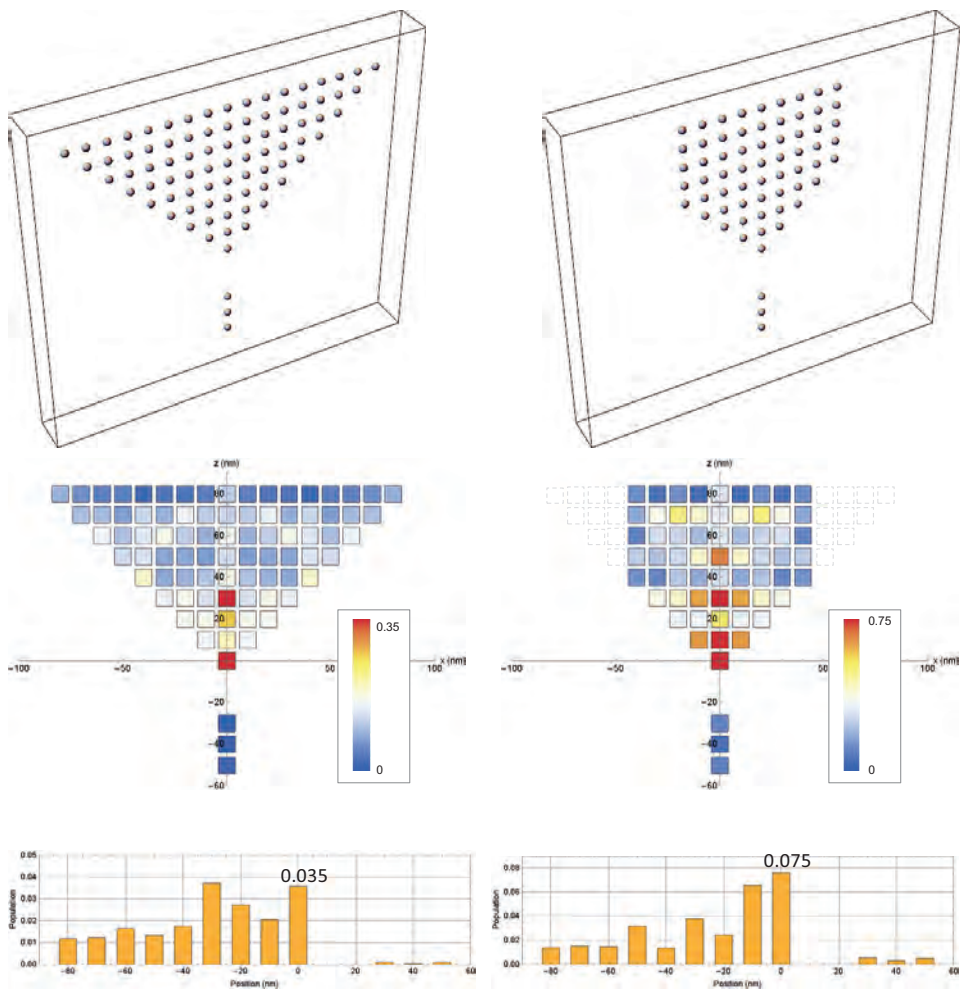


図6: テーパープローブ形状のシミュレーション

いてドレスト光子の存在確率の高い格子点より根元の形状を除去することにより、低波数成分が停留しにくい状態にすることを狙ったものである。詳細は計算機による最適化計算より明らかにしていく予定であるが、上述したように計算のボリュームを上げることは大きな効果を生まず、計算を簡略化するアルゴリズムを考案することが重要である。

図 5(a)のように格子点におけるドレスト光子の有無を基底状態とすると、3次元形状のプローブのような、大規模な系には対応が難しい。そのため、図 5(b)のような、プローブを部分的に重心となる格子点とその相対運動で表わすモデルへの変換（基底変換）を試みた。図 5(b)は、プローブ根元および中央部に位置する格子点の集合を多重極子のように一まとめにして記述することを図示している。ただし、プローブの根元の大きな構造であっても、表面近傍の微細な構造変化は細かい格子点でそのまま表現されていることが特徴である。以前より、マクロからミクロにつながるテーパー構造のモデルを質量（相互作用距離）の異なる湯川関数で記述することができないか、との指摘があるが、注目するスケールを場所により変えて表現する本手法は、上述の定性的な物理描像に近い定式化ではないかと考えている。

実際の計算過程を説明するために、1次元チェーンモデルの基底変換を考える。（本基底変換に主題を移すため、これ以降の議論は1次元チェーン構造に限定す

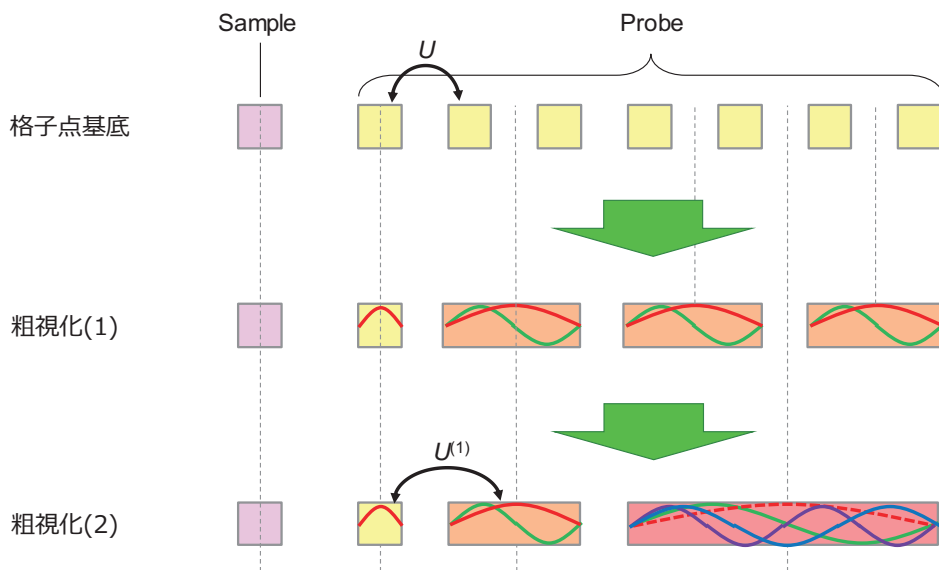


図 7: 1次元チェーンの粗視化イメージ

る。) 図 7 は基底変換の過程を 3 段階で図示している。これまで考えていた格子点基底を、複数格子点の重心に対称なモードとして見直す (粗視化(1))。次いで、プローブのより根元 (右側) 部分をさらに大きな構造体と見なし、異なる波数のモードで展開する (粗視化 (2))。つまり、格子点基底を採用した場合と、場所 (サイズ) 依存のモードで展開した場合の観測量(期待値)は同値であり、ナノ構造の特徴的な構造抽出を行っているが、数式的には単なるユニタリー変換による基底変換を行っているに過ぎない。

このユニタリー変換の数式的な詳細を説明する。図 7 に示した基底変換は「アダマール変換」と呼ばれるものに対応している。アダマール行列とは、次式によって再帰的に生成される行列である。

$$\mathbf{H}_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{m-1} & \mathbf{H}_{m-1} \\ \mathbf{H}_{m-1} & -\mathbf{H}_{m-1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{H}_m \mathbf{H}_m^\dagger = \mathbf{I}$$

ただし、 $\mathbf{H}_0 = \mathbf{1}$ である。図 8 に、アダマール行列 (変換) を数値 (行列) およびグレースケール画像として表わした。(10)式にしたがい生成される行列はナチュラル型と呼ばれるもので、その秩序がわかりにくい。そこでウォルシュ型と呼ばれる、正と負の符号の反転回数順に行の位置を並び替えたものにより視覚化されることが多い。図 8 に示すように、 $m=16$ ぐらいまで可視化すると左上から右下に向かって周波数が増加している様子が確認できる。アダマール行列は 2^m 次元のフーリエ変換であることが知られており、係数部分を除いて変換行列が 1 と -1 の 2 値からなり、高速な画像圧縮等の処理に利用されている。この行列を作用させることは、図 7 の下段の一つのブロックの内部自由度を各モードに分解表示することに対応している。

次に、このアダマール行列を (1 次元) プローブの各ブロックに割り当てる。この割り当ての仕方を図 9 に、その行列要素をグレースケール画像で表し、図解する。7 個の格子点からなるプローブを先端部から、1 個、2 個、4 個の格子点の集合に分割し、それぞれの領域に対応するにアダマール行列を対角位置に配したユニタリー行列を作成する。図 9 にグレースケール画像と対応する行列の数値を可視化している。数値列の赤枠がプローブを構成するブロックであり、青枠はサンプルを表している。また、枠のない 1 行目および 1 列目はドレスト光子の真空状態に対応している。

上記に説明したプローブ形状を (現時点では) 人為的に分割し作成したユニタリー行列を用い、(1)式の運動方程式の密度行列および各種演算子に作用させ、定常解を算出した結果を図 10 に示す。図 10(a)は 1 次元チェーンの各格子点におけるドレスト光子の存在確率をプロットした図である (従来手法)。1 格子点

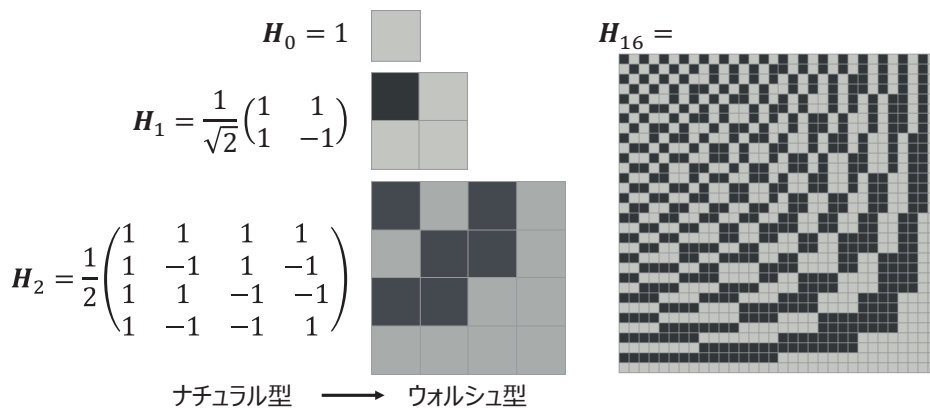


図 8: アダマール行列

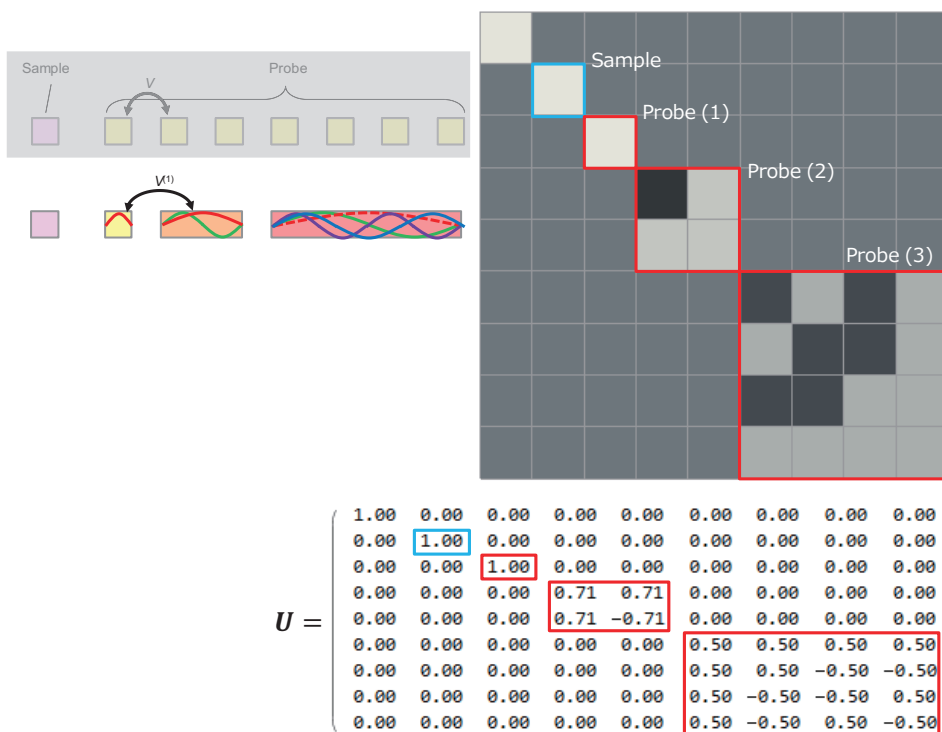


図 9: アダマール行列による基底変換のためのユニタリー行列

おきにドレスト光子の存在確率の大小が現れ、プローブ端部で定在波的にドレスト光子が停留することがわかる。また、サイト数が少ないのでわかりにくいですが、プローブを表す格子点の両端部のドレスト光子存在確率が中央部に比べてやや

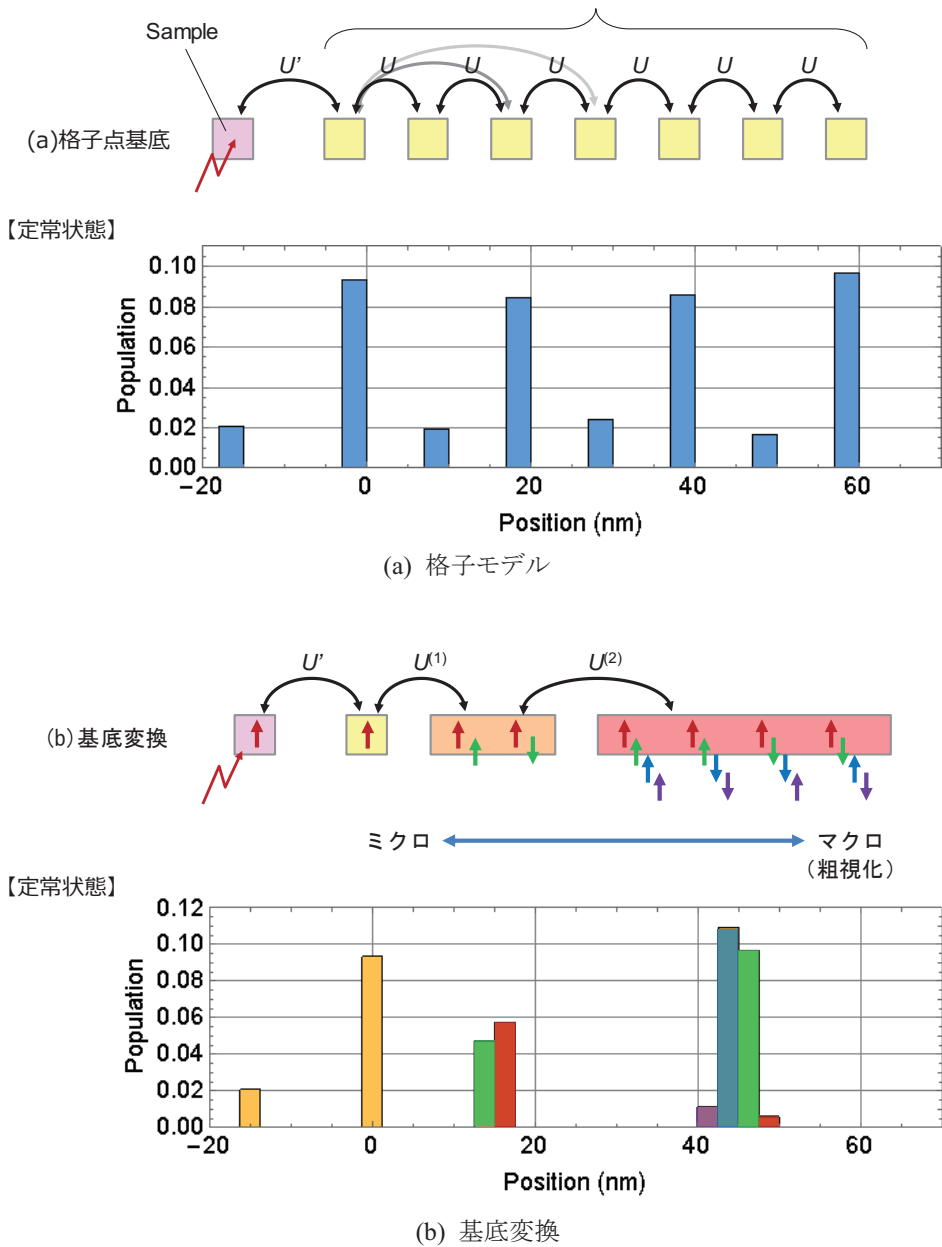


図 10: 1次元チェーンのドレスト光子存在確率(定常状態)

高く、逆正弦則として認識される振る舞いが確認できる。これに対し、図 10(b) は図 9 に示した上記で説明したユニタリー変換を施し、変換後の基底でプロットした各モードの存在確率である。格子点の集合をブロックで表現した領域は、重心座標位置にその含まれるモードをプロットしている。本結果は、同じ系を、

基底を換えて計算しているだけであり、図 10(a)と(b)は等価であることは言うまでもなく、両者の一致も確認している。図 10(b)で特筆すべきことは、4つの格子点からなるブロックの内部モードにおいて、その存在確率に差異が見られ、本

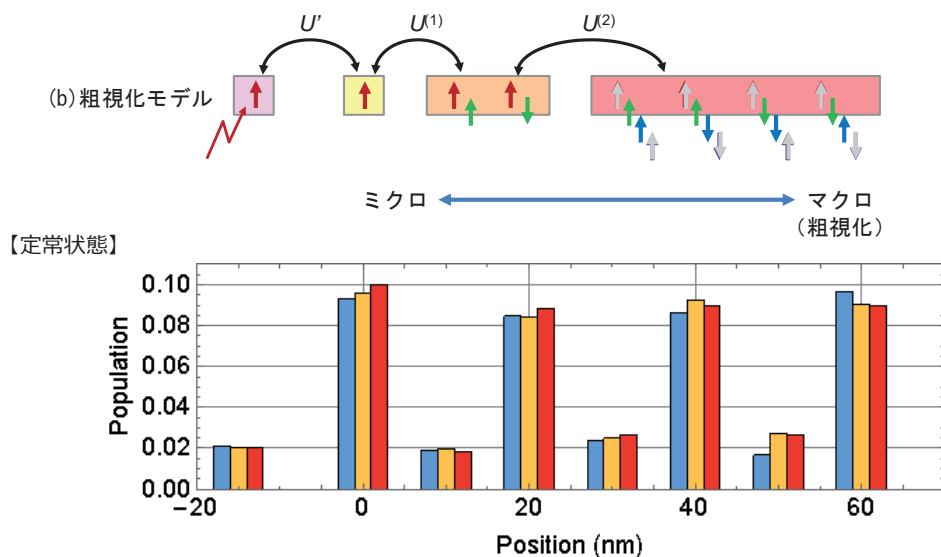


図 11: 寄与の小さな成分を除去した際のドレスト光子存在確率

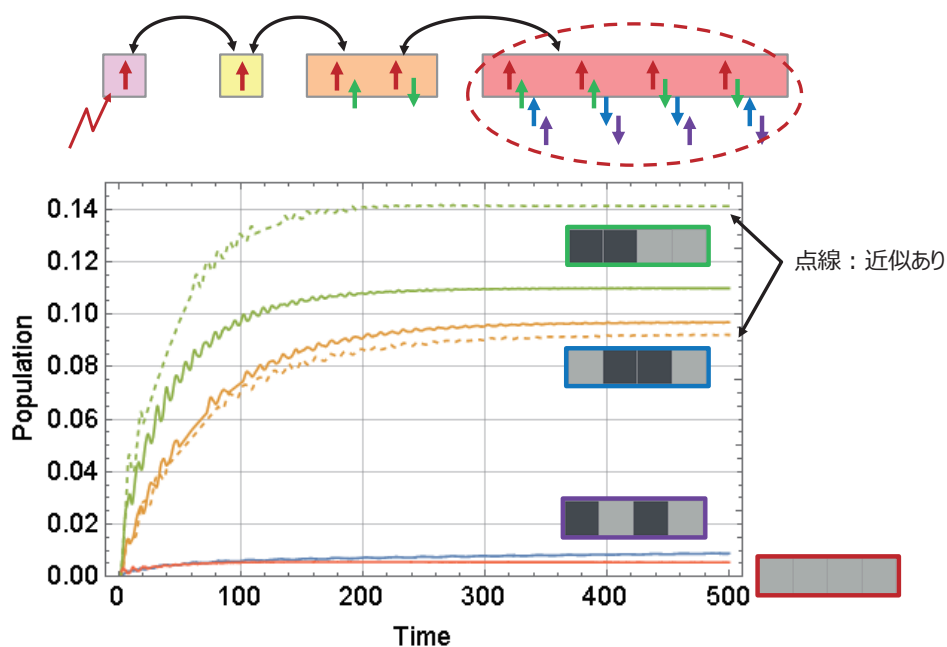


図 12: 粗視化構造内に含まれるモードの時間発展

システムのダイナミクスにおいて寄与の低いモードが存在することである。具体的には、波数の最も低い成分と、最も高い成分の存在確率が低くなるという結果である。

図 11 は、図 10(b)で寄与の少ないモードを省略して（次元低減して）計算を行った結果である。低波数成分を除去した結果を橙色、低周波成分と高周波成分の両方を除去した結果を赤色で示している。また、青色は次元低減なし場合の結果である。わずかな存在確率の低下がみられるが、定性的にはポピュレーションの空間分布は一致しており、近似としての妥当性を確認することができる。図 12 に参考として、4つの格子点からなるブロックにおけるドレスト光子存在確率の時間変化を近似有無の両方の場合についてプロットした。定常解に向かう初期段階から、寄与の小さな低周波成分および高周波成分は小さく、系全体のダイナミクスへの寄与が小さいことがわかる。

5 粗視化方法：マクロ系のくりこみ

前節の結果から大規模計算における次元低減の可能性、有効性は確認できるが、次元低減にともない計算精度を失っていく近似方法ではあまり有用ではない、そこでくりこみの方法の導入を検討している。ただし、本稿作成時点でその手法を確立できておらず、本節の内容は現在検討を進めている途中段階のものである。その概念について以降に説明する。

粗視化（次元圧縮）までのフローを図 13 に示した。格子点モデルから出発し、アダマール行列を用いた基底変換を行い、次いで系をドレスト光子のダイナミクスへの寄与が低い成分と（副系（Q 空間））とそれ以外（主系（P 空間））に分割し、Q 空間の寄与を P 空間に作用する有効相互作用に取り込む。数式的には以下の手順になる。P 空間と Q 空間の分割は以下の射影演算子を用いて行う。

$$\begin{aligned}\hat{P} &\equiv \sum_j |\phi_j^{(P)}\rangle \langle \phi_j^{(P)}| \\ \hat{Q} &\equiv \sum_j |\phi_j^{(Q)}\rangle \langle \phi_j^{(Q)}|\end{aligned}\tag{11}$$

このとき、Q 空間の状態は P 空間の状態を用いて次式のように書くことができる。

$$\begin{aligned}(E_i - \hat{H}_0)\hat{Q}|\phi_i\rangle &= \hat{Q}\hat{V}\left(\hat{P}|\phi_i^{(P)}\rangle + \hat{Q}|\phi_i^{(Q)}\rangle\right) \\ \hat{Q}|\phi_i^{(Q)}\rangle &= \left[1 - (E_i - \hat{H}_0)^{-1}\hat{Q}\hat{V}\right]^{-1}(E_i - \hat{H}_0)^{-1}\hat{Q}\hat{V}\hat{P}|\phi_i^{(P)}\rangle\end{aligned}\tag{12}$$

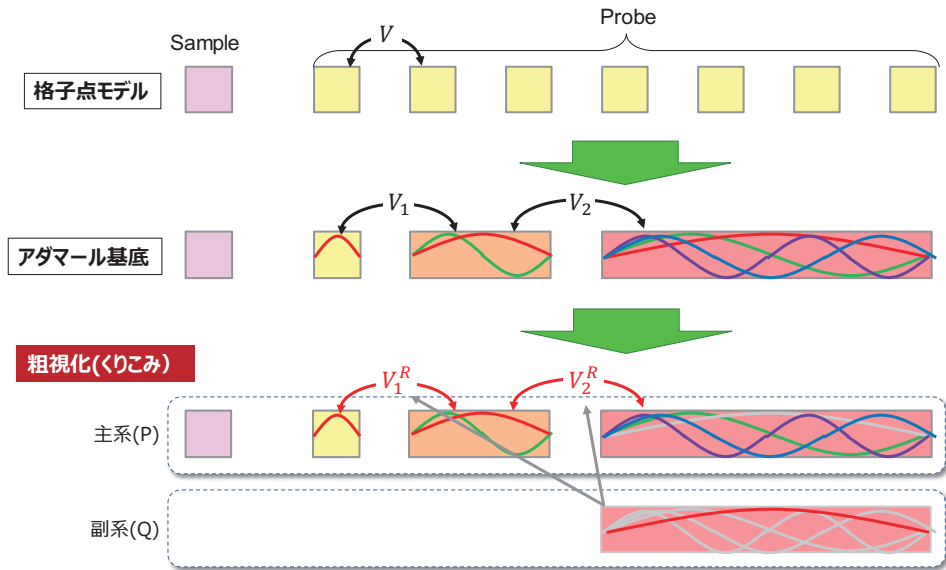


図 13: マクロ系のくりこみ方法

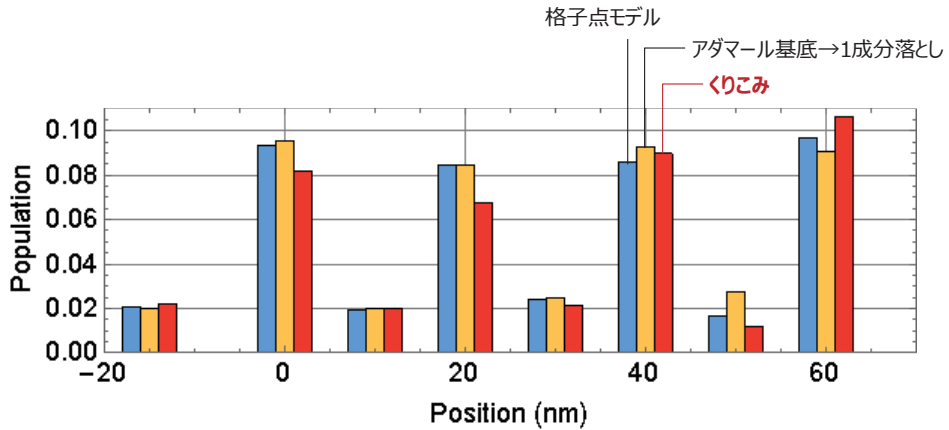


図 14: くりこみ後の定常状態 (失敗事例)

$$= \left[1 + (E_i - \hat{H}_0)^{-1} \hat{Q} \hat{V} + \dots \right] (E_i - \hat{H}_0)^{-1} \hat{Q} \hat{V} \hat{P} \left| \phi_i^{(P)} \right\rangle$$

1 行目の Schrödinger 方程式を用いることで、Q 空間の状態を P 空間の状態の摂動展開として与えている。最終的な有効相互作用は、(12)式の Q 空間の状態を中間状態として見なすことによって、次式のように表される。

$$\langle \phi_f | \hat{V} | \phi_i \rangle = \langle \phi_f | (\hat{P} + \hat{Q}) \hat{V} (\hat{P} + \hat{Q}) | \phi_i \rangle \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \phi_f^{(P)} | \hat{P} \hat{V} \hat{P} | \phi_i^{(P)} \rangle \\
&+ \langle \phi_f^{(P)} | \hat{P} \hat{V} (E_i - \hat{H}_0)^{-1} \hat{Q} \hat{V} \hat{P} | \phi_i^{(P)} \rangle + \langle \phi_f^{(P)} | \hat{P} \hat{V} \hat{Q} (E_f - \hat{H}_0)^{-1} \hat{V} \hat{P} | \phi_i^{(P)} \rangle \\
&+ \dots \\
&\approx \langle \phi_f^{(P)} | \hat{V} | \phi_i^{(P)} \rangle \\
&+ \sum_j \left(\frac{1}{E_i - E_j^{(Q)}} + \frac{1}{E_f - E_j^{(Q)}} \right) \langle \phi_f^{(P)} | \hat{V} | \phi_j^{(Q)} \rangle \langle \phi_j^{(Q)} | \hat{V} | \phi_i^{(P)} \rangle
\end{aligned}$$

(13)式を用いて、相互作用 V の 1 次の摂動までを考慮して計算した結果を図 14 に赤色の棒グラフで示す。結果として、現時点では一致が得られていない。その原因としては、本システムにおける散逸の影響が上記のくりこみの方法では考慮されていないためと推察している。これについては今後改良を進めていく。

ところで、(13)式の最終行第 2 項に現れる P 空間と Q 空間の遷移行列に注目すると、これは図 15 に示すように、粗視化のブロックを構成する内部の格子点の間に働く湯川型の相互作用の積算が含まれている。本システムは少数の格子点からなる 1 次元チェーンであったが、テーパー構造などの多数の格子点からなる系を想像すると、距離の異なる湯川関数の積算となり（図 15 参照）、これは異なる有効相互作用距離をもつ湯川関数に漸近していくのではないかと考えている。つまり前半で述べたが、粗視化した構造のサイズ程度の減衰距離をもつ湯川関数として書き直すことができるのではないかと考えている。このことについて、次節で簡単な考察を述べる。

6 諸々の考察

前節で述べたくりこみの方法から、次の 2 つの点について考察または今後の取り組みについて述べたい。一つは、くりこみと湯川関数の相互作用距離であり、もう一つは粗視化したブロックとリザーバとの関連性についてである。

一つ目について、従来のくりこみの手法は、一般的には、観測が困難であるミクロな効果を観測可能なマクロのパラメータにくりこむことで質量が補正される、質量を獲得するプロセスになっている。一方、本発表で述べたくりこみはマクロな効果をミクロなパラメータに反映させようとするものであり、著者の推察が正しければこれは質量を解放するプロセスとなっている。ドレスト光子のミクロな構造からマクロな構造への連続的なつながりを考えた場合、ドレスト光子の質量が徐々に低減し、マクロな系に到達した際には質量ゼロの自由光子

1次の補正項

$$\begin{aligned} \langle \phi_f^{(P)} | \hat{V} | \phi_j^{(Q)} \rangle \langle \phi_j^{(Q)} | \hat{V} | \phi_i^{(P)} \rangle &= \sum_j \left(\frac{1}{E_i - E_j^{(Q)}} + \frac{1}{E_f - E_j^{(Q)}} \right) \langle \phi_f^{(P)} | \hat{V} | \phi_j^{(Q)} \rangle \langle \phi_j^{(Q)} | \hat{V} | \phi_i^{(P)} \rangle \\ &\sim \frac{1}{2^{(L+M+N)/2}} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \underbrace{\left(\frac{1}{E_i - E_m^{(Q)}} + \frac{1}{E_f - E_m^{(Q)}} \right) \frac{\exp(-\mu|r_n - r_m|) \exp(-\mu|r_m - r_l|)}{|r_n - r_m| |r_m - r_l|}} \end{aligned}$$

質量を軽くした湯川関数に漸近？

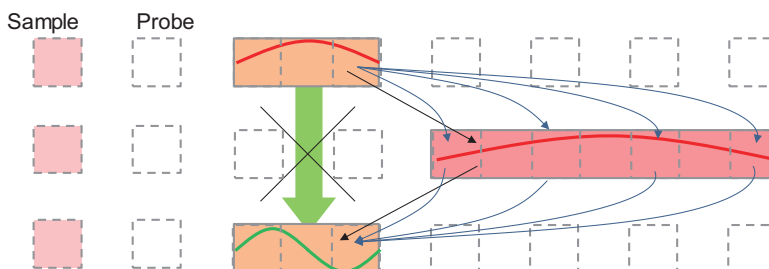


図 15: マクロ系のくりこみの解釈

場と等価になるものと推察する。この直感的な物理描像は上述した湯川関数の有効相互作用距離の伸長に何やら関係があるように思われ、今後の研究対象として考えていきたい。

二つ目について、図 15 に示した複数格子点からなるブロックと、摂動近似によるブロック内の特定モードの寄与の除外は、多数の自由度へのエネルギー散逸の描像をイメージさせる。これはリザーバの効果そのもののように思われる。すなわち、複数存在する粗視化ブロックは、多数のリザーバからなる複合システムをなしているように思われる。リザーバとのエネルギーのやり取りや、異なるリザーバ間の相互作用など、こちらも今後検討していく課題である。

7 まとめ

本発表のまとめに代えて、質疑に取り上げられた内容を記載しておく。まず、マクロ系の効果をミクロ系にくりこむという考え方についての議論があった。近似が破綻する危険性が強いとの指摘があった一方で、マクロ系の変化がミクロ系へもたらす影響を観察する窓としての重要な知見が得られるかもしれないとのコメントもあった。また、大規模計算へのアプローチという意味と、物理現象の理解という側面とが共存しており、もう少し切り分けて議論する必要がある。

本発表では、異なるサイズのアダマール変換を空間の一部分で採用するアプ

ローチを採用したが、基底の取り方の自由度に関する議論があった。特に、実空間と周波数空間の窓サイズを調整するウェーブレット基底とドレスト光子の分散関係の対応に関する意見交換があった。アダマール基底は単なる 2 値のフーリエ変換であり、ドレスト光子の特徴にあった基底を抽出する指針についても今後検討していきたい。

本稿の途中でも述べたが、ドレスト光子がテーパー構造をエネルギー移動する描像と(湯川関数の)相互作用距離が徐々に小さくなる直感的描像との一致、不一致に関する議論があった。格子点の集合が相互作用距離の長い大きな粒子と等価であるかは明確にできておらず、再考すべき課題である。

謝辞

2 年間にわたり九州大学 IMI 研究集会において発表をさせていただき、各方面の専門家の方々の貴重な情報交換、意見交換の場をご提供いただきました。心より感謝申し上げます。

参考文献

- [1] T. Yatsui (ed.), *Progress in Nanophotonics 5* (Springer, Heidelberg, 2018).
- [2] H. J. Carmichael, *Statistical Methods of Quantum Optics 1* (Springer, Berlin, 1999).
- [3] K. Kobayashi et al., *Phys. Rev. A* 63 (2001) 013806; 大津「ドレスト光子ー光・物質融合工学の原理」(朝倉書店) .
- [4] 三宮・他, 2018 年第 79 回応用物理学会秋季学術講演会, 19a-437-7 (2018).

「マス・フォア・インダストリ研究」シリーズ刊行にあたり

本シリーズは、平成 23 年 4 月に設立された九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 (IMI) が、平成 25 年 4 月に共同利用・共同研究拠点「産業数学の先進的・基礎的共同研究拠点」として、文部科学大臣より認定を受けたことにもない刊行するものである。本シリーズでは、主として、マス・フォア・インダストリに関する研究集会の会議録、共同研究の成果報告等を出版する。各巻はマス・フォア・インダストリの最新の研究成果に加え、その新たな視点からのサーベイ及びレビューなども収録し、マス・フォア・インダストリの展開に資するものとする。

平成 30 年 10 月
マス・フォア・インダストリ研究所
所長 佐伯 修

ドレスト光子に関する基礎的数理研究

マス・フォア・インダストリ研究 No.14, IMI, 九州大学

ISSN 2188-286X

発行日 2019 年 3 月 18 日

編集 佐久間 弘文, 大津 元一, 小嶋 泉, 福本 康秀, 山本 昌宏, 納谷 昌之

発行 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

〒819-0395 福岡市西区元岡 744

九州大学数理・IMI 事務室

TEL 092-802-4402 FAX 092-802-4405

URL <http://www.imi.kyushu-u.ac.jp/>

印刷 社会福祉法人 福岡コロニー

〒811-0119 福岡県糟屋郡新宮町緑ヶ浜 1 丁目 11 番 1 号

TEL 092-962-0764 FAX 092-962-0768

シリーズ既刊

Issue	Author / Editor	Title	Published
マス・フォア・インダストリ 研究 No.1	穴田 啓晃 安田 貴徳 Xavier Dahan 櫻井 幸一	Functional Encryption as a Social Infrastructure and Its Realization by Elliptic Curves and Lattices	26 February 2015
マス・フォア・インダストリ 研究 No.2	滝口 孝志 藤原 宏志	Collaboration Between Theory and Practice in Inverse Problems	12 March 2015
マス・フォア・インダストリ 研究 No.3	笈 三郎	非線形数理モデルの諸相：連続，離散，超離散， その先 (Various aspects of nonlinear mathematical models : continuous, discrete, ultra-discrete, and beyond)	24 March 2015
マス・フォア・インダストリ 研究 No.4	穴田 啓晃 安田 貴徳 櫻井 幸一 寺西 勇	Next-generation Cryptography for Privacy Protection and Decentralized Control and Mathematical Structures to Support Techniques	29 January 2016
マス・フォア・インダストリ 研究 No.5	藤原 宏志 滝口 孝志	Mathematical Backgrounds and Future Progress of Practical Inverse Problems	1 March 2016
マス・フォア・インダストリ 研究 No.6	松谷 茂樹 佐伯 修 中川 淳一 上坂 正晃 濱田 裕康	結晶のらせん転位の数理	10 January 2017
マス・フォア・インダストリ 研究 No.7	滝口 孝志 藤原 宏志	Collaboration among mathematics, engineering and industry on various problems in infrastructure and environment	1 March 2017
マス・フォア・インダストリ 研究 No.8	藤原 宏志 滝口 孝志	Practical inverse problems based on interdisciplinary and industry-academia collaboration	20 February 2018
マス・フォア・インダストリ 研究 No.9	阿部 拓郎 高島 克幸 縫田 光司 安田 雅哉	代数的手法による数理暗号解析 Workshop on analysis of mathematical cryptography via algebraic methods	1 March 2018
マス・フォア・インダストリ 研究 No.10	阿部 拓郎 落合 啓之 高島 克幸 縫田 光司 安田 雅哉	量子情報社会に向けた数理的アプローチ Mathematical approach for quantum information society	26 December 2018

Issue	Author / Editor	Title	Published
マス・フォア・インダストリ 研究 No.11	松谷 茂樹 佐伯 修 中川 淳一 濱田 裕康 上坂 正晃	結晶転位の先進数理解析 Advanced Mathematical Investigation for Dislocations	7 January 2019
マス・フォア・インダストリ 研究 No.12	滝口 孝志	Non-destructive inspection for concrete structures and related topics	13 February 2019
マス・フォア・インダストリ 研究 No.13	宇波 耕一 長野 智絵 吉岡 秀和 田上 大助 白井 朋之	数理農学における時系列データのモデル化と解析 Modeling and Analysis of Time Series Data in Math- Agro Sciences	28 February 2019



Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

〒819-0395 福岡市西区元岡744
URL <http://www.imi.kyushu-u.ac.jp/>