

シェル理論・膜理論への微分幾何学からの アプローチとその建築曲面設計への応用

編集：早川健太郎・軸丸芳揮・横須賀洋平・可香谷隆
林和希・堺雄亮

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

シェル理論・膜理論への微分幾何学からの アプローチとその建築曲面設計への応用

早川健太郎, 軸丸芳揮, 横須賀洋平, 可香谷隆, 林和希, 堺雄亮

About MI Lecture Note Series

The Math-for-Industry (MI) Lecture Note Series is the successor to the COE Lecture Notes, which were published for the 21st COE Program “Development of Dynamic Mathematics with High Functionality,” sponsored by Japan’s Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology (MEXT) from 2003 to 2007. The MI Lecture Note Series has published the notes of lectures organized under the following two programs: “Training Program for Ph.D. and New Master’s Degree in Mathematics as Required by Industry,” adopted as a Support Program for Improving Graduate School Education by MEXT from 2007 to 2009; and “Education-and-Research Hub for Mathematics-for-Industry,” adopted as a Global COE Program by MEXT from 2008 to 2012.

In accordance with the establishment of the Institute of Mathematics for Industry (IMI) in April 2011 and the authorization of IMI’s Joint Research Center for Advanced and Fundamental Mathematics-for-Industry as a MEXT Joint Usage / Research Center in April 2013, hereafter the MI Lecture Notes Series will publish lecture notes and proceedings by worldwide researchers of MI to contribute to the development of MI.

October 2018

Osamu Saeki

Director

Institute of Mathematics for Industry

Differential geometric approaches to shell membrane theory and their applications to architectural surface design

MI Lecture Note Vol.83, Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University
ISSN 2188-1200

Date of issue: July 28, 2021

Author: Kentaro Hayakawa, Yoshiki Jikumaru, Yohei Yokosuka, Takashi Kagaya,
Kazuki Hayashi, Yusuke Sakai

Publisher:

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

Motooka 744, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0395, JAPAN

Tel +81-(0)92-802-4402, Fax +81-(0)92-802-4405

URL <https://www.imi.kyushu-u.ac.jp/>

シェル理論・膜理論への微分幾何学からの アプローチとその建築曲面設計への応用

早川健太郎¹ 軸丸芳揮² 横須賀洋平³ 可香谷隆² 林和希¹ 堺雄亮¹

¹ 京都大学大学院工学研究科建築学専攻

² 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

³ 鹿児島大学学術研究院理工学域工学系

概要

建築の構造設計におけるシェル構造や膜構造において、材料の力学的特性を活かすためには曲げやせん断が生じず、面内膜応力で釣り合う形状が理想とされる。特に薄いシェルや膜に関する理論は、Kirchhoff-Love の仮定に基づき、シェルの中央面を曲面とみなすことで、線型弾性体に対して微分幾何の手法を応用した Love-Galerkin-Novozhilov (1964) らの理論が代表的であり、特に膜はモーメントが生じない場合に相当する。

一方で、Rogers-Schief [9] らの研究において、法線方向に一定の荷重がかかり、主曲率方向に面内せん断が生じない釣り合い状態の膜が、「可積分な」曲面であることが示された（以下、膜 O 曲面 (membrane O surfaces) と呼ぶ）。本レクチャーノートでは、古典曲面論の基礎から始め、Rogers-Schief らの膜 O 曲面論の解説を与える。さらに施工性の観点から、これらの可積分性を保つ離散化理論を展開し、建築曲面設計への適用例について紹介する。

目次

1	曲面論の基本理論, Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式	2
1.1	準備	3
1.2	Gauss-Weingarten の公式, 線型表現	6
1.3	正規直交枠による表現と Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式	7
1.4	平行曲面	10

2	シェル理論・膜理論における釣り合い方程式	13
2.1	シェル理論の略史 ([8, 1 節])	13
2.2	シェルの力の釣り合い方程式 ([8, 6 節])	14
2.3	膜理論と線型 Weingarten 曲面	17
2.4	純せん断 (Pure shear) の場合 ([12, 13])	19
3	膜理論における可積分幾何 (膜 O 曲面論 [9])	22
3.1	O 曲面の定義 [11]	22
3.2	膜の釣り合い第 1, 2 式と Combescure 変換	25
3.3	膜の釣り合い第 3 式と直交条件: Rogers-Schief の定理	26
3.4	膜 O 曲面の第一積分による特徴づけ	28
3.5	膜 O 曲面の形状が定める応力分布	29
4	様々な膜 O 曲面	31
4.1	法線方向の荷重ゼロのとき: 極小曲面の Combescure 変換	31
4.2	特殊化: 線型 Weingarten 曲面	32
5	離散微分幾何と離散膜理論 (純せん断の場合)	34
5.1	離散曲面論の基礎 [3]	34
5.2	純せん断の場合 [12]	37
6	力の分布と釣合形状の幾何学的関係に関わる関連理論	40
6.1	Graphic statics	40
6.2	Thrust network analysis	41
7	Rogers-Schief 論文の理論にもとづく釣合曲面の形態創生	43
7.1	極小曲面における応力分布の確認	43
7.2	極小曲面における force surface から form surface の生成	43
7.3	form surface の構築例	47

1 曲面論の基本理論, Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式

本節では古典的な曲面論を復習し, 曲面の正規直交枠が満たす Gauss-Weingarten の公式と, その両立条件である Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式を導出する [10, 6].

1.1 準備

$D \subset \mathbb{R}^2$ を平面内の単連結領域とし、座標を (x, y) で表すこととする。 $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ をベクトル値関数とする、すなわち関数の三つ組

$$X(x, y) = {}^t(X_1(x, y), X_2(x, y), X_3(x, y))$$

を考える（以下、ベクトルは縦ベクトルで表す）。偏微分 $\partial X / \partial x, \partial X / \partial y$ を下付きの添字 X_x, X_y で表すこととする。 X が**正則曲面 (regular surface)** であるとは、 X の Jacobi 行列

$$J_X = (X_x, X_y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x} & \frac{\partial X_3}{\partial y} \end{pmatrix}$$

が D 上至るところランク 2 であるときをいう。

注意 1.1. 以下の主張は同値である：

- (1) ベクトル X_x, X_y は一次独立である。
- (2) 外積（ベクトル積） $X_x \times X_y$ がゼロベクトルでない。
- (3) Jacobi 行列 J_X がランク 2 である。
- (4) 行列

$$g := {}^t J_X J_X = \begin{pmatrix} {}^t X_x \\ {}^t X_y \end{pmatrix} (X_x, X_y) = \begin{pmatrix} {}^t X_x X_x & {}^t X_x X_y \\ {}^t X_y X_x & {}^t X_y X_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle X_x, X_x \rangle & \langle X_x, X_y \rangle \\ \langle X_y, X_x \rangle & \langle X_y, X_y \rangle \end{pmatrix}$$

に対し、 $\det g > 0$ (g は**第一基本行列**と呼ばれる)。

上記のいずれか（ゆえに全部）を満たすとき、 X は（正則）曲面を定めるという。逆にこれらが満たされないうき、曲面には“カド（特異点）”が生ずる。

以下では正則曲面を単に曲面と呼ぶこととする。ベクトル X_x, X_y は曲面の接ベクトルを与え、それらの外積 $X_x \times X_y$ は曲面の法方向を向く。正則曲面の仮定より $\|X_x \times X_y\| > 0$ であるから、単位法ベクトル

$$\nu := \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|}$$

が定義される。曲面 X の第一・第二基本形式を以下の式で定義する：

$$I := Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2, \quad E = \langle X_x, X_x \rangle, F = \langle X_x, X_y \rangle, G = \langle X_y, X_y \rangle, \\ II := Ldx^2 + 2Mdx dy + Ndy^2, \quad L = \langle X_{xx}, \nu \rangle, M = \langle X_{xy}, \nu \rangle, N = \langle X_{yy}, \nu \rangle.$$

慣習的に、 L, M, N の代わりに小文字の e, f, g を用いる論文や教科書も多いが、ここでは上記の記号を用いる。また

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

とおき、それぞれ**第一基本行列**、**第二基本行列**と呼ぶ。曲面の「曲がり具合」を表す曲率は、単位法ベクトル ν の変化率、すなわち微分 $d\nu$ の情報によって定義される。いま $\langle \nu, \nu \rangle = 1$ の両辺を x で微分すると $\langle \nu_x, \nu \rangle = 0$ が得られるので、 ν_x は法ベクトル ν と直交し、接ベクトル X_x と X_y の一次結合で表せる。 ν_y に対しても同様の考察ができ、

$$-\nu_x = S_{11}X_x + S_{21}X_y, \quad -\nu_y = S_{12}X_x + S_{22}X_y.$$

と表せる。この係数に現れる行列 $S = (S_{ij})$ を**形作用素 (shape operator)**と呼ぶ。

定義 1.2 (主曲率, 平均曲率, Gauss 曲率). S の固有値 κ_1, κ_2 を**主曲率 (principal curvatures)**と呼び、対応する固有ベクトルを**主方向 (principal directions)**と呼ぶ。 $\kappa_1 = \kappa_2$ となる点を X の**臍点 (umbilic point)**と呼ぶ。また、

$$H := \frac{1}{2} \operatorname{tr} S = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2), \quad K := \kappa_1 \kappa_2$$

とおき、 H, K をそれぞれ曲面 X の**平均曲率 (mean curvature)**、**Gauss 曲率 (Gauss curvature)**と呼ぶ。

定義 1.3. $I \subset \mathbb{R}$ を区間とする。曲線 $\gamma : I \rightarrow D$ が**曲率線 (line of curvature)**であるとは、区間 I の各点で接ベクトル γ' が形作用素 S の固有ベクトル (すなわち主方向) であるときをいう。座標 (x, y) が**曲率線座標 (curvature line coordinates)**であるとは、各点 $(a_1, a_2) \in D$ において座標曲線 $\gamma_1(x) = (x, a_2)$ 、 $\gamma_2(y) = (a_1, y)$ がともに曲率線であるときをいう。

定理 1.4 ([14, 定理 B-5.1]). 臍点以外の点の近傍においては、曲面 X に曲率線座標を導入することができる。また臍点以外の点の近傍において、座標 (x, y) が曲率線座標であるためには、第一・第二基本行列 g, h がともに対角化されること、すなわち $F = M = 0$ となることが必要十分である。

定理 1.5 (Weingarten の公式). (x, y) が曲率線座標のとき, 形作用素 S は以下のように表すことができる:

$$S = \begin{pmatrix} L/E & 0 \\ 0 & N/G \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

証明. $\langle X_x, \nu \rangle = 0$ の両辺を x で微分すると $\langle X_{xx}, \nu \rangle = \langle X_x, -\nu_x \rangle$ を得るので, $E = \langle X_x, X_x \rangle$, $F = \langle X_x, X_y \rangle = 0$ とから

$$L = \langle X_{xx}, \nu \rangle = \langle X_x, -\nu_x \rangle = \langle X_x, S_{11}X_x + S_{21}X_y \rangle = S_{11}E$$

となる. 同様にして, $\partial_y(\langle X_y, \nu \rangle) = 0$ より, $N = S_{22}G$, $\partial_y(\langle X_x, \nu \rangle) = \partial_x(\langle X_y, \nu \rangle) = 0$ より, $S_{12} = S_{21} = 0$ が導かれることから主張を得る. \square

注意 1.6. 一般の座標においても $S = hg^{-1}$ が成り立ち, この関係式を **Weingarten の公式**と呼ぶ.

補題 1.7. 曲面 $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ が臍点のみからなると仮定すると, X は球面あるいは平面の一部である.

証明. 仮定より $\kappa_1 = \kappa_2$ であり, Weingarten の公式より

$$\nu_x = -\kappa_1 X_x, \quad \nu_y = -\kappa_2 X_y = -\kappa_1 X_y \quad (1.2)$$

を得る. 両立条件 $\nu_{xy} = \nu_{yx}$ より, $(\kappa_1)_y X_x - (\kappa_1)_x X_y = 0$ を得る. X_x, X_y は一次独立であるから, $(\kappa_1)_x = (\kappa_1)_y = 0$ となり, D の連結性から $\kappa_1 = \kappa_2$ は定数でなければならない. 以下 $\lambda = \kappa_1 = \kappa_2$ とおく.

$\lambda = 0$ のとき, $\nu_x = \nu_y = 0$ ゆえ単位法ベクトル場 ν は定写像であるから $\partial_x(\langle X, \nu \rangle) = 0$, $\partial_y(\langle X, \nu \rangle) = 0$ となり, $\langle X, \nu \rangle$ は定数となる. ゆえに X は平面の一部である.

一方で $\lambda \neq 0$ のとき, $(X - \nu/\lambda)_x = (X - \nu/\lambda)_y = 0$ であるから $X - \nu/\lambda$ は定ベクトル c である. $X - c = \nu/\lambda$ ゆえ $|X - c| = 1/|\lambda|$ となるので, X は中心 c , 半径 $1/|\lambda|$ の球面の一部である. \square

命題 1.8. 曲面 $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ が臍点のみからなるとすると, X には第一基本形式と第二基本形式をともに対角化するような座標 (x, y) が存在する.

証明. 補題 1.7 より, X は球面あるいは平面の一部であるとしてよい. 平面の場合, $X(x, y) = (x, y, 0)$ として座標を入れればよい. X が原点中心, 半径 r の球面である場合に示せばよく, 例えば立体射影の逆像

$$X(x, y) = \frac{r}{1 + x^2 + y^2} (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1)$$

を考えると,

$$I = H^2(dx^2 + dy^2), \quad II = -\frac{H^2}{r}(dx^2 + dy^2), \quad H = \frac{2r}{1 + x^2 + y^2}$$

が得られるので主張が示された. \square

以下では一般の曲面において臍点を除いた近傍においては定理 1.4 によって, あるいは球面か平面の一部である場合には命題 1.8 によって第一・第二基本形式がともに対角化されるような座標を入れ, これらをまとめて「曲面が曲率線座標をもつ」ということとする.

1.2 Gauss-Weingarten の公式, 線型表現

以下, 曲面 X は曲率線座標 (x, y) で表されているとする. $\{X_x, X_y, \nu\}$ が \mathbb{R}^3 の基底であることと, 第二基本形式の定義から

$$\begin{aligned} X_{xx} &= \Gamma_{11}^1 X_x + \Gamma_{11}^2 X_y + L\nu \\ X_{xy} &= \Gamma_{12}^1 X_x + \Gamma_{12}^2 X_y \\ X_{yy} &= \Gamma_{22}^1 X_x + \Gamma_{22}^2 X_y + N\nu \end{aligned} \quad (1.3)$$

と表せる. この公式を **Gauss の公式** と呼び, 係数 Γ_{jk}^i を **Christoffel 記号** と呼ぶ.

S の固有値を主曲率と呼ぶことから $\kappa_1 = L/E$, $\kappa_2 = N/G$ が得られ, 特に

$$-\nu_x = \kappa_1 X_x, \quad -\nu_y = \kappa_2 X_y$$

と表せる (そのためこの式を Weingarten の公式と呼ぶ場合も多い). 上式と (1.3) を合わせて, **Gauss-Weingarten の公式** と呼ぶ.

Gauss-Weingarten の公式は行列の形で表すことができる. すなわち $\mathcal{F} = (X_x, X_y, \nu)$ とおくと,

$$\mathcal{F}_x = \mathcal{F} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & -\kappa_1 \\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & 0 \\ \kappa_1 E & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_y = \mathcal{F} \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^2 & 0 \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & -\kappa_2 \\ 0 & \kappa_2 G & 0 \end{pmatrix}$$

を満たす.

$$U = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & -\kappa_1 \\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & 0 \\ \kappa_1 E & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^2 & 0 \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & -\kappa_2 \\ 0 & \kappa_2 G & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと, Gauss-Weingarten の公式は

$$\mathcal{F}_x = \mathcal{F}U, \quad \mathcal{F}_y = \mathcal{F}V \quad (1.4)$$

と表せる. この関係式が成り立つならば $\mathcal{F}_{xy} = \mathcal{F}_{yx}$ が成り立たねばならないが, この関係式は $V_x - U_y + [U, V] = 0$ と同値である ((1.4) に対する両立条件あるいは積分可能条件と呼ぶ). この両立条件の行列成分を具体的に書き下した式が **Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式** である*1.

注意 1.9. 記号の定義は $[U, V] = UV - VU$ である. 実際 $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}U$, $\mathcal{F}_y = \mathcal{F}V$ の両辺をそれぞれ y, x で微分すると

$$\mathcal{F}_{xy} = \mathcal{F}_y U + \mathcal{F}U_y = \mathcal{F}(VU + U_y), \quad \mathcal{F}_{yx} = \mathcal{F}_x V + \mathcal{F}V_x = \mathcal{F}(UV + V_x)$$

が得られるので, $\mathcal{F}_{xy} = \mathcal{F}_{yx}$ となるためには

$$VU + U_y = UV + V_x \iff V_x - U_y + UV - VU = 0 \iff V_x - U_y + [U, V] = 0$$

が必要十分である.

1.3 正規直交枠による表現と Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式

ここでは, 曲率線座標の場合に Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式を書き下す. まず, 先の Gauss-Weingarten の公式を正規直交枠で書き直す.

補題 1.10. Christoffel 記号は次の関係式を満たす:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \langle X_{xx}, X_x \rangle = E_x/2 \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \langle X_{xx}, X_y \rangle = F_x - (E_y/2) \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \langle X_{xy}, X_x \rangle = E_y/2 \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \langle X_{xy}, X_y \rangle = G_x/2 \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= \langle X_{yy}, X_x \rangle = F_y - (G_x/2) \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \langle X_{yy}, X_y \rangle = G_y/2 \end{aligned}$$

特に座標 (x, y) が曲率線座標のときは $F = 0$ であるから,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_x}{2E}, \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_y}{2G}, \Gamma_{12}^1 = \frac{E_y}{2E}, \Gamma_{12}^2 = \frac{G_x}{2G}, \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_x}{2E}, \Gamma_{22}^2 = \frac{G_y}{2G}, \quad (1.5)$$

*1 ガウス方程式, マイナルディ・コダッチ方程式を合わせた呼称. 単にガウス・コダッチ方程式とも呼ばれる.

となり,

$$U = \begin{pmatrix} E_x/(2E) & E_y/(2E) & -\kappa_1 \\ -E_y/(2G) & G_x/(2G) & 0 \\ \kappa_1 E & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} E_y/(2E) & -G_x/(2E) & 0 \\ G_x/(2G) & G_y/(2G) & -\kappa_2 \\ 0 & \kappa_2 G & 0 \end{pmatrix}$$

を得る. いま $A_1 = \sqrt{E}$, $A_2 = \sqrt{G}$ とおく. すなわち第一基本形式を $I = A_1^2 dx^2 + A_2^2 dy^2$

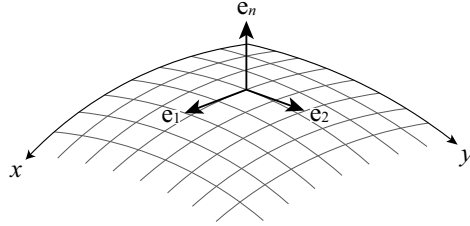


図 1: 正規直交枠

と表しているとき, Gauss-Weingarten の公式は (1.4) と (1.5) より

$$\begin{cases} X_{xx} = \frac{(A_1)_x}{A_1} X_x - \frac{(A_1^2)_y}{2A_2^2} X_y + \kappa_1 A_1^2 \nu \\ X_{xy} = \frac{(A_1)_y}{A_1} X_x + \frac{(A_2)_x}{A_2} X_y \\ X_{yy} = -\frac{(A_2^2)_x}{2A_1^2} X_x + \frac{(A_2)_y}{A_2} X_y + \kappa_2 A_2^2 \nu \\ \nu_x = -\kappa_1 X_x, \quad \nu_y = -\kappa_2 X_y \end{cases} \quad (1.6)$$

と表せる. さらに

$$\mathbf{e}_1 = X_x/A_1, \quad \mathbf{e}_2 = X_y/A_2, \quad \mathbf{e}_n = \nu \quad (1.7)$$

とおくと, $\Phi^0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n)$ は正規直交枠である.

補題 1.11. 正規直交枠 $\Phi^0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n)$ に対し, Gauss-Weingarten の公式は

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1)_x &= -\frac{(A_1)_y}{A_2} \mathbf{e}_2 + \kappa_1 A_1 \mathbf{e}_n, & (\mathbf{e}_2)_x &= \frac{(A_1)_y}{A_2} \mathbf{e}_1, & (\mathbf{e}_n)_x &= -\kappa_1 A_1 \mathbf{e}_1, \\ (\mathbf{e}_1)_y &= \frac{(A_2)_x}{A_1} \mathbf{e}_2, & (\mathbf{e}_2)_y &= -\frac{(A_2)_x}{A_1} \mathbf{e}_1 + \kappa_2 A_2 \mathbf{e}_n, & (\mathbf{e}_n)_y &= -\kappa_2 A_2 \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

と書き換えられる.

証明 . (1.6) と先の書き換え (1.7) により,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_1)_x &= \frac{X_{xx}}{A_1} - \frac{(A_1)_x}{A_1^2} X_x \\
&= \frac{(A_1)_x}{A_1} \mathbf{e}_1 - \frac{(A_1^2)_y}{2A_1 A_2^2} X_y + \kappa_1 A_1 \nu - \frac{(A_1)_x}{A_1} \mathbf{e}_1 = -\frac{(A_1)_y}{A_2} \mathbf{e}_2 + \kappa_1 A_1 \mathbf{e}_n, \\
(\mathbf{e}_2)_x &= \frac{X_{xy}}{A_2} - \frac{(A_2)_x}{A_2^2} X_y = \frac{(A_1)_y}{A_1 A_2} X_x + \frac{(A_2)_x}{A_2^2} X_y - \frac{(A_2)_x}{A_2^2} X_y = \frac{(A_1)_y}{A_2} \mathbf{e}_1, \\
(\mathbf{e}_n)_x &= \nu_x = -\kappa_1 A_1 \mathbf{e}_1
\end{aligned}$$

が得られる. 同様の計算で

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_1)_y &= \frac{X_{xy}}{A_1} - \frac{(A_1)_y}{A_1^2} X_x = \frac{(A_1)_y}{A_1^2} X_x + \frac{(A_2)_x}{A_1 A_2} X_y - \frac{(A_1)_y}{A_1^2} X_x = \frac{(A_2)_x}{A_1} \mathbf{e}_2, \\
(\mathbf{e}_2)_y &= \frac{X_{yy}}{A_2} - \frac{(A_2)_y}{A_2^2} X_y \\
&= -\frac{(A_2^2)_x}{2A_1^2 A_2} X_x + \frac{(A_2)_y}{A_2^2} X_y + \kappa_2 A_2 \nu - \frac{(A_2)_y}{A_2^2} X_y = -\frac{(A_2)_x}{A_1} \mathbf{e}_1 + \kappa_2 A_2 \mathbf{e}_n, \\
(\mathbf{e}_n)_y &= \nu_y = -\kappa_2 A_2 \mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

を得る. □

さらに, 次の記号を導入する:

$$p = \frac{(A_1)_y}{A_2}, \quad q = \frac{(A_2)_x}{A_1}, \quad H_o = -\kappa_1 A_1, \quad K_o = -\kappa_2 A_2, \quad H = A_1, \quad K = A_2.$$

これらを用いると, 補題 1.11 より Gauss-Weingarten の公式は以下のように書き直せる:

$$\begin{cases}
(\mathbf{e}_1)_x = -p\mathbf{e}_2 - H_o\mathbf{e}_n, & (\mathbf{e}_2)_x = p\mathbf{e}_1, & (\mathbf{e}_n)_x = H_o\mathbf{e}_1, \\
(\mathbf{e}_1)_y = q\mathbf{e}_2, & (\mathbf{e}_2)_y = -q\mathbf{e}_1 - K_o\mathbf{e}_n, & (\mathbf{e}_n)_y = K_o\mathbf{e}_2.
\end{cases} \quad (1.8)$$

すなわち

$$\Phi^0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n), \quad U^0 = \begin{pmatrix} 0 & p & H_o \\ -p & 0 & 0 \\ -H_o & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V^0 = \begin{pmatrix} 0 & -q & 0 \\ q & 0 & K_o \\ 0 & -K_o & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと U^0, V^0 はともに交代行列であり*2, Gauss-Weingarten の公式は

$$\Phi_x^0 = \Phi^0 U^0, \quad \Phi_y^0 = \Phi^0 V^0 \quad (1.9)$$

と書き換えられる.

*2 直交群 $O(3)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(3)$ が交代行列全体の空間である事実に対応する.

命題 1.12 (Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式). Gauss-Weingarten の公式 (1.9) の両立条件 $V_x^0 - U_y^0 + [U^0, V^0] = O$ は次の線型一次方程式系となる :

$$p_y + q_x + H_o K_o = 0, \quad (1.10)$$

$$H_y = pK, \quad (1.11)$$

$$(H_o)_y = pK_o, \quad (1.12)$$

$$K_x = qH, \quad (1.13)$$

$$(K_o)_x = qH_o. \quad (1.14)$$

ここで (1.11), (1.13) は定義から自明であり, (1.10) が Gauss 方程式, (1.12), (1.14) が Mainardi-Codazzi 方程式である.

証明 . 両立条件を計算すると以下のようになる :

$$O = V_x^0 - U_y^0 + [U^0, V^0] = \begin{pmatrix} 0 & -(p_y + q_x + H_o K_o) & pK_o - (H_o)_y \\ p_y + q_x + H_o K_o & 0 & (K_o)_x - qH_o \\ (H_o)_y - pK_o & qH_o - (K_o)_x & 0 \end{pmatrix}$$

□

注意 1.13 (Gauss の驚異の定理). (1.10) は次のように書き換えられる :

$$\mathcal{K} = \kappa_1 \kappa_2 = -\frac{1}{HK} \left[\left(\frac{H_y}{K} \right)_y + \left(\frac{K_x}{H} \right)_x \right].$$

この式の右辺には第一基本形式 $I = H^2 dx^2 + K^2 dy^2$ の係数のみが表れており, Gauss 曲率が第一基本形式のみで表される内在的な量であることがわかる.

1.4 平行曲面

Weingarten の公式 (1.1) の応用として, 平行曲面に関する考察をしておく (後のシェル理論におけるシェルの「厚み」に対応する). いま, 曲面 $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ とその法ベクトル $\mathbf{e}_n : D \rightarrow S^2$ を用いて, 新しいベクトル値関数

$$X^{(z)} := X + z\mathbf{e}_n : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

を考えよう. 曲面 X の第一基本形式を $I = A_1^2 dx^2 + A_2^2 dy^2$ とするとき, Weingarten の公式

$$(\mathbf{e}_n)_x = -\kappa_1 A_1 \mathbf{e}_1, \quad (\mathbf{e}_n)_y = -\kappa_2 A_2 \mathbf{e}_2 \quad (1.15)$$

が成り立つことから, 次の主張を得る :

補題 1.14. 次の等式が成り立つ：

$$X_x^{(z)} = A_1(1 - z\kappa_1)\mathbf{e}_1, \quad X_y^{(z)} = A_2(1 - z\kappa_2)\mathbf{e}_2.$$

特に $X_x^{(z)} \times X_y^{(z)} = A_1 A_2 (1 - z\kappa_1)(1 - z\kappa_2)\mathbf{e}_n$ より、 $X^{(z)}$ の法ベクトルを \mathbf{e}_n ととることができ、 $X^{(z)}$ は X と「平行」である。さらに $X^{(z)}$ の面積要素 $dA^{(z)}$ は

$$dA^{(z)} = \|X_x^{(z)} \times X_y^{(z)}\| dx dy = (1 - z\kappa_1)(1 - z\kappa_2) dA = (1 - 2\mathcal{H} + z^2\mathcal{K}) dA$$

と表すことができる (Steiner の公式)。

従って、特に

$$(1 - z\kappa_1)(1 - z\kappa_2) \neq 0$$

が成り立つ部分で $X^{(z)}$ は (滑らかな) 曲面を与える。左辺がゼロとなる部分では「カド (特異点)」を与える。

命題 1.15 (平行曲面の主曲率). 平行曲面 $X^{(z)}$ の主曲率 $\kappa_1^{(z)}, \kappa_2^{(z)}$ は以下で与えられる：

$$\kappa_i^{(z)} = \frac{\kappa_i}{1 - z\kappa_i}, \quad i = 1, 2.$$

注意 1.16. 直感的には、[8] の 4 節にあるような切り口を考え、曲率半径の関係式

$$R_i^{(z)} = R_i + z$$

を導き、 $\kappa_i = -1/R_i$ に注意して

$$\kappa_i^{(z)} = -\frac{1}{R_i^{(z)}} = -\frac{1}{R_i + z} = \frac{-1/R_i}{1 - (-z/R_i)} = \frac{\kappa_i}{1 - z\kappa_i}$$

として結果を得るものとしてもよい (ただしこの観察の場合、曲面は法ベクトルと反対に曲がっているので曲率は負であることに注意する必要がある、直感的にはわかりやすいが符号を間違えやすい)。

証明. $X^{(z)}$ の形作用素 $S^{(z)}$ をみよう。そのためには、 $X^{(z)}$ の第一・第二基本形式をみればよいが、先の補題より

$$I^{(z)} = A_1^2(1 - z\kappa_1)^2 dx^2 + A_2^2(1 - z\kappa_2)^2 dy^2$$

がわかっている。第二基本形式に関しては、 $X^{(z)}$ の法ベクトルを \mathbf{e}_n 自身にとれることから、再び先の補題と Weingarten の公式 (1.15) を用いると

$$\langle X_{xx}^{(z)}, \mathbf{e}_n^{(z)} \rangle = -\langle X_x^{(z)}, (\mathbf{e}_n)_x \rangle = -\langle A_1(1 - z\kappa_1)\mathbf{e}_1, -\kappa_1 A_1 \mathbf{e}_1 \rangle = \kappa_1 A_1^2 (1 - z\kappa_1)$$

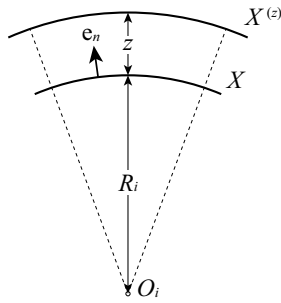


図 2: 平行曲面の切り口の様子

のように計算でき,

$$II^{(z)} = \kappa_1 A_1^2 (1 - z\kappa_1) dx^2 + \kappa_2 A_2^2 (1 - z\kappa_2) dy^2$$

を得る. ゆえに

$$S^{(z)} = \begin{pmatrix} \kappa_1/(1 - z\kappa_1) & 0 \\ 0 & \kappa_2/(1 - z\kappa_2) \end{pmatrix}$$

であるから主張を得る (ちなみにこの証明から, X が曲率線座標をもてば $X^{(z)}$ も曲率線座標をもつことがわかる). \square

系 1.17. 平行曲面 $X^{(z)}$ の平均曲率 $\mathcal{H}^{(z)}$ と Gauss 曲率 $\mathcal{K}^{(z)}$ は次のように表すことができる:

$$\mathcal{H}^{(z)} = \frac{\mathcal{H} - z\mathcal{K}}{1 - 2z\mathcal{H} + z^2\mathcal{K}}, \quad \mathcal{K}^{(z)} = \frac{\mathcal{K}}{1 - 2z\mathcal{H} + z^2\mathcal{K}}.$$

特に, 可展面の平行曲面は可展面である. より一般に, 線型 Weingarten 曲面の平行曲面は線型 Weingarten 曲面である.

系 1.18 (Bonnet, 1867). 平均曲率 \mathcal{H} がゼロでない一定の曲面 X に対し, 平行曲面 $X_K := X + (1/2\mathcal{H})\mathbf{e}_n$ は一般に特異点をもつ曲面であり, 滑らかな部分では X_K は Gauss 曲率が正の定数 $4\mathcal{H}^2$ である. X_K の特異点はもとの曲面で Gauss 曲率が 0 である点に対応する.

2 シェル理論・膜理論における釣り合い方程式

2.1 シェル理論の略史 ([8, 1 節])

弾性体の理論において「シェル」という用語は、他の大きさに比べて十分近い距離にある 2 つの曲面 X_1, X_2 によって囲まれた物体に対して適用される。これら 2 つの曲面 X_1, X_2 から等距離にある点の集まりをシェルの**中央面 (middle surface)** と呼ぶ。シェルの厚みを δ とし、以下では δ は定数（すなわちシェルは厚さ一定）であると仮定する。また、以下を仮定する：

- (1) シェルの材質は等方的 (isotropic) であるとする。
- (2) Hooke の法則に従い、各点における変位はシェルの厚みに比較して十分小さいと仮定する。

以下で導く諸結果に関しては、常にこれらの制約の下での結果であることを注意しておく。

シェルには大きく 2 つのクラスがある。厚いシェル (thick shell) と薄いシェル (thin shell) である。シェルが「薄い」とは、ある単位 1 を基準として

$$\max(\delta/R) \leq 1/20$$

を満たすようなシェルをいう (R は曲率半径)。よってこの不等式を満たさないようなシェルは厚いシェルとみなされる。以下では特に**薄いシェル (thin shell)** について考える (図 3 も参照)。

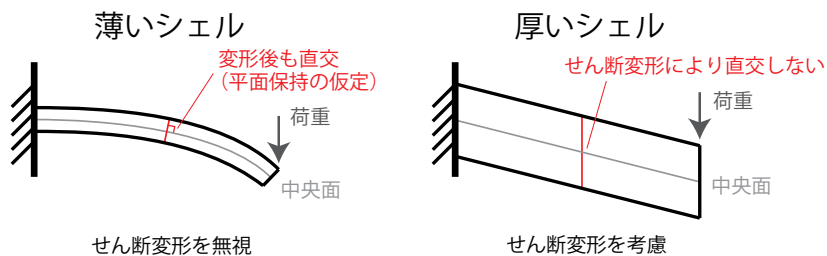


図 3: 変形前のシェル中央面に直交する断面が変形後もシェル中央面に直交することを仮定する薄いシェル (Kirchhoff-Love 理論) と、変形後に直交するとは限らないとする厚いシェル (Mindlin-Reissner 理論)。

特にシェルと関わりの深い歴史をまとめると以下のようなになる：

- (1) 平板理論の黎明期：19 世紀の数学者は連続体の力学に関心があり，特に「平板 (plate)」の理論は Cauchy-Poisson 理論（平板の変位と応力を中央面からの距離に関する無限級数展開で表現する方法），Kirchhoff 理論（梁の理論で用いられるものと類似するいくつかの仮定に基礎をおいた近似理論）が代表的なものであった．前者は項の数を増やすと正確な解に近づくという意味でより厳密であったが，級数の収束域などが当時は不明瞭であり，さらに境界値問題の扱いなどから論争を起こした．そこで，物理的な意味が明確であるという点などで優れていた「Kirchhoff の仮定」に基づく理論が台頭する．
- (2) Love のシェル理論：平板に対する Kirchhoff の仮定に基づくシェルの理論は A. G. Aron の仕事によって初めて展開された．ところが，彼の理論展開は厳密には正しくないことが A. E. H. Love によって指摘され，修正された．Love のシェル理論にも問題点はあったが，Galerkin らによる一連の研究が現れるまではポピュラーな理論となった．
- (3) Galerkin スクール：Love 理論の問題点は，力，モーメント，中央面の変位の間の関係の記述と，低次項の取り扱い方にあった（そのため，Love 理論をプロトタイプとする派生版がいくつか存在した）．これらは，B. G. Galerkin により主導された，シェル理論におけるロシアのスクールにおける一連の出版物において研究されてきた．Galerkin の仕事は「厚いシェル」に関するものであったが，彼はシェルの理論のすべての式を弾性体の一般論から得ていたため，薄いシェルに対する数学的に厳密な理論の展開において重要な役割を果たしたといえる．この文脈における薄いシェルの理論の方程式は A. I. Lur'e によって導出されたが，彼は自身の式を簡素化するために必要な判定条件を与えることができなかった．この判定条件は V. V. Novozhikov らによって与えられ，そこでは Kirchhoff によって薄いシェルの理論に導入された誤差が δ/R のオーダーであることが示された．

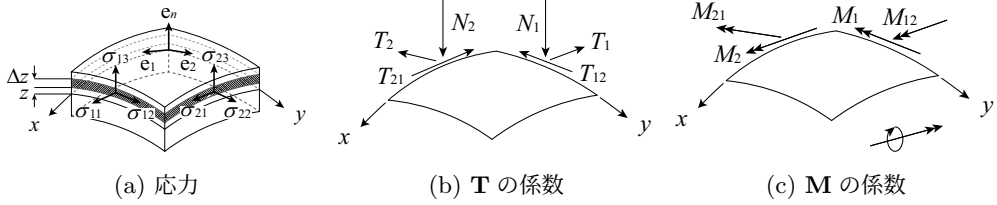
以下で展開するシェルに関する理論は，Novozhilov [8] による理論に基づき，3次元弾性体としてのシェルに作用する応力をシェルの中央面 X に作用する力とモーメントに置き換えることによって，前節の曲面論を適用する．

2.2 シェルの力の釣り合い方程式 ([8, 6 節])

シェル中央面 $X(x, y)$ を考え， X 上の微小長方形 $X(x, y)$, $X(x + \Delta x, y)$, $X(x, y + \Delta y)$, $X(x + \Delta x, y + \Delta y)$ を考える．この微小長方形にかかる応力に関し，以下の記号を用

いる：

- σ_{11}, σ_{22} ：面にかかる垂直応力 (normal stresses).
- σ_{12}, σ_{21} ：中央面に平行な方向に働くせん断応力.
- σ_{13}, σ_{23} ：中央面の法線方向に働くせん断応力.



ただし、上記の応力は X_x 方向に垂直な平面で切ったときの断面上の応力と X_y 方向に垂直な平面で切ったときの断面上の応力を表記しており、 σ_{ij} の i 成分がそれぞれの切断の方向を表すこととする。

X_x 方向に垂直な平面で切ったときの様子：線素は $ds_2 = \sqrt{\langle X_y, X_y \rangle} dy = A_2 dy$ と表され、命題 1.15 より微小な z に対し平行曲線をとると線素は $ds_2^{(z)} = A_2^{(z)} dy = A_2(1 - z\kappa_2) dy$ で表される。

注意 2.1. 符号に注意、

$$\kappa_1 := -\frac{1}{R_1}, \quad \kappa_2 := -\frac{1}{R_2}$$

である。

応力 $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ の合応力 (resultant stresses) は以下のように表される：

$$S_{11} = A_2 dy \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{11}(1 - z\kappa_2) dz,$$

$$S_{12} = A_2 dy \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{12}(1 - z\kappa_2) dz,$$

$$S_{13} = A_2 dy \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{13}(1 - z\kappa_2) dz.$$

単位長さあたりにかかる力はそれらを長さで割って

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{S_{11}}{A_2 dy} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{11}(1 - z\kappa_2) dz, \\ T_{12} &= \frac{S_{12}}{A_2 dy} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{12}(1 - z\kappa_2) dz, \\ N_1 &= \frac{S_{13}}{A_2 dy} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{13}(1 - z\kappa_2) dz. \end{aligned}$$

で与えられる．また X_y 方向に垂直な平面で切ったときは

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{22}(1 - z\kappa_1) dz, \\ T_{21} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{21}(1 - z\kappa_1) dz, \\ N_2 &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{23}(1 - z\kappa_1) dz. \end{aligned}$$

を得る．

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(1)} &= S_{11}\mathbf{e}_1 + S_{12}\mathbf{e}_2 + S_{13}\mathbf{e}_n = (T_1\mathbf{e}_1 + T_{12}\mathbf{e}_2 + N_1\mathbf{e}_n)A_2 dy, \\ \mathbf{T}^{(2)} &= (T_{21}\mathbf{e}_1 + T_2\mathbf{e}_2 + N_2\mathbf{e}_n)A_1 dx \end{aligned} \quad (2.1)$$

とおく． $\mathbf{q} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_n\mathbf{e}_n$ を外力とするととき，力の釣り合い式は

$$\frac{\partial \mathbf{T}^{(1)}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{T}^{(2)}}{\partial y} dy + \mathbf{q} dA = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

で与えられる．ここで， $dA = A_1 A_2 dx dy$ は面積要素である．

命題 2.2 (シェルの力の釣り合い式)．シェルの力の釣り合い式は次のように表される：

$$\begin{aligned} (A_2 T_1)_x + (A_1 T_{21})_y + (A_1)_y T_{12} - (A_2)_x T_2 + (-N_1 \kappa_1 + q_1) A_1 A_2 &= 0, \\ (A_2 T_{12})_x + (A_1 T_2)_y + (A_2)_x T_{21} - (A_1)_y T_1 + (-N_2 \kappa_2 + q_2) A_1 A_2 &= 0, \\ (A_2 N_1)_x + (A_1 N_2)_y + (\kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 + q_n) A_1 A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる．また， $I = H^2 dx^2 + K^2 dy^2$ と表しているときは

$$\begin{aligned} (KT_1)_x + (HT_{21})_y + H_y T_{12} - K_x T_2 + (-N_1 \kappa_1 + q_1) HK &= 0, \\ (KT_{12})_x + (HT_2)_y + K_x T_{21} - H_y T_1 + (-N_2 \kappa_2 + q_2) HK &= 0, \\ (KN_1)_x + (HN_2)_y + (\kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 + q_n) HK &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

となる．

証明．シェルの力の釣り合い式 (2.2) は

$$(A_2T_1\mathbf{e}_1 + A_2T_{12}\mathbf{e}_2 + A_2N_1\mathbf{e}_n)_x + (A_1T_{12}\mathbf{e}_1 + A_1T_2\mathbf{e}_2 + A_1N_2\mathbf{e}_n)_y + \mathbf{q}A_1A_2 = \mathbf{0}$$

と同値であり，これを補題 1.11 内の Gauss-Weingarten の公式

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1)_x &= -\frac{(A_1)_y}{A_2}\mathbf{e}_2 + \kappa_1A_1\mathbf{e}_n, & (\mathbf{e}_2)_x &= \frac{(A_1)_y}{A_2}\mathbf{e}_1, & (\mathbf{e}_n)_x &= -\kappa_1A_1\mathbf{e}_1, \\ (\mathbf{e}_1)_y &= \frac{(A_2)_x}{A_1}\mathbf{e}_2, & (\mathbf{e}_2)_y &= -\frac{(A_2)_x}{A_1}\mathbf{e}_1 + \kappa_2A_2\mathbf{e}_n, & (\mathbf{e}_n)_y &= -\kappa_2A_2\mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

を用いて書き直せばよい．

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (A_2T_1\mathbf{e}_1 + A_2T_{12}\mathbf{e}_2 + A_2N_1\mathbf{e}_n)_x + (A_1T_{12}\mathbf{e}_1 + A_1T_2\mathbf{e}_2 + A_1N_2\mathbf{e}_n)_y + \mathbf{q}A_1A_2 \\ &= (A_1T_1)_x\mathbf{e}_1 - (A_1)_yT_1\mathbf{e}_2 + \kappa_1A_1A_2T_1\mathbf{e}_n + (A_2T_{12})_x\mathbf{e}_2 + (A_1)_yT_{12}\mathbf{e}_1 + (N_1A_2)_x\mathbf{e}_n \\ &\quad - \kappa_1A_1A_2N_1\mathbf{e}_1 + (A_1T_{21})_y\mathbf{e}_1 + (A_2)_xT_{21}\mathbf{e}_2 + (A_1T_{21})_y\mathbf{e}_2 - (A_2)_xT_2\mathbf{e}_1 \\ &\quad + \kappa_2A_1A_2T_2\mathbf{e}_n + (A_1N_2)\mathbf{e}_n - \kappa_2A_1A_2N_2\mathbf{e}_2 + (q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_n\mathbf{e}_n)A_1A_2 \\ &= ((A_2T_1)_x + (A_1T_{21})_y + (A_1)_yT_{12} - (A_1)_xT_2 + (-\kappa_1N_1 + q_1)A_1A_2)\mathbf{e}_1 \\ &\quad + (-(A_1)_yT_1 + (A_2T_{12})_x + (A_2)_xT_{21} + (A_1T_2)_y + (-\kappa_2N_2 + q_2)A_1A_2)\mathbf{e}_2 \\ &\quad + ((A_2N_1)_x + (A_1N_2)_y + (\kappa_1T_1 + \kappa_2T_2 + q_n)A_1A_2)\mathbf{e}_n \end{aligned}$$

となるので，係数比較にて式 (2.3) を得る． □

2.3 膜理論と線型 Weingarten 曲面

シェル理論の中で，特に膜 (membrane) の理論はモーメントの釣り合い式においてモーメントゼロとして得られる：

定義 2.3 (膜 ([8, p. 107])). シェル中央面 X は関係式

$$N_1 = N_2 = 0, \quad T_{12} = T_{21} = S \tag{2.5}$$

を満たすとき膜 (**membrane**) であるという．このとき X を膜または膜曲面と呼ぶこととする．

以下， X は膜の条件 (2.5) を満たすと仮定する．膜の条件を先の力の釣り合い方程式 (2.3) に適用すると

$$\begin{aligned} (A_2T_1)_x + (A_1S)_y + (A_1)_yS - (A_2)_xT_2 + q_1A_1A_2 &= 0, \\ (A_2S)_x + (A_1T_2)_y + (A_2)_xS - (A_1)_yT_1 + q_2A_1A_2 &= 0, \\ \kappa_1T_1 + \kappa_2T_2 + q_n &= 0. \end{aligned}$$

となる. $I = H^2 dx^2 + K^2 dy^2$ と表しているときは

$$\begin{aligned}(KT_1)_x + (HS)_y + H_y S - K_x T_2 + q_1 HK &= 0, \\ (KS)_x + (HT_2)_y + K_x S - H_y T_1 + q_2 HK &= 0, \\ \kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 + q_n &= 0.\end{aligned}$$

となる. 法線方向にのみ荷重がかかる場合, すなわち $q_1 = q_2 = 0$ の場合

$$\begin{aligned}(A_2 T_1)_x + (A_1 S)_y + (A_1)_y S - (A_2)_x T_2 &= 0, \\ (A_2 S)_x + (A_1 T_2)_y + (A_2)_x S - (A_1)_y T_1 &= 0, \\ \kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 + q_n &= 0.\end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned}(KT_1)_x + (HS)_y + H_y S - K_x T_2 &= 0, \\ (KS)_x + (HT_2)_y + K_x S - H_y T_1 &= 0, \\ \kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 + q_n &= 0.\end{aligned}$$

となる.

いま, 特に $S = 0$ (すなわち主曲率方向にせん断が生じない) 場合を考える. この仮定は, 膜上の主応力線と曲率線が一致するという要請である ([9, p.2451]). すなわち正規直交枠 (e_1, e_2, e_n) によって応力テンソルが対角化されることを意味する). このとき方程式は

$$\begin{aligned}(A_2 T_1)_x - (A_2)_x T_2 = 0 &\iff (T_1)_x + (\log A_2)_x (T_1 - T_2) = 0, \\ (A_1 T_2)_y - (A_1)_y T_1 = 0 &\iff (T_2)_y + (\log A_1)_y (T_2 - T_1) = 0, \\ \kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 + q_n &= 0.\end{aligned}$$

あるいは

$$(T_1)_x + (\log K)_x (T_1 - T_2) = 0, \tag{2.6}$$

$$(T_2)_y + (\log H)_y (T_2 - T_1) = 0, \tag{2.7}$$

$$\kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 + q_n = 0. \tag{2.8}$$

となる. この第1・第2式は, 先に導出した Mainardi-Codazzi 方程式

$$(\kappa_1)_y + (\log A_1)_y (\kappa_1 - \kappa_2) = 0, \quad (\kappa_2)_x + (\log A_2)_x (\kappa_2 - \kappa_1) = 0.$$

とよく似ている. そこで, 例えば λ と μ を定数として

$$T_1 = \lambda \kappa_2 + \mu, \quad T_2 = \lambda \kappa_1 + \mu$$

とおくと、釣り合い方程式の第1・第2式は Mainardi-Codazzi 方程式 ((1.12), (1.14) から自動的に従い、釣り合い式は

$$\kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 + q_n = 0 \iff 2\lambda\mathcal{K} + 2\mu\mathcal{H} + q_n = 0$$

のみになる。 q_n が定数のとき、すなわち法線方向の荷重が至るところ一定であるとき、膜の釣り合い条件は曲面が線型 Weingarten 曲面であることが導かれた。

命題 2.4. 曲面 X は膜である、すなわち (2.5) を満たすと仮定する。 X の法線方向に至るところ一定の荷重がかかり、せん断応力 S は生じないものとする。さらに $T_1 = \lambda\kappa_2 + \mu$, $T_2 = \lambda\kappa_1 + \mu$ を仮定するとき、膜 X が釣り合い状態であるためには、関係式

$$2\lambda\mathcal{K} + 2\mu\mathcal{H} + q_n = 0 \tag{2.9}$$

を満たすことが必要十分である。すなわち、線型 Weingarten 曲面であることが必要十分である。

例 2.5. $\lambda = 0$ のとき、すなわち $T_1 = T_2 = \mu$ のときは $\mathcal{H} = -q_n/(2\mu)$ となり、平均曲率一定曲面である (Young-Laplace 方程式)。

Rogers-Schief 論文 [9] で述べられている理論は、仮定 $T_1 = \lambda\kappa_2 + \mu$, $T_2 = \lambda\kappa_1 + \mu$ を外したときも、「可積分理論」とのつながりは存在することを主張する。これを適切に記述するために 3.1 節において O 曲面について簡単に復習し、3.2, 3.3 節において O 曲面論と膜理論とのつながりを示す。

2.4 純せん断 (Pure shear) の場合 ([12, 13])

前節においては「せん断ゼロ、法線方向の定荷重」の場合を考えたが、この「補集合的な」対象である「純せん断 (pure shear)」の場合を考える。すなわち X を膜とすると、釣り合い式 (2.4) において、

$$T_1 = T_2 = 0, \quad q_1 = q_2 = q_n = 0 \tag{2.10}$$

の場合を考えると、釣り合い式は

$$(HS)_y + H_y S = 0, \quad (KS)_x + K_x S = 0$$

の2式となる。これを書き換えると

$$(H^2 S)_y = 0, \quad (K^2 S)_x = 0$$

が得られる.

定理 2.6 ([13]). 膜 X は曲率線座標 (x, y) で表されているとする. このとき以下は同値である:

- (1) (2.10) の条件下において, 純せん断 S が作用する膜 X が釣り合い状態にある.
- (2) X が Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式 (1.10),(1.12),(1.14) を満たし, S が条件 $(H^2S)_y = 0, (K^2S)_x = 0$ を満たす.
- (3) X は等温曲率線座標系を許容する (すなわち X は isothermic surface).

証明. (1) と (2) の同値性は上で示しているため, (2) \iff (3) を示せばよい.

(2) \Rightarrow (3): 等温曲率線座標の存在, すなわち適当な変数変換 φ が存在し, $\widehat{X} := X \circ \varphi$ とおくと $|\widehat{X}_x| = |\widehat{X}_y|$ とできることを示す. 条件より, 必要ならば S を $-S$ で置き換えることで $H^2S = e^{-2A(x)}, K^2S = e^{-2B(y)}$ と書ける (A, B はそれぞれ x のみ, y のみの関数). このとき $He^{A(x)} = Ke^{B(y)} = 1/\sqrt{S}$ となり, 変数変換

$$\varphi(x, y) = \left(\int^x e^{A(t)} dt, \int^y e^{B(t)} dt \right)$$

を考える ($\det J_\varphi = e^{A+B} > 0$ より, 確かに変数変換である). いま $\widehat{X}(x, y) := X(\varphi(x, y))$ (座標変換) を考えると,

$$\widehat{X}_x = X_x e^A = He^A \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{S}} \mathbf{e}_1, \quad \widehat{X}_y = X_y e^B = Ke^B \cdot \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{S}} \mathbf{e}_2,$$

となるため, $|\widehat{X}_x| = |\widehat{X}_y|$ がわかる (第二基本形式が対角化されることは自明).

(3) \Rightarrow (2): X が等温曲率線座標で表されているとき, $H = K$ である. これは単に幾何学的条件であり, 条件 $(H^2S)_y = (K^2S)_x = 0$ を満たす純せん断 S が存在することは次のように確かめられる:

$$(H^2S)_y = (K^2S)_x = (H^2S)_x = (K^2S)_y = 0$$

より H^2S と K^2S はともに定数 c でなくてはならず, $S = c/H^2 = c/K^2$ とならなければならない. 逆にこのような S に対して $(H^2S)_y = (K^2S)_x = 0$ が成り立つことは自明である. \square

注意 2.7. 純せん断 S が作用する釣り合い状態の膜曲面 X に等温曲率線座標 (x, y) が導入されているとき, (2.1) より膜の微小部分に作用する合応力は

$$\mathbf{T}^{(1)} = SX_y dy = \frac{cX_y}{H^2} dy, \quad \mathbf{T}^{(2)} = SX_x dx = \frac{cX_x}{H^2} dx$$

となる。いま、等温曲率線座標もつ曲面 (isothermic surfaces) に対してはその **Christoffel 変換** \hat{X} が

$$\hat{X}_x = \frac{X_x}{|X_x|^2} = \frac{X_x}{H^2}, \quad \hat{X}_y = -\frac{X_y}{|X_y|^2} = -\frac{X_y}{H^2}$$

によって与えられたことを思い出すと (例えば [6] を参照),

$$\mathbf{T}^{(1)} = -c\hat{X}_y dy, \quad \mathbf{T}^{(2)} = c\hat{X}_x dx. \iff \mathbf{T}^{(2)} - \mathbf{T}^{(1)} = c \cdot d\hat{X}$$

を得る。すなわち、膜 X の応力分布の情報は Christoffel 変換 \hat{X} に組み込まれているとみなすことができる。この事実の離散版を 5.2 節で紹介する。

3 膜理論における可積分幾何 (膜 O 曲面論 [9])

前節では, 面内応力成分 T_1, T_2 に対し, 仮定

$$T_1 = \lambda\kappa_2 + \mu, \quad T_2 = \lambda\kappa_1 + \mu$$

をおき, 膜の釣り合い条件が線型 Weingarten 曲面の条件式と同値であることをみた. 本節ではこの仮定を外し, より一般的な膜理論を可積分幾何の視点で捉えることを試みる.

3.1 O 曲面の定義 [11]

本節では, Schief-Konopelchenko らによって導入された O 曲面論を簡単に復習する [11]. 曲率線座標 (x, y) で表された曲面 $X = X(x, y)$ に対し, 第一基本形式 $I = H^2 dx^2 + K^2 dy^2$ の係数 H, K と, 単位接ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を用いて

$$X_x = H\mathbf{e}_1, \quad X_y = K\mathbf{e}_2 \quad (3.1)$$

と表す. このとき, 両立条件 $X_{xy} = X_{yx}$ は以下の線型方程式系と同値である:

$$(\mathbf{e}_1)_y = q\mathbf{e}_2, \quad (\mathbf{e}_2)_x = p\mathbf{e}_1, \quad (3.2)$$

$$H_y = pK, \quad K_x = qH. \quad (3.3)$$

いま, 線型方程式系 (3.3) の別の解 (\hat{H}, \hat{K}) が与えられたとすると, 新しい線型方程式系

$$\hat{X}_x = \hat{H}\mathbf{e}_1, \quad \hat{X}_y = \hat{K}\mathbf{e}_2 \quad (3.4)$$

は自然に両立条件 $\hat{X}_{xy} = \hat{X}_{yx}$ を満たす. このとき, \hat{X} を X の **Combescure 変換** と呼ぶ*³. 第一基本形式の係数を用いない場合, 同値な定式化は以下ようになる:

定義 3.1 (Combescure 変換, [4]). 曲率線座標で表された 2 つの曲面 X, \hat{X} が互いの **Combescure 変換 (Combescure transformation)** であるとは, 対応する点 $X(x, y), \hat{X}(x, y)$ における座標線の接ベクトルが常に平行であるとき, すなわち

$$X_x \parallel \hat{X}_x, \quad X_y \parallel \hat{X}_y$$

が成り立つときをいう.

*³ コンベスキュール (コンベスキュア) 変換 (Combescure, Ann. Ecole, Norm. Sup., IV 1867, pp.102-122.)

注意 3.2. X の第一・第二基本形式が対角化されているとき, Combescure 変換 \widehat{X} の第一・第二基本形式も対角化される. ゆえに曲率線座標は, Combescure 変換によって保たれる.

例 3.3. 曲面 X が曲率線座標 (x, y) で表されているとき, 単位法ベクトル場 $X_o = \nu$ は X の Combescure 変換である. 実際, Weingarten の公式により

$$(X_o)_x = \nu_x = -\kappa_1 X_x, \quad (X_o)_y = \nu_y = -\kappa_2 X_y \quad (3.5)$$

が成り立つ. ここで, 記号 $H_o = -\kappa_1 H$, $K_o = -\kappa_2 K$ を導入すると式 (3.5) は

$$(X_o)_x = H_o \mathbf{e}_1, \quad (X_o)_y = K_o \mathbf{e}_2 \quad (3.6)$$

と表すことができ, 両立条件 $(X_o)_{xy} = (X_o)_{yx}$ は Mainardi-Codazzi 方程式 (1.12), (1.14) である. \square

一般の O 曲面を定義しよう. 曲面の族 X_1, \dots, X_n が互いに Combescure 変換の関係にあるとする. 先の注意から, X_1, \dots, X_n はいずれも曲率線座標 (x, y) をもつとしてよい. このとき, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を直交する単位接ベクトルとして

$$(X_j)_x = H_j \mathbf{e}_1, \quad (X_j)_y = K_j \mathbf{e}_2, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

と表すことができる. 記号 $\mathbf{R} = (X_1, \dots, X_n)$, $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_n)$, $\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_n)$ を導入すると (3.7) は以下のように行列の形で書き換えられる:

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{e}_1 \mathbf{H}, \quad \mathbf{R}_y = \mathbf{e}_2 \mathbf{K}. \quad (3.8)$$

両立条件 $\mathbf{R}_{xy} = \mathbf{R}_{yx}$ は次式で与えられる:

$$(\mathbf{e}_1)_y = q \mathbf{e}_2, \quad (\mathbf{e}_2)_x = p \mathbf{e}_1, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{H}_y = p \mathbf{K}, \quad \mathbf{K}_x = q \mathbf{H}. \quad (3.10)$$

いま \mathbf{R} は $(3 \times n)$ 行列であり, 列ベクトルを一つの曲面とみなしていたが, 行ベクトルを \mathbb{R}^n 内の「双対曲面」と考えることができる. 「双対曲面」を X^1, X^2, X^3 と表すとき, \mathbf{H}, \mathbf{K} は「双対曲面の接ベクトル」とみなすことができる. O 曲面は, もとの曲面の接ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ と「双対曲面の接ベクトル」 \mathbf{H}, \mathbf{K} がいずれも「直交」することとして定義される. そこで, 定数係数の対称行列 Λ を用いて \mathbb{R}^n の擬内積を

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_\Lambda := \mathbf{x} \Lambda \mathbf{y}^T, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

で定める*4.

定義 3.4 (O 曲面, [11]). 曲率線座標で表された曲面の Combescure 変換族 X_1, \dots, X_n に対し, 各 $j = 1, \dots, n$ に対して X_j の第一基本形式が $I_j = H_j^2 dx^2 + K_j^2 dy^2$ と表されているとする. $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_n)$, $\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_n)$ とおく. 曲面族 X_1, \dots, X_n とその双対曲面 X^1, X^2, X^3 が **O 曲面 (O surfaces)** であるとは, ある定数係数の対称行列 Λ が存在し, 直交条件 $\langle \mathbf{H}, \mathbf{K} \rangle_\Lambda = 0$ が成り立つときをいう.

代表的な O 曲面として次の例が知られている: Gauss 曲率一定曲面, 平均曲率一定曲面, 極小曲面, 線型 Weingarten 曲面, 等温曲面 ($n = 2$ のとき), Guichard 曲面, Petot 曲面 ($n = 3$ のとき). ここでは, 例として膜理論と関わりの深い等温曲面 (isothermic surfaces) を考える.

例 3.5 (等温曲面, 極小曲面). $n = 2$ とし,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

とすると, 直交条件 $\langle \mathbf{H}, \mathbf{K} \rangle_\Lambda = 0$ は

$$H_2 K_1 + H_1 K_2 = 0 \quad (3.12)$$

と表される. (3.10) により

$$(H_1 H_2)_y = p(H_2 K_1 + H_1 K_2) = 0, \quad (K_1 K_2)_x = q(H_2 K_1 + H_1 K_2) = 0$$

であるから, 座標線の適当な変数変換によって $H_1 H_2 = 1$, $K_1 K_2 = -1$ としてよい. このとき (3.12) より $H_1 = K_1$ となり, X_1 は等温曲率線座標をもつ, すなわち等温曲面である. 一方でこのとき $H_2 = 1/H_1$, $K_2 = -1/H_1$ となることから

$$(X_2)_x = H_2 \mathbf{e}_1 = \frac{(X_1)_x}{H_1^2}, \quad (X_2)_y = K_2 \mathbf{e}_2 = -\frac{(X_1)_y}{H_1^2}$$

が得られる. ゆえに X_2 は X_1 の Christoffel 変換である. 特に, X_2 を X_1 の単位法ベクトル場とすると $H_2 = -\kappa_1 H_1$, $K_2 = -\kappa_2 K_1$ より直交条件 (3.12) から

$$0 = H_2 K_1 + H_1 K_2 = -H_1 K_1 (\kappa_1 + \kappa_2) \iff \kappa_1 + \kappa_2 = 0$$

が得られる. ゆえに X_1 は極小曲面であり, Christoffel 変換 X_2 は X_1 の単位法ベクトル場である.

*4 ここでは転置の記号を右上に表記した.

3.2 膜の釣り合い第 1, 2 式と Combescure 変換

3.1 節で見たように, 曲面 X に対し, X とその単位法ベクトル場 $X_0 = \nu$ は互いに Combescure 変換の関係にあった. ここまでは純粋に幾何学的な観察であったが, 力学的な対象である膜の釣り合い方程式 (2.6), (2.7), (2.8) を幾何学の枠組みに取り入れる.

そのために, 変数変換

$$\tilde{H} = T_2 H, \quad \tilde{K} = T_1 K \quad (3.13)$$

を導入しよう. 釣り合い第 2 式 (2.7) と関係式 (1.11) を用いると

$$\tilde{H}_y = (T_2)_y H + T_2 H_y = H_y (T_1 - T_2) + T_2 H_y = T_1 H_y = T_1 p K = p \tilde{K}$$

を得る. 同様にして (2.6) と (1.13) から $\tilde{K}_x = q \tilde{H}$ が得られ, 膜の釣り合い第 1, 2 式は線型方程式系

$$\tilde{H}_y = p \tilde{K}, \quad \tilde{K}_x = q \tilde{H} \quad (3.14)$$

と同値である. ゆえに X の Combescure 変換 \tilde{X} が存在し, 以下の主張が示された:

補題 3.6. 曲率線座標 (x, y) で表された膜 X の釣り合い式 (2.6), (2.7) は, 以下の条件を満たす X の Combescure 変換 \tilde{X} の存在と同値である:

$$\tilde{X}_x = \tilde{H} \mathbf{e}_1, \quad \tilde{X}_y = \tilde{K} \mathbf{e}_2. \quad (3.15)$$

ここで $\tilde{H} = T_2 H$, $\tilde{K} = T_1 K$ とおいた.

補題 3.7. 補題 3.6 で現れた曲面 \tilde{X} に対し, 法ベクトルを ν ととると, 曲面 \tilde{X} の第一・第二基本形式 \tilde{I}, \tilde{II} はそれぞれ

$$\tilde{I} = \tilde{H}^2 dx^2 + \tilde{K}^2 dy^2, \quad \tilde{II} = -H_0 \tilde{H} dx^2 - K_0 \tilde{K} dy^2$$

と表される. よって座標 (x, y) は曲率線座標であり, さらに \tilde{X} の主曲率 $\tilde{\kappa}_1, \tilde{\kappa}_2$ は

$$\tilde{\kappa}_1 = -\frac{H_0}{\tilde{H}}, \quad \tilde{\kappa}_2 = -\frac{K_0}{\tilde{K}} \quad (3.16)$$

で表される.

証明. 接ベクトル $\tilde{X}_x = \tilde{H} \mathbf{e}_1$, $\tilde{X}_y = \tilde{K} \mathbf{e}_2$ は互いに直交しているので, 第一基本量は対角化され ($\langle \tilde{X}_x, \tilde{X}_y \rangle = 0$), $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は単位ベクトルであるから第一基本形式 \tilde{I} は

$$\tilde{I} = \langle \tilde{X}_x, \tilde{X}_x \rangle dx^2 + \langle \tilde{X}_y, \tilde{X}_y \rangle dy^2 = \tilde{H}^2 dx^2 + \tilde{K}^2 dy^2$$

となる．さらにもとの曲面 X の法ベクトル $\nu = \mathbf{e}_n$ を \tilde{X} の法ベクトルとして採用できる．Combescure 変換によって曲率線座標は保存されるため，第二基本形式は対角化される．また Gauss-Weingarten の公式 (1.8) から

$$(\mathbf{e}_1)_x = -p\mathbf{e}_2 - H_o\mathbf{e}_n, \quad (\mathbf{e}_2)_y = -q\mathbf{e}_1 - K_o\mathbf{e}_n \quad (3.17)$$

であるから，(3.15) の等式をそれぞれ x と y で微分すると

$$\tilde{X}_{xx} = \tilde{H}_x\mathbf{e}_1 - p\tilde{H}\mathbf{e}_2 - H_o\tilde{H}\mathbf{e}_n, \quad \tilde{X}_{yy} = -q\tilde{K}\mathbf{e}_1 + \tilde{K}_y\mathbf{e}_2 - K_o\tilde{K}\mathbf{e}_n$$

を得る．よって

$$\tilde{II} = \langle \tilde{X}_{xx}, \nu \rangle dx^2 + \langle \tilde{X}_{yy}, \nu \rangle dy^2 = \langle \tilde{X}_{xx}, \mathbf{e}_n \rangle dx^2 + \langle \tilde{X}_{yy}, \mathbf{e}_n \rangle dy^2 = -H_o\tilde{H}dx^2 - K_o\tilde{K}dy^2$$

より，主張を得る．主曲率に関しては，これらが形作用素 $\tilde{I}^{-1}\tilde{II}$ の固有値である事実に注意すれば直ちに従う． \square

以上をまとめると，3つのベクトル値関数 X, X_o, \tilde{X} に対し，接ベクトルの関係式

$$\begin{aligned} X_x &= H\mathbf{e}_1, & X_y &= K\mathbf{e}_2, \\ (X_o)_x &= H_o\mathbf{e}_1, & (X_o)_y &= K_o\mathbf{e}_2, \\ \tilde{X}_x &= \tilde{H}\mathbf{e}_1, & \tilde{X}_y &= \tilde{K}\mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

が成り立っており， X, \tilde{X} はともに曲率線座標 (x, y) をもち，接ベクトルは対応する点において互いに平行である．

補題 3.8. 膜曲面 X ，単位法ベクトル場 $X_o = \nu$ ，曲面 \tilde{X} は互いに Combescure 変換の関係にある．

3.3 膜の釣り合い第3式と直交条件：Rogers-Schief の定理

残るは膜の釣り合い条件の第3式 (2.8) についてであるが，これが「直交条件 (Orthogonal condition)」にあたる条件を導く．3.2節と同じく X, X_o, \tilde{X} の3つの曲面を考え，

3.2 節と同じ記号を用いる。釣り合い条件の第 3 式 (2.8) より

$$\begin{aligned}
0 &= -(\kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 + q_n)HK \\
&= T_1 K(-\kappa_1 H) + T_2 H(-\kappa_2 K) - q_n HK \\
&= \tilde{K} H_o + \tilde{H} K_o - q_n HK \\
&= (\tilde{H}, -q_n H, H_o) \begin{pmatrix} K_o \\ K \\ \tilde{K} \end{pmatrix} = (H_o, H, \tilde{H}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -q_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_o \\ K \\ \tilde{K} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と変形される。そこで

$$\mathbf{H} := \begin{pmatrix} H_o \\ H \\ \tilde{H} \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -q_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} := \begin{pmatrix} K_o \\ K \\ \tilde{K} \end{pmatrix}$$

とおくと、膜の釣り合い条件第 3 式は定行列 Λ に関する直交条件

$${}^t \mathbf{H} \Lambda \mathbf{K} = 0$$

と同値である。以上によって、次の定理が示された：

定理 3.9 ([9, 定理 4.1]). 膜曲面 X は曲率線座標 (x, y) で表されているとする。 X の法線方向に一定荷重 $\mathbf{q} = q_n \nu$ がかかり、さらに主曲率方向に面内せん断 S が生じないと仮定する。このとき膜 X が釣り合うためには、 X の Combescure 変換 \tilde{X} が存在し、直交条件

$${}^t \mathbf{H} \Lambda \mathbf{K} = 0 \tag{3.19}$$

を満たすことが必要十分である。ここで

$$\mathbf{H} := \begin{pmatrix} H_o \\ H \\ \tilde{H} \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -q_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} := \begin{pmatrix} K_o \\ K \\ \tilde{K} \end{pmatrix}$$

である。さらにこのとき、面内応力成分 T_1, T_2 は次式で与えられる：

$$T_1 = \frac{\kappa_2}{\tilde{\kappa}_2} = \frac{\tilde{K}}{K}, \quad T_2 = \frac{\kappa_1}{\tilde{\kappa}_1} = \frac{\tilde{H}}{H}.$$

証明 . 面内応力成分の式の導出が残っているが、これは補題 3.7 で示したとおり (3.16) が成り立つので、関係式 $H_o = -\kappa_1 H$, $K_o = -\kappa_2 K$, 及び、(3.13) を代入して整理すれば主張が従う。 \square

注意 3.10. 3.1 節の定義より，法線方向に一定荷重が作用し，主曲率方向に面内せん断が生じない釣り合い状態の膜曲面は O 曲面の特別な場合であり，以下では**膜 O 曲面 (membrane O surfaces)** と呼ぶ。

3.4 膜 O 曲面の第一積分による特徴づけ

いま，上記で示した膜 O 曲面に関する定理 3.9 を，Combescure 変換を用いない形で再定式化しよう．ただし，3.2 節と同じく X, X_o, \tilde{X} の 3 つの曲面を考え，3.2 節や 3.3 節と同じ記号を用いる．

補題 3.11. ベクトル \mathbf{H}, \mathbf{K} に対し，

$$\mathbf{H}_y = p\mathbf{K}, \quad \mathbf{K}_x = q\mathbf{K}$$

が成り立つ．

証明． 一連の関係式 (1.11)–(1.14) と (3.14) をベクトルの形で書いたものである． □

補題 3.12. 膜 O 曲面 X は次の形の第一積分をもつ：

$${}^t\mathbf{H}\Lambda\mathbf{H} = -f(x), \quad {}^t\mathbf{K}\Lambda\mathbf{K} = -g(y).$$

ここで f は x にのみ依存する関数， g は y にのみ依存する関数である．

証明． 主張を示すためには，

$$({}^t\mathbf{H}\Lambda\mathbf{H})_y = 0, \quad ({}^t\mathbf{K}\Lambda\mathbf{K})_x = 0.$$

を示せば十分である．いま，膜 O 曲面に対する直交条件（釣り合い第 3 式） ${}^t\mathbf{H}\Lambda\mathbf{K} = 0$ を思い出すと，補題 3.11 より

$$({}^t\mathbf{H}\Lambda\mathbf{H})_y = p({}^t\mathbf{K}\Lambda\mathbf{H} + {}^t\mathbf{H}\Lambda\mathbf{K}) = 0$$

が得られる．後者も同様に示せる． □

この第一積分を用いて，膜 O 曲面に関する先の定理を述べ直すことができる：

定理 3.13 ([9, 定理 4.2]). 法線方向に一定荷重がかかり，主曲率方向に面内せん断が生じない膜 X が釣り合うためには，Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式 (1.10)–(1.14) に加えて拘束条件

$$\frac{g(y)}{K^2}\kappa_1^2 + \frac{f(x)}{H^2}\kappa_2^2 = q_n(\kappa_1 - \kappa_2)^2 \tag{3.20}$$

が成り立つことが必要十分である．このとき，面内応力成分 T_1, T_2 は次式で決まる：

$$2\kappa_2 T_1 + q_n = \frac{g(y)}{K^2}, \quad 2\kappa_1 T_2 + q_n = \frac{f(x)}{H^2}. \quad (3.21)$$

証明．計算により

$$\begin{aligned} -f(x) &= {}^t \mathbf{H} \Lambda \mathbf{H} = 2\tilde{H} H_o - q_n H^2 = -(2\kappa_1 T_2 + q_n) H^2, \\ -g(y) &= {}^t \mathbf{K} \Lambda \mathbf{K} = 2\tilde{K} K_o - q_n K^2 = -(2\kappa_2 T_1 + q_n) H^2, \end{aligned}$$

が成り立つので，面内応力成分の関係式 (3.21) は第一積分の式と同値である．このとき膜の釣り合い第 3 式 (2.8) により

$$\begin{aligned} 0 &= 2\kappa_1 \kappa_2 (\kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 + q_n) \\ &= \kappa_1^2 (2\kappa_1 T_1) + \kappa_2^2 (2\kappa_1 T_2) + 2\kappa_1 \kappa_2 q_n \\ &= \kappa_1^2 \left(\frac{g(y)}{K^2} - q_n \right) + \kappa_2^2 \left(\frac{f(x)}{H^2} - q_n \right) + 2\kappa_1 \kappa_2 q_n \\ &= \frac{g(y)}{K^2} \kappa_1^2 + \frac{f(x)}{H^2} \kappa_2^2 - q_n (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \end{aligned}$$

が得られるので，これが拘束条件 (3.20) である． □

3.5 膜 O 曲面の形状が定める応力分布

釣り合い状態にある膜の形状からその応力分布を決めることを考えよう．簡単のため $\mathcal{K} = \kappa_1 \kappa_2 \neq 0$ を仮定する．曲面 X の形状が定まっているとき，膜の釣り合い方程式 (2.6), (2.7), (2.8) は未知変数 T_1, T_2 の 2 つであり，一般に過剰決定系である．そのため，法線方向の一定荷重 q_n が与えられたとき，拘束条件 (3.20) を満たす関数 $f(x), g(y)$ が存在するような曲面を許容的 (admissible) であると呼ぶこととする．拘束条件 (3.20) により，以下の定理が示される：

定理 3.14 ([9, 定理 4.3]). X を許容的曲面とする．この時，以下が成り立つ．

- (a) $q_n = 0$ のとき，(自明な定数倍を除いて) 応力分布は (3.21) によって一意的に決まる．
- (b) $q_n \neq 0$ かつ

$$\left[\log \left(\frac{\kappa_1 H}{\kappa_2 K} \right) \right]_{xy} \neq 0 \quad (3.22)$$

のとき、付随する面内垂直応力成分 T_1, T_2 は (3.21) により一意に決まる。

(c) $q_n \neq 0$ かつ

$$\left[\log \left(\frac{\kappa_1 H}{\kappa_2 K} \right) \right]_{xy} = 0 \quad (3.23)$$

のとき、変数分離によって

$$\frac{\kappa_1 H}{\kappa_2 K} = \frac{A(x)}{B(y)} \quad (3.24)$$

と表せる。このとき取りうる応力分布は 1 パラメータ族 $T_1(\varepsilon), T_2(\varepsilon)$ で表記でき、次式で与えられる：

$$T_1(\varepsilon) = T_1 - \varepsilon \frac{B^2}{2\kappa_2 K^2}, \quad T_2(\varepsilon) = T_2 + \varepsilon \frac{A^2}{2\kappa_1 H^2}. \quad (3.25)$$

ここで、 $T_1(0) = T_1, T_2(0) = T_2$ は (3.21) によって決まる。

証明 . 2 つのペア $f, g, \tilde{f}, \tilde{g}$ に対して拘束条件を満たす許容的曲面 X を考えよう。すなわち、

$$\frac{g(y)}{K^2} \kappa_1^2 + \frac{f(x)}{H^2} \kappa_2^2 = q_n (\kappa_1 - \kappa_2)^2, \quad \frac{\tilde{g}(y)}{K^2} \kappa_1^2 + \frac{\tilde{f}(x)}{H^2} \kappa_2^2 = q_n (\kappa_1 - \kappa_2)^2$$

を満たす $f, g, \tilde{f}, \tilde{g}$ を考えよう。

(a): $q_n = 0$ のとき

$$\frac{f(x)}{g(y)} = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(y)} = -\frac{\kappa_1^2 H^2}{\kappa_2 K^2} \quad (3.26)$$

であるから、 $\tilde{f}(x)/f(x) = \tilde{g}(y)/g(y)$ は (左辺は x のみ、右辺は y のみの関数であるから) 定数である。したがって、(3.21) より応力は一意に決まる。

$q_n \neq 0$ のとき、辺々引いて

$$(\tilde{g}(y) - g(y)) \frac{\kappa_1^2}{K^2} + (\tilde{f}(x) - f(x)) \frac{\kappa_2^2}{H^2} = 0 \quad (3.27)$$

を得る。

(b)

$$\left[\log \left(\frac{\kappa_1 H}{\kappa_2 K} \right) \right]_{xy} \neq 0 \quad (3.28)$$

のとき $\tilde{f} = f, \tilde{g} = g$ となり、 $\tilde{T}_1 = T_1, \tilde{T}_2 = T_2$ を得る。

(c)

$$\left[\log \left(\frac{\kappa_1 H}{\kappa_2 K} \right) \right]_{xy} = 0 \quad (3.29)$$

のとき、変数分離によって

$$\frac{\kappa_1 H}{\kappa_2 K} = \frac{A(x)}{B(y)} \quad (3.30)$$

と表すことができ、

$$\frac{\tilde{f} - f}{A^2} = -\frac{\tilde{g} - g}{B^2} = \varepsilon = \text{const.} \quad (3.31)$$

となる（先と同様、左辺は x のみ、右辺は y のみの関数ゆえに定数）。ゆえに $\tilde{T}_1 = T_1(\varepsilon)$, $\tilde{T}_2 = T_2(\varepsilon)$ とおくと、

$$2\kappa_2 T_1 + q_n = \frac{g}{K^2}, \quad 2\kappa_2 \tilde{T}_1 + q_n = \frac{\tilde{g}}{K^2},$$

の辺々引くことにより

$$2\kappa_1(T_1 - \tilde{T}_1) = \frac{g - \tilde{g}}{K^2} = \frac{\varepsilon B^2}{K^2} \iff \tilde{T}_1 = T_1 - \frac{\varepsilon B^2}{2\kappa_1 K^2}$$

を得る。 \tilde{T}_2 についても同様に示される。 □

4 様々な膜 O 曲面

4.1 法線方向の荷重ゼロのとき：極小曲面の Combescure 変換

法線方向の荷重がないとき、すなわち $q_n = 0$ のとき、直交条件 (3.19) は

$$(H_o, \tilde{H}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_o \\ \tilde{K} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.1)$$

と簡単化される。よって、直交条件は曲面 $\tilde{\Sigma}$ に対する制約を課す一方で、 Σ は $\tilde{\Sigma}$ の任意の Combescure 変換である（膜の方に直接の制約はない）。いま、

$$\tilde{\kappa}_1 = -\frac{H_o}{\tilde{H}}, \quad \tilde{\kappa}_2 = -\frac{K_o}{\tilde{K}} \iff H_o = -\tilde{\kappa}_1 \tilde{H}, \quad K_o = -\tilde{\kappa}_2 \tilde{K},$$

に注意すると、

$$(H_o, \tilde{H}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_o \\ \tilde{K} \end{pmatrix} = \tilde{H} K_o + H_o \tilde{K} = -\tilde{H} \tilde{K} (\tilde{\kappa}_1 + \tilde{\kappa}_2)$$

であるから、(4.1) は

$$2\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\kappa}_1 + \tilde{\kappa}_2 = 0 \quad (4.2)$$

となる．すなわち極小曲面 \tilde{X} の任意の Combescure 変換は，膜 O 曲面とみなすことができる．拘束条件 (3.20) より

$$\left(\log \left(\frac{H_o}{K_o} \right) \right)_{xy} = 0 \quad (4.3)$$

を得る．すなわち変数分離できることを示しており，

$$\log(H_o/K_o) = -A(x) + B(y) \iff H_o = K_o e^{-A(x)+B(y)} \iff H_o e^{A(x)} = K_o e^{B(y)}$$

という形で表せるので，それぞれの曲率線の適切な変数変換によって

$$H_o = -K_o = e^{-\varphi} \quad (4.4)$$

を得る．Gauss 方程式 (1.10) は Liouville 方程式

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = e^{-2\varphi} \quad (4.5)$$

となり，Mainardi-Codazzi 方程式 (1.12), (1.14) は $p = \varphi_y$, $q = \varphi_x$ となる．

4.2 特殊化：線型 Weingarten 曲面

以下では，法線方向の荷重がゼロでない場合を考える．このとき条件

$$\tilde{H} = \mu H - \lambda H_o, \quad \tilde{K} = \mu K - \lambda K_o \quad (4.6)$$

は許容的である．この条件の下で，直交条件 (3.20) は以下に帰着される：

$$(H_o, H) \begin{pmatrix} 2\lambda & -\mu \\ -\mu & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_o \\ K \end{pmatrix} = 0. \quad (4.7)$$

これはまさに，線型 Weingarten 曲面の拘束条件 (2.9) である．膜曲面 X に平行な曲面 X^\parallel ，すなわち

$$X^\parallel := X + c\nu, \quad c = -\frac{\mu}{q_n}$$

を用いると，

$$X_x^\parallel = H^\parallel \mathbf{e}_1, \quad X_y^\parallel = K^\parallel \mathbf{e}_2, \quad H^\parallel = H + cH_o, \quad K^\parallel = K + cK_o$$

と表すことができ，(4.7) は

$$(H_o, H^\parallel) \begin{pmatrix} 2\lambda p_3 - \mu^2 & 0 \\ 0 & p_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_o \\ K^\parallel \end{pmatrix} = 0. \quad (4.8)$$

あるいは曲面 X^{\parallel} の Gauss 曲率を \mathcal{K}^{\parallel} とおくととき,

$$(\mu^2 - 2\lambda p_3)\mathcal{K}^{\parallel} = p_3^2 \quad (4.9)$$

となる. よって $\mu^2 - 2\lambda p_3 \neq 0$ のとき, 線型 Weingarten 膜曲面は, Gauss 曲率一定曲面の平行曲面として得られる.

5 離散微分幾何と離散膜理論 (純せん断の場合)

本節では, [3] より四辺形からなる離散曲面論を扱うための用語を整理し, 外力ゼロかつ純せん断の場合に離散膜曲面が釣り合うためには曲面が「離散等温曲面 (discrete isothermic surface)」となることが必要十分であることを示す [12]. 離散等温曲面は Bobenko-Pinkall [2] らによって導入された概念であり, 先に示した定理 2.6 の離散化とみなすことができる.

5.1 離散曲面論の基礎 [3]

平面 \mathbb{R}^2 内の格子点 \mathbb{Z}^2 をグラフ $G = (V, E) = (V(\mathbb{Z}^2), E(\mathbb{Z}^2))$ とみなし, 頂点の幾何学的実現 $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ を考える. さらに, 以下のシフト作用素 τ_i , 差分作用素 δ_i を用いる:

$$(\tau_i f)(u) := f(u + e_i), \quad (\delta_i f)(u) := f(u + e_i) - f(u) = (\tau_i f - f)(u), \quad u \in V = V(\mathbb{Z}^2).$$

ここで $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ は \mathbb{R}^2 の標準基底である.

定義 5.1 (離散共役網, [3]). $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ が**離散共役網 (discrete conjugate net, Q-net)** であるとは, ある $c_{12}, c_{21} \in \mathbb{R}$ が存在し

$$\delta_1 \delta_2 f = c_{21} \delta_1 f + c_{12} \delta_2 f \tag{5.1}$$

が成り立つときをいう.

注意 5.2. 滑らかな曲面 $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対する共役網の定義は, 双曲型方程式 $X_{xy} = aX_x + bX_y$ を満たすこと, すなわち第 2 基本行列が対角化されることであった. また (5.1) を書き換えると

$$\tau_1 \tau_2 f - f = (1 + c_{21}) \delta_1 f + (1 + c_{12}) \delta_2 f \tag{5.2}$$

が得られる. 言い換えると 4 点 $f, \tau_1 f, \tau_2 f, \tau_1 \tau_2 f$ が同一平面上にある.

補題 5.3 ([3, 1.1.2 節]). 与えられた c_{ij} に対し, 離散共役網の条件 (5.1) が満たされるためには, 以下の条件を満たす g_i, w_i が存在することが必要十分である:

$$\delta_i f = g_i w_i, \quad \delta_i w_j = \gamma_{ji} w_i, \quad \delta_i g_j = (\tau_j g_i) \gamma_{ij}.$$

ここで,

$$\gamma_{ji} := \frac{g_i}{\tau_i g_j} c_{ji} = \frac{g_i}{g_j} \frac{c_{ji}}{1 + c_{ij}}$$

とおいた (γ_{ij} は rotation coefficients と呼ばれる).

証明 . (\Leftarrow) g_i, w_i の存在を仮定して (5.1) を示す. 仮定より $\delta_2 f = g_2 w_2$ であるから, 任意の $u \in V$ に対して

$$\begin{aligned} \delta_1 \delta_2 f(u) &= g_2(u + e_1) w_2(u + e_1) - g_2(u) w_2(u) \\ &= g_2(u + e_1) w_2(u + e_1) - g_2(u) w_2(u + e_1) + g_2(u) w_2(u + e_1) - g_2(u) w_2(u) \\ &= \delta_1 g_2(u) \cdot (\tau_1 w_2)(u) + g_2(u) \cdot (\delta_1 w_2)(u) \\ &= \gamma_{12} (\tau_2 g_1)(u) \cdot (\tau_1 w_2)(u) + \gamma_{21} g_2 w_1 \\ &= c_{12} g_2(u) (\tau_1 w_2)(u) + \frac{c_{21}}{1 + c_{12}} g_1 w_1 \\ &= c_{12} g_2(u) ((\tau_1 w_2)(u) - w_2(u) + w_2(u)) + c_{21} g_1 w_1 \frac{1 + c_{12} - c_{12}}{1 + c_{12}} \\ &= c_{12} g_2 \delta_1 w_2 + c_{12} \delta_2 f + c_{21} \delta_1 f - \frac{c_{21} c_{12}}{1 + c_{12}} g_1 w_1 \\ &= c_{12} \delta_2 f + c_{21} \delta_1 f + c_{12} \left(\gamma_{21} g_2 - \frac{c_{21}}{1 + c_{12}} g_1 \right) w_1 \\ &= c_{12} \delta_2 f + c_{21} \delta_1 f \end{aligned}$$

となり, 示された.

(\Rightarrow) まず, 方程式系 $\delta_i g_j = c_{ij} g_j$ が解 g_j をもつことに注意する. これは, 両立条件 $\tau_1 \tau_2 g_j = \tau_2 \tau_1 g_j$ が自明に成り立つことから従う^{*5}. そこで $w_j = g_j^{-1} \delta_j f \iff \delta_j f = g_j w_j$ とおく. $\delta_i \delta_j f = c_{ji} \delta_i f + c_{ij} \delta_j f$ より,

$$\begin{aligned} \delta_i w_j &= \frac{\tau_i \delta_j f}{\tau_i g_j} - \frac{\delta_j f}{g_j} = \frac{\tau_i \delta_j f}{\tau_i g_j} - \frac{\delta_j f}{\tau_i g_j} + \frac{\delta_j f}{\tau_i g_j} - \frac{\delta_j f}{g_j} \\ &= \frac{\delta_i \delta_j f}{\tau_i g_j} + \delta_j f \left(\frac{1}{\tau_i g_j} - \frac{1}{g_j} \right) = \frac{c_{ji} \delta_i f + c_{ij} \delta_j f}{\tau_i g_j} + \delta_j f \frac{-\delta_i g_j}{(\tau_i g_j) \cdot g_j} \\ &= \frac{g_i}{\tau_i g_j} c_{ji} w_i + \frac{\delta_j f}{\tau_i g_j} \left(c_{ij} - \frac{\delta_i g_j}{g_j} \right) \end{aligned}$$

が得られるが, $\delta_i g_j = c_{ij} g_j$ より

$$\delta_i w_j = \gamma_{ji} w_i, \quad \gamma_{ji} = \frac{g_i}{\tau_i g_j} c_{ji}$$

^{*5} 2次元以上では, “discrete Darboux system” の条件が本質的となる.

を得る．最後に γ_{ij} の定義式より

$$\delta_i g_j = c_{ij} g_j = \frac{\tau_j g_i}{g_j} \gamma_{ij} g_j = (\tau_j g_i) \gamma_{ij}$$

が得られ，主張が示された。□

定義 5.4 (離散曲率線網, [3], [5]). 離散共役網 $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ が**離散曲率線網 (discrete curvature line net, curvature lattice, circular net)** であるとは，任意の $u \in V$ に対して 4 点 $f(u)$, $\tau_1 f(u)$, $\tau_2 f(u)$, $\tau_1 \tau_2 f(u)$ が同一円周上にあるときをいう。

注意 5.5. 上記の定義は，Cayley (1872) まで遡る以下の考察を離散化する形で与えられている*6：滑らかな曲面が曲率線でパラメータづけされるためには，座標曲線によって曲面を無限小の四辺形に分割したとき，各無限小四辺形の 4 頂点の複比が負の実数であることが必要十分である（例えば [5], p.10 の補題を参照）。

補題 5.6 ([3, 定理 3.7]). 4 点 $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{R}^3$ が同一平面上にあるとする：

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i f_i = 0, \quad \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 0.$$

これらが同一円周上にあるためには，

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i |f_i|^2 = 0$$

が成り立つことが必要十分である。

証明 . 仮定より，任意の $c \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\sum_i \alpha_i |f_i - c|^2 = \sum_i \alpha_i |f_i|^2 - 2 \left\langle \sum_i \alpha_i f_i, c \right\rangle + |c|^2 \sum_i \alpha_i = \sum_i \alpha_i |f_i|^2$$

であることに注意する．いま 3 点 f_1, f_2, f_3 を通る中心 c ，半径 r の円は存在するので，

$$\sum_i \alpha_i |f_i|^2 = \sum_i \alpha_i |f_i - c|^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) r^2 + \alpha_4 |f_4 - c|^2 = -\alpha_4 (r^2 - |f_4 - c|^2)$$

が得られ，主張が示された。□

*6 Cayley, A.: On the surfaces divisible into squares by their curves of curvature, *Proc. London Math. Soc* 4 (1872), pp8–9, 120–121.

定理 5.7 (Analytic circularity criteria, [3, 定理 3.8]). 離散共役網 $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対し, 以下は同値である :

- (1) f は離散曲率線網である (すなわち 4 点が同一円周上にある).
- (2) $\gamma_{21}|w_1|^2 + \gamma_{12}|w_2|^2 = -2\langle w_1, w_2 \rangle$ が成り立つ.
- (3) $\langle \tau_2 w_1, w_2 \rangle + \langle \tau_1 w_2, w_1 \rangle = 0$ が成り立つ.
- (4) $\frac{|\tau_2 w_1|^2}{|w_1|^2} = \frac{|\tau_1 w_2|^2}{|w_2|^2} = 1 - \gamma_{12}\gamma_{21}$ が成り立つ.

証明 . (1) \iff (2) のみ示す. 共役網の条件より,

$$1 \cdot \tau_1 \tau_2 f - (1 + c_{21})\tau_1 f - (1 + c_{12})\tau_2 f + (c_{12} + c_{21} - 2)f = 0$$

となるので, 先の補題により同一円周上にある条件は

$$|\tau_1 \tau_2 f - f|^2 - (1 + c_{21})|\tau_1 f - f|^2 - (1 + c_{12})|\tau_2 f - f|^2 = 0$$

すなわち

$$|\tau_1 \tau_2 f - f|^2 = (1 + c_{21})|\delta_1 f|^2 - (1 + c_{12})|\delta_2 f|^2 \quad (5.3)$$

と書き直せる. 一方で (5.2) より

$$|\tau_1 \tau_2 f - f|^2 = (1 + c_{21})^2 |\delta_1 f|^2 + 2(1 + c_{12})(1 + c_{21})\langle \delta_1 f, \delta_2 f \rangle + (1 + c_{12})^2 |\delta_2 f|^2$$

が得られるので, (5.3) より

$$\frac{c_{21}}{1 + c_{12}} |\delta_1 f|^2 + \frac{c_{12}}{1 + c_{21}} |\delta_2 f|^2 = -2\langle \delta_1 f, \delta_2 f \rangle$$

を得る. 関係式 $\delta_i f = g_i w_i$, $\gamma_{ji} = \frac{g_i c_{ji}}{g_j (1 + c_{ij})}$ を代入すると (2) の条件が得られる. \square

5.2 純せん断の場合 [12]

以下では格子点 $\mathbb{Z}^2 = (V, E)$ の幾何学的実現 $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ で離散共役網であるものを考える. 面内応力 F は各辺の中央に作用しているものとする, すなわち写像 $F : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ を面内応力とし, 以下ではペア (f, F) を**離散膜曲面 (discrete shell membrane)** と呼ぶ. 本節では純せん断 (pure shear) の場合について, すなわち各 $e \in E$ に対して $F(e)$ が e と平行な場合を考える.

まず, 一枚のプレート内での釣り合い式は

$$A + B + C + D = 0$$

となる (local closing condition). これにより, もう一つの四辺形 $\tilde{f}, \tau_1\tilde{f}, \tau_2\tilde{f}, \tau_1\tau_2\tilde{f}$ が存在するが, これは「局所的」な存在である. 大域的な写像 $\tilde{f}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ として存在するためには, 両立条件 $\tau_1\tau_2\tilde{f} = \tau_2\tau_1\tilde{f}$ が必要十分である. これは以下の条件に書き換えられる:

$$0 = \tau_1\tau_2\tilde{f} - \tau_2\tau_1\tilde{f} = \tau_1(D + \tilde{f}) - \tau_2(\tilde{f} - A) = \tau_1D - A + \tau_2A - D.$$

いま「隣同士のプレートの釣り合い条件」を考えると

$$B + \tau_1D = 0, \quad C + \tau_2A = 0$$

であり, $A + B + C + D = 0$ に代入するとこれは両立条件と同値であることがわかる.

補題 5.8. 力の釣り合い条件は, 条件 $\tilde{f} - \tau_1\tilde{f} = A, \tau_2\tilde{f} - \tilde{f} = D$ を満たす写像 $\tilde{f}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在することが必要十分である.

特に $A \parallel \tau_1f - f, D \parallel \tau_2f - f$ より

$$\tau_1\tilde{f} - \tilde{f} \parallel \tau_1f - f, \quad \tau_2\tilde{f} - \tilde{f} \parallel \tau_2f - f,$$

すなわち「対応する接ベクトルが平行」である. ゆえに滑らかな曲面論に鑑み, 次の定義を復習しよう:

定義 5.9. 2つの離散共役網 $f, \tilde{f}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ が**離散 Combescure 変換 (discrete Combescure transform)** であるとは, 対応する接ベクトルが平行であるときをいう.

一方, 膜が釣り合うためにはモーメントの釣り合い条件も必要であるが, これが以下の定理に「対角線の平行条件」として反映されている:

定理 5.10 ([12, 定理 3.1]). $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ を離散共役網とする. f に純せん断がかかっている場合, f が釣り合い状態の離散膜曲面であるためには, f が離散 Königs 網であることが必要十分である. すなわち, f の Combescure 変換 \tilde{f} で

$$\tau_1\tilde{f} - \tau_2\tilde{f} \parallel \tau_1\tau_2f - f, \quad \tau_1\tau_2\tilde{f} - \tilde{f} \parallel \tau_1f - \tau_2f$$

を満たすものが存在することが必要十分である.

証明. 原点基準のモーメントの釣り合い式は

$$(\tau_1f + f) \times A + (\tau_1f + \tau_1\tau_2f) \times B + (\tau_2f + \tau_1\tau_2f) \times C + (\tau_2f + f) \times D = 0$$

となる．力の釣り合い式より $2f \times (A + B + C + D) = 0$ が成り立つことと，純せん断である事実より

$$(\tau_1 f - f) \times B + (\tau_2 f - f) \times C = 0 \quad (5.4)$$

が得られる．また，点 $f = f(u)$ 基準のモーメントの釣り合い式は

$$\left(\frac{\tau_1 \tau_2 f + \tau_1 f}{2} - f \right) \times B + \left(\frac{\tau_1 \tau_2 f + \tau_2 f}{2} - f \right) \times C = 0$$

となるが (5.4) より

$$(\tau_1 \tau_2 f - f) \times (B + C) = 0$$

を得る．一方で

$$\tau_1 \tilde{f} - \tau_1 \tau_2 \tilde{f} = B, \quad \tau_1 \tau_2 \tilde{f} - \tau_2 \tilde{f} = C$$

であるから $B + C = \tau_1 \tilde{f} - \tau_2 \tilde{f}$ が得られる．したがって

$$(\tau_1 \tau_2 f - f) \times (\tau_1 \tilde{f} - \tau_2 \tilde{f}) = 0$$

となり， $(\tau_1 \tau_2 f - f) \parallel (\tau_1 \tilde{f} - \tau_2 \tilde{f})$ である． □

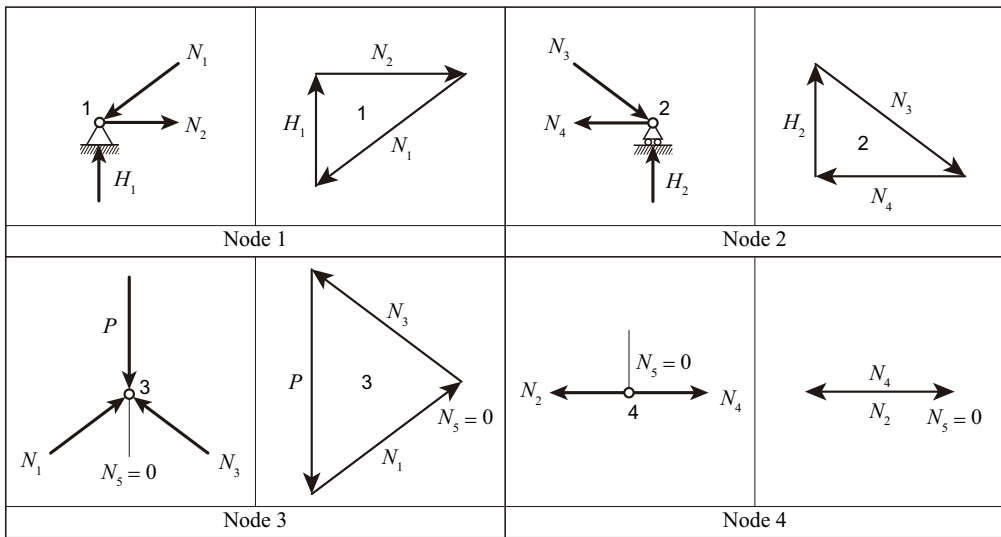
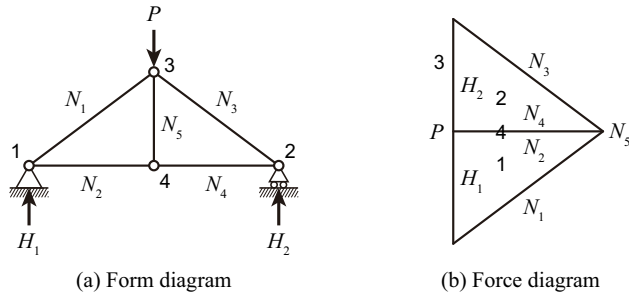
定義 5.11 ([2], [3]). 離散曲率線網 $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ が Königs 網であるとき，**離散等温網 (discrete isothermic net)** と呼ぶ．

さらに離散等温網に対し，先に現れた Combescure 変換 \tilde{f} は **Christoffel 変換 (Christoffel transform)** と呼ばれる．これらの事実をまとめると，以下の定理が得られる：

定理 5.12 ([12, 定理 3.2]). 離散曲率線網 $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ に純せん断が作用する場合， f が釣り合い状態の膜曲面であるためには f が離散等温網であることが必要十分である．このとき， f の Christoffel 変換 \tilde{f} は f の “force diagram” にあたる．

6 力の分布と釣合形状の幾何学的関係に関わる関連理論

6.1 Graphic statics



(c) 各節点 (node) での釣り合い (左 : form diagram, 右 : force diagram)

図 5: form diagram と force diagram

トラス構造物の釣り合い軸力を作図により求める手法として古くから graphic statics (図式力学) [7] と呼ばれる手法が知られている。Graphic statics については [12], 3 節冒頭でも言及されている。Graphic statics は主に 2 次元トラスを対象とし, form diagram が構造物の形状 (部材配置) を表し, force diagram が外力と軸力の釣り合いを表して

いる。Form diagram と force diagram は互いが互いの reciprocal diagram となっている (図 5 (a), (b))。Force diagram の各辺の長さの比は各辺に対応する部材の軸力の大きさの比を表しており, 図 5(c) は form diagram における各節点での力の釣り合いと対応する force diagram の辺で囲まれた領域を表している。ただし, 図 5(c) において form diagram に示す力のベクトルと force diagram に示す力のベクトルは長さを 1:2 として表示している。図 5(c) に示すように各節点において力のベクトルの始点と終点を接続すると force diagram 上では 1 周するように閉じることが力の釣り合いを表している。Graphic statics を用いることで与えられたトラス構造物の形状 (form diagram) と荷重に対して釣り合う軸力の大きさ (force diagram) を求めることができるとともに, 与えられた境界条件と荷重に対して force diagram を作図したのち, 対応する軸力で釣り合うトラスの形状 (form diagram) を求めることもできる。

6.2 Thrust network analysis

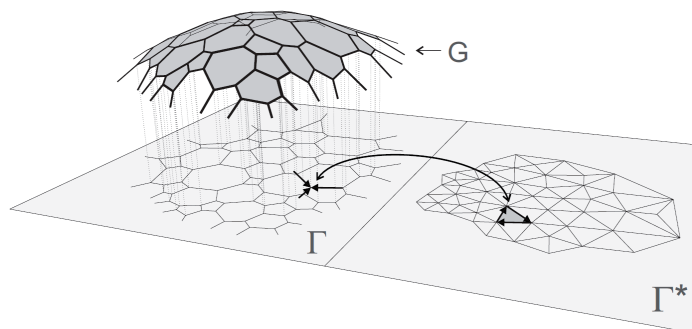


図 6: Thrust network analysis (文献 [1] より引用)

Graphic statics は主に 2 次元トラスを対象とする手法であるが, graphic statics を用いて 3 次元空間内の曲面の鉛直荷重 (重力) 下での圧縮力のみによる釣り合いを解析する手法として thrust network analysis (TNA) [1] が提案されている。TNA は組積造アーチやドームなどの鉛直荷重を受け, 圧縮力のみで釣り合う構造物の力の流れを求める手法であり, 曲げや引張に弱い組積造構造物において圧縮力が構造物の断面内で伝達される, すなわち, 曲げや引張力が発生することなく釣り合うことができることを TNA により確認できる。TNA では圧縮力で釣り合う曲面を複数の節点と辺からなる離散曲面 G (各面は平面でないことに注意) とし, G を水平面内へ投影した図により graphic statics を用いて水平方向の力の釣り合いを考え (図 6 中の Γ と Γ^*), 各節点での鉛直方向の釣り合

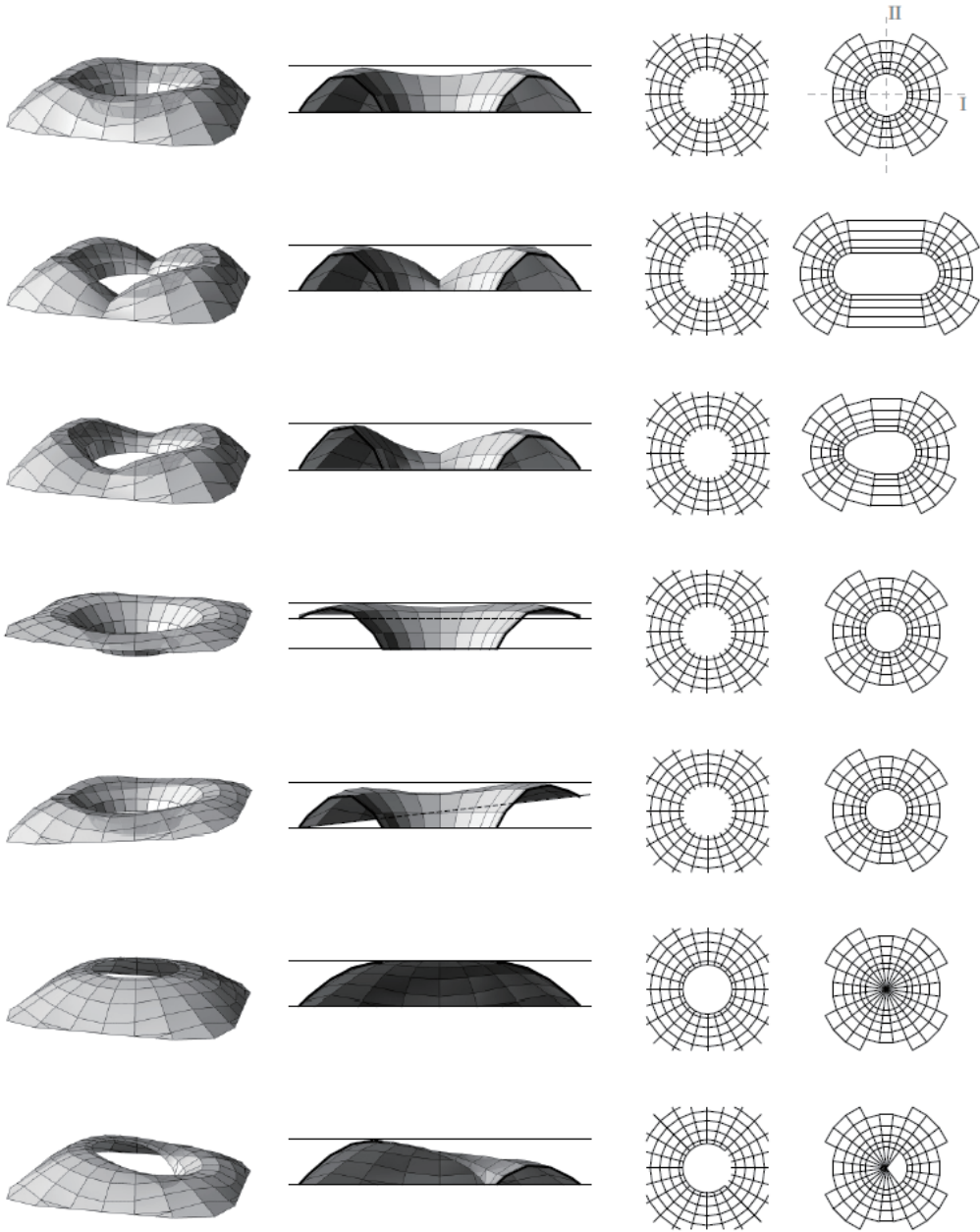


図 7: 同一の Γ より得られたさまざまな釣合曲面 (文献 [1] より引用)

いより G の節点の鉛直方向の高さを決定する。ここで、 Γ は form diagram, Γ^* は force diagram に対応し、与えられた Γ に対して Γ^* が存在するとき水平方向の釣り合いは満たされることから、鉛直荷重に対して圧縮力のみで釣り合う曲面 G は各節点の高さおよび Γ^* のスケール（拡大・縮小）を変数とした各節点の鉛直方向の釣合式を与えられた境界条件下で解く線形最適化問題として定式化できる。ある form diagram に対応する force diagram は一意ではなく、図 7 のように force diagram を操作して指定した様々な応力分布で鉛直荷重に対し圧縮力のみで釣り合う曲面形状を得ることができる。

7 Rogers-Schief 論文の理論にもとづく釣合曲面の形態創生

7.1 極小曲面における応力分布の確認

文献 [12] にもとづき構築した form surface である極小曲面 (Catenoid など) が荷重を加えない状態で文献内で示されているように等張力で釣り合うこと、主応力が曲率線方向を向くことを建築分野における構造解析手法を用いて確認した。

7.2 極小曲面における force surface から form surface の生成

TNA は曲面の圧縮力の分布や流れを可視化する手法であるとともに、force diagram を操作することで鉛直荷重に対して圧縮力のみで釣り合う曲面形状を生成することができる [1]。これに着想を得て、文献 [12] の理論にもとづき、本節では特に外力が作用しない場合にある張力分布で釣り合うさまざまな曲面形状を force surface を操作して得る手法を検討する。ここでの検討は、外力ゼロかつせん断ゼロの釣合い曲面の構築に役立つものである。

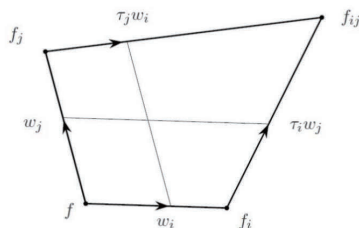


図 8: Circular net を構成する四辺形

定理 5.12 より，離散曲率線網で表された離散曲面が外力 0 かつ純せん断で釣り合うためには form surface および force surface が離散等温曲面であることが必要十分であり，このような force surface は複比が -1 である離散曲率線網 [3] として構築できる．

ここで，離散曲率線網は以下の 4 つの条件式を満たす．

$$\delta_i f = g_i w_i \quad (7.1)$$

$$\delta_i w_j = \gamma_{ji} w_i, \quad i \neq j \quad (7.2)$$

$$\delta_i g_j = (\tau_j g_i) \gamma_{ij}, \quad i \neq j \quad (7.3)$$

$$\gamma_{ji} |w_i|^2 + \gamma_{ij} |w_j|^2 = -2 \langle w_i, w_j \rangle \quad (7.4)$$

ただし， δ は $\delta_i f = f_i - f$, $\delta_j f = f_j - f$ のように差分を表す． $|w_i| = 1$ とおいて，

$$|\delta_i f| = g_i$$

とすれば， g_i はエッジの長さを表す． $|w_i| = 1$ より式 (7.4) は

$$\gamma_{ji} + \gamma_{ij} = -2 \langle w_i, w_j \rangle \quad (7.5)$$

である．以上の条件からは γ_{ji} , γ_{ij} は一意に定まらず，正規化パラメータ α を導入して以下のように定める．

$$\gamma_{ij} = -\frac{g_j}{g_i} \alpha + \left(-2 \langle w_i, w_j \rangle + \frac{g_i}{g_j} \right) (1 - \alpha)$$

$$\gamma_{ji} = -\frac{g_i}{g_j} (1 - \alpha) + \left(-2 \langle w_i, w_j \rangle + \frac{g_j}{g_i} \right) \alpha$$

f , f_i , f_j を既知量として，以下のように順次各量を定める．

$$w_i = g_i^{-1} \delta_i f \quad (w_j \text{ も同様})$$

$$\tau_i w_j = w_j + \gamma_{ji} w_i \quad (\tau_j w_i \text{ も同様})$$

式 (7.3) より，

$$\tau_i g_j = \frac{g_j + g_i \gamma_{ij}}{1 - \gamma_{ij} \gamma_{ji}} \quad (7.6)$$

$$\tau_j g_i = \frac{g_i + g_j \gamma_{ji}}{1 - \gamma_{ji} \gamma_{ij}} \quad (7.7)$$

である．これを i, j の各方向に順次計算して離散曲率線網を構成する．

離散等温曲面を構成するために離散曲率線網の 4 つの条件式 (7.1)–(7.4) に以下の複比 Q の条件式を加える．

$$Q = \frac{(g_i w_i) \cdot ((\tau_j g_i)(\tau_j w_i))}{(g_j w_j) \cdot ((\tau_i g_j)(\tau_i w_j))} = -\frac{g_i (\tau_j g_i)}{g_j (\tau_i g_j)} = -1 \quad (7.8)$$

式 (7.6), (7.7), (7.8) より,

$$\gamma_{ij} - \gamma_{ji} = \frac{g_i^2 - g_j^2}{g_i g_j} \quad (7.9)$$

式 (7.5), (7.9) より,

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{g_i}{g_j} - \frac{g_j}{g_i} \right) - \langle w_i, w_j \rangle$$

$$\gamma_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{g_j}{g_i} - \frac{g_i}{g_j} \right) - \langle w_i, w_j \rangle$$

以上より, 境界の 2 曲線が定まれば離散等温曲面は一意に定まる. 図 9 は 3DCAD ソフトウェアの Rhinoceros およびそのプラグインである Grasshopper を用いて構築した force surface (discrete isothermic surface) の例であり, 図中緑の点を与えることで force surface が一意に定まる.

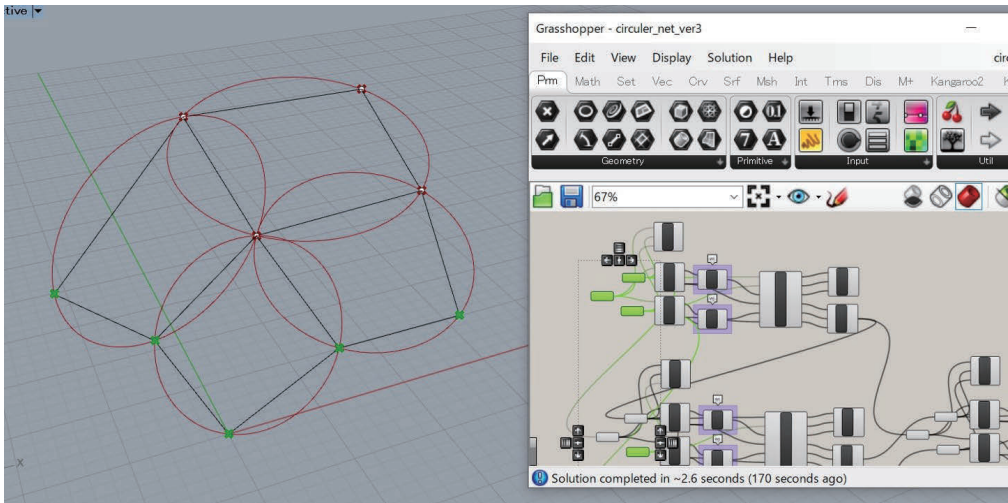
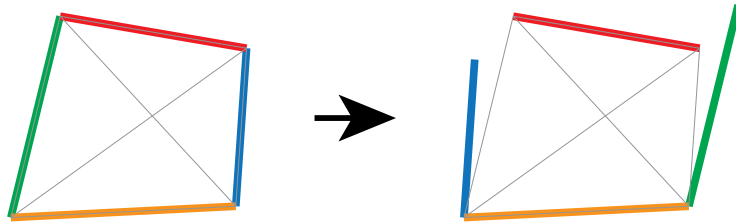
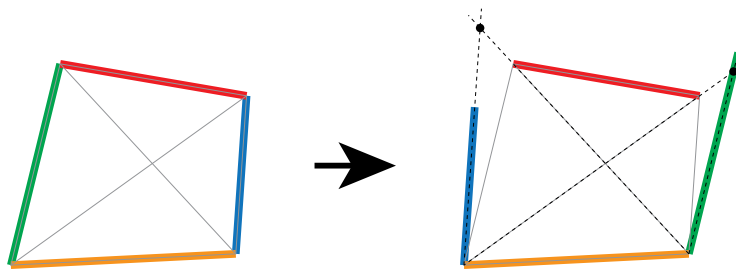


図 9: Rhinoceros + Grasshopper による force surface の構築

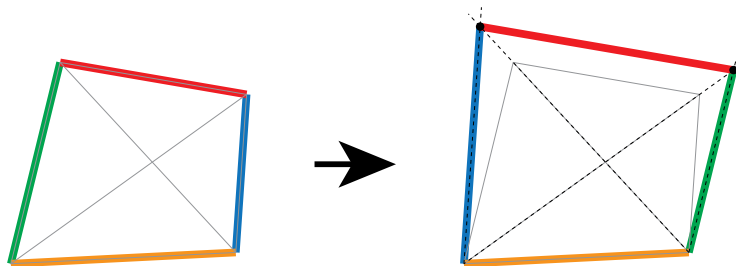
force surface から form surface の構築は graphic statics と同様に曲面の辺を平行移動し, 条件にしたがって並べ替えることで行う. このとき, force surface と form surface の対応する各四角形面の対角線が平行であるという条件から, 拡大縮小を除き form surface は一意に定まる. ある一つの面に関して force surface から form surface を構築する過程は図 10 に示すとおりである. まず, 向かい合う 2 対の辺のうち 1 対を入れ替え, 残る 1 対の任意の辺の端点に接続する. その後, form surface と force surface の対角線が平



1. 一対の辺を入れかえ，残る一対の任意の辺に接続



2. 対角線と入れかえた辺の交点を求める



3. 求めた交点を線分で接続（**—**の平行移動・拡大／縮小）

図 10: form surface の 1 つの面の生成過程；左が force surface, 右が form surface

行であることから，入れ替えた 2 辺と辺を入れ替える前の対角線との交点を求め，交点を form surface の面の頂点とする．このとき，form surface と force surface で対応する辺は平行を保つ．各面について拡大縮小は任意に可能であることから，複数面からなる form surface を図 10 に示す手順を各面について繰り返すことで構成可能である．

7.3 form surface の構築例

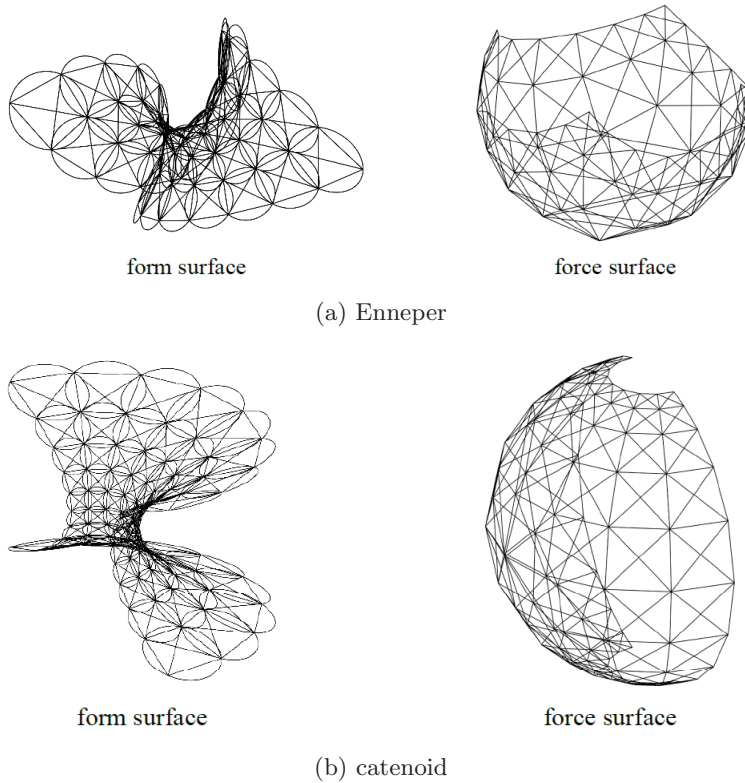


図 11: 曲面生成例

7.2 節に示す手法により force surface を構築し, form surface を force surface より構成した例を図 11 に示す. このとき, 図 11 に示すように form surface も circular net になっていることを確認した.

謝辞

本研究は令和 2 年度 IMI 共同利用研究短期共同研究「シェル理論・膜理論への微分幾何学からのアプローチとその建築曲面設計への応用」および JST CREST JPMJCR1911「設計の新パラダイムを拓く新しい離散的な曲面の幾何学」の支援を受けたものである.

参考文献

- [1] Block, P.: Thrust network analysis, Exploring three-dimensional equilibrium, MIT, 2009, Ph. D. thesis
- [2] Bobenko, A., and Pinkall, U.: Discrete isothermic surfaces, *J. reine angew. Math.* **30**, 4 (1996), 187–208.
- [3] Bobenko, A. I., and Suris, Y. B.: Discrete Differential Geometry: Integrable Structure, Graduate Studies in Mathematics Vol. 98, Amer. Math. Soc.
- [4] Eisenhart, L. P.: A treatise on the differential geometry of curves and surfaces, Dover, New York, 1960.
- [5] Hertrich-Jeromin, U., Hoffmann, T., and Pinkall, U.: A discrete version of the Darboux transform for isothermic surfaces, arXiv:dg-ga/9611009v1.
- [6] 井ノ口順一, 曲面と可積分系, 朝倉書店, 2015.
- [7] Maxwell, J. C.: XLV. On reciprocal figures and diagrams of forces, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* (1864), **27**(182), 250–261.
- [8] Novozhilov, V. V.: Thin shell theory, 2nd edn. Groningen: Noordhoff, 1964.
- [9] Rogers, C., and Schief, W. K.: On the equilibrium of shell membranes under normal loading. Hidden integrability, *Proc. R. Soc. Lond. A* (2003) **459**, 2449–2462.
- [10] Rogers, C., and Schief, W. K.: Darboux and Bäcklund transformations. Geometry and modern applications in soliton theory. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [11] Schief, W. K., and Konopelchenko, B. G.: On the unification of classical and novel integrable surfaces. I. Differential Geometry, *Proc. R. Soc. Lond. A* (2003) **459**, 67–84.
- [12] Schief, W. K.: Integrable structure in discrete shell membrane theory, *Proc. R. Soc. A* (2014) **470**: 20130757.
- [13] Smyth, B.: Soliton surfaces in the mechanical equilibrium of closed membranes, *Comm. Math. Phys.* **250**, 81–94.
- [14] 梅原雅顕, 山田光太郎, 曲線と曲面 -微分幾何的アプローチ- 改訂版, 裳華房, 2015.

MI レクチャーノートシリーズ刊行にあたり

本レクチャーノートシリーズは、文部科学省 21 世紀 COE プログラム「機能数学の構築と展開」(H.15-19 年度)において作成した COE Lecture Notes の続刊であり、文部科学省大学院教育改革支援プログラム「産業界が求める数学博士と新修士養成」(H19-21 年度)および、同グローバル COE プログラム「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」(H.20-24 年度)において行われた講義の講義録として出版されてきた。平成 23 年 4 月のマス・フォア・インダストリ研究所 (IMI) 設立と平成 25 年 4 月の IMI の文部科学省共同利用・共同研究拠点として「産業数学の先進的・基礎的共同研究拠点」の認定を受け、今後、レクチャーノートは、マス・フォア・インダストリに関わる国内外の研究者による講義の講義録、会議録等として出版し、マス・フォア・インダストリの本格的な展開に資するものとする。

平成 30 年 10 月
マス・フォア・インダストリ研究所
所長 佐伯修

シェル理論・膜理論への微分幾何学からの アプローチとその建築曲面設計への応用

発行 2021年7月28日
著者 早川健太郎, 軸丸芳揮, 横須賀洋平, 可香谷隆, 林和希, 堺雄亮
発行 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
九州大学大学院数理学府
〒819-0395 福岡市西区元岡744
九州大学数理・IMI 事務室
TEL 092-802-4402 FAX 092-802-4405
URL <https://www.imi.kyushu-u.ac.jp/>

印刷 城島印刷株式会社
〒810-0012 福岡市中央区白金2丁目9番6号
TEL 092-531-7102 FAX 092-524-4411

シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
COE Lecture Note	Mitsuhiro T. NAKAO Kazuhiro YOKOYAMA	Computer Assisted Proofs - Numeric and Symbolic Approaches - 199pages	August 22, 2006
COE Lecture Note	M.J.Shai HARAN	Arithmetical Investigations - Representation theory, Orthogonal polynomials and Quantum interpolations- 174pages	August 22, 2006
COE Lecture Note Vol.3	Michal BENES Masato KIMURA Tatsuyuki NAKAKI	Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2005 155pages	October 13, 2006
COE Lecture Note Vol.4	宮田 健治	辺要素有限要素法による磁界解析 - 機能数理学特別講義 21pages	May 15, 2007
COE Lecture Note Vol.5	Francois APERY	Univariate Elimination Subresultants - Bezout formula, Laurent series and vanishing conditions - 89pages	September 25, 2007
COE Lecture Note Vol.6	Michal BENES Masato KIMURA Tatsuyuki NAKAKI	Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2006 209pages	October 12, 2007
COE Lecture Note Vol.7	若山 正人 中尾 充宏	九州大学産業技術数理研究センター キックオフミーティング 138pages	October 15, 2007
COE Lecture Note Vol.8	Alberto PARMEGGIANI	Introduction to the Spectral Theory of Non-Commutative Harmonic Oscillators 233pages	January 31, 2008
COE Lecture Note Vol.9	Michael I.TRIBELSKY	Introduction to Mathematical modeling 23pages	February 15, 2008
COE Lecture Note Vol.10	Jacques FARAUT	Infinite Dimensional Spherical Analysis 74pages	March 14, 2008
COE Lecture Note Vol.11	Gerrit van DIJK	Gelfand Pairs And Beyond 60pages	August 25, 2008
COE Lecture Note Vol.12	Faculty of Mathematics, Kyushu University	Consortium "MATH for INDUSTRY" First Forum 87pages	September 16, 2008
COE Lecture Note Vol.13	九州大学大学院 数理学研究院	プロシーディング「損保数理に現れる確率モデル」 — 日新火災・九州大学 共同研究2008年11月 研究会 — 82pages	February 6, 2009

シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
COE Lecture Note Vol.14	Michal Beneš, Tohru Tsujikawa Shigetoshi Yazaki	Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2008 77pages	February 12, 2009
COE Lecture Note Vol.15	Faculty of Mathematics, Kyushu University	International Workshop on Verified Computations and Related Topics 129pages	February 23, 2009
COE Lecture Note Vol.16	Alexander Samokhin	Volume Integral Equation Method in Problems of Mathematical Physics 50pages	February 24, 2009
COE Lecture Note Vol.17	矢嶋 徹 及川 正行 梶原 健司 辻 英一 福本 康秀	非線形波動の数値と物理 66pages	February 27, 2009
COE Lecture Note Vol.18	Tim Hoffmann	Discrete Differential Geometry of Curves and Surfaces 75pages	April 21, 2009
COE Lecture Note Vol.19	Ichiro Suzuki	The Pattern Formation Problem for Autonomous Mobile Robots —Special Lecture in Functional Mathematics— 23pages	April 30, 2009
COE Lecture Note Vol.20	Yasuhide Fukumoto Yasunori Maekawa	Math-for-Industry Tutorial: Spectral theories of non-Hermitian operators and their application 184pages	June 19, 2009
COE Lecture Note Vol.21	Faculty of Mathematics, Kyushu University	Forum "Math-for-Industry" Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis 95pages	November 9, 2009
COE Lecture Note Vol.22	Masakazu Suzuki Hoon Hong Hirokazu Anai Chee Yap Yousuke Sato Hiroshi Yoshida	The Joint Conference of ASCM 2009 and MACIS 2009: Asian Symposium on Computer Mathematics Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences 436pages	December 14, 2009
COE Lecture Note Vol.23	荒川 恒男 金子 昌信	多重ゼータ値入門 111pages	February 15, 2010
COE Lecture Note Vol.24	Fulton B.Gonzalez	Notes on Integral Geometry and Harmonic Analysis 125pages	March 12, 2010
COE Lecture Note Vol.25	Wayne Rossman	Discrete Constant Mean Curvature Surfaces via Conserved Quantities 130pages	May 31, 2010
COE Lecture Note Vol.26	Mihai Ciucu	Perfect Matchings and Applications 66pages	July 2, 2010

シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
COE Lecture Note Vol.27	九州大学大学院 数理学研究院	Forum “Math-for-Industry” and Study Group Workshop Information security, visualization, and inverse problems, on the basis of optimization techniques 100pages	October 21, 2010
COE Lecture Note Vol.28	ANDREAS LANGER	MODULAR FORMS, ELLIPTIC AND MODULAR CURVES LECTURES AT KYUSHU UNIVERSITY 2010 62pages	November 26, 2010
COE Lecture Note Vol.29	木田 雅成 原田 昌晃 横山 俊一	Magma で広がる数学の世界 157pages	December 27, 2010
COE Lecture Note Vol.30	原 隆 松井 卓 廣島 文生	Mathematical Quantum Field Theory and Renormalization Theory 201pages	January 31, 2011
COE Lecture Note Vol.31	若山 正人 福本 康秀 高木 剛 山本 昌宏	Study Group Workshop 2010 Lecture & Report 128pages	February 8, 2011
COE Lecture Note Vol.32	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2011 “TSUNAMI-Mathematical Modelling” Using Mathematics for Natural Disaster Prediction, Recovery and Provision for the Future 90pages	September 30, 2011
COE Lecture Note Vol.33	若山 正人 福本 康秀 高木 剛 山本 昌宏	Study Group Workshop 2011 Lecture & Report 140pages	October 27, 2011
COE Lecture Note Vol.34	Adrian Muntean Vladimír Chalupecký	Homogenization Method and Multiscale Modeling 72pages	October 28, 2011
COE Lecture Note Vol.35	横山 俊一 夫 紀恵 林 卓也	計算機代数システムの進展 210pages	November 30, 2011
COE Lecture Note Vol.36	Michal Beneš Masato Kimura Shigetoshi Yazaki	Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2010 107pages	January 27, 2012
COE Lecture Note Vol.37	若山 正人 高木 剛 Kirill Morozov 平岡 裕章 木村 正人 白井 朋之 西井 龍映 柴 伸一郎 穴井 宏和 福本 康秀	平成23年度 数学・数理科学と諸科学・産業との連携研究ワーク ショップ 拡がっていく数学 ～期待される“見えない力”～ 154pages	February 20, 2012

シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
COE Lecture Note Vol.38	Fumio Hiroshima Itaru Sasaki Herbert Spohn Akito Suzuki	Enhanced Binding in Quantum Field Theory 204pages	March 12, 2012
COE Lecture Note Vol.39	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Multiscale Mathematics: Hierarchy of collective phenomena and interrelations between hierarchical structures 180pages	March 13, 2012
COE Lecture Note Vol.40	井ノ口順一 太田 泰広 寛 三郎 梶原 健司 松浦 望	離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル2012 152pages	March 15, 2012
COE Lecture Note Vol.41	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2012 “Information Recovery and Discovery” 91pages	October 22, 2012
COE Lecture Note Vol.42	佐伯 修 若山 正人 山本 昌宏	Study Group Workshop 2012 Abstract, Lecture & Report 178pages	November 19, 2012
COE Lecture Note Vol.43	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Combinatorics and Numerical Analysis Joint Workshop 103pages	December 27, 2012
COE Lecture Note Vol.44	萩原 学	モダン符号理論からポストモダン符号理論への展望 107pages	January 30, 2013
COE Lecture Note Vol.45	金山 寛	Joint Research Workshop of Institute of Mathematics for Industry (IMI), Kyushu University “Propagation of Ultra-large-scale Computation by the Domain-decomposition-method for Industrial Problems (PUCDIP 2012)” 121pages	February 19, 2013
COE Lecture Note Vol.46	西井 龍映 栄 伸一郎 岡田 勘三 落合 啓之 小磯 深幸 斎藤 新悟 白井 朋之	科学・技術の研究課題への数学アプローチ —数学モデリングの基礎と展開— 325pages	February 28, 2013
COE Lecture Note Vol.47	SOO TECK LEE	BRANCHING RULES AND BRANCHING ALGEBRAS FOR THE COMPLEX CLASSICAL GROUPS 40pages	March 8, 2013
COE Lecture Note Vol.48	溝口 佳寛 脇 隼人 平坂 貢 谷口 哲至 鳥袋 修	博多ワークショップ「組み合わせとその応用」 124pages	March 28, 2013

シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
COE Lecture Note Vol.49	照井 章 小原 功任 濱田 龍義 横山 俊一 穴井 宏和 横田 博史	マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会 II 数式処理研究と産学連携の新たな発展 137pages	August 9, 2013
MI Lecture Note Vol.50	Ken Anjyo Hiroyuki Ochiai Yoshinori Dobashi Yoshihiro Mizoguchi Shizuo Kaji	Symposium MEIS2013: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis 154pages	October 21, 2013
MI Lecture Note Vol.51	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2013 “The Impact of Applications on Mathematics” 97pages	October 30, 2013
MI Lecture Note Vol.52	佐伯 修 岡田 勘三 高木 剛 若山 正人 山本 昌宏	Study Group Workshop 2013 Abstract, Lecture & Report 142pages	November 15, 2013
MI Lecture Note Vol.53	四方 義啓 櫻井 幸一 安田 貴徳 Xavier Dahan	平成25年度 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会 安全・安心社会基盤構築のための代数構造 ～サイバー社会の信頼性確保のための数理学～ 158pages	December 26, 2013
MI Lecture Note Vol.54	Takashi Takiguchi Hiroshi Fujiwara	Inverse problems for practice, the present and the future 93pages	January 30, 2014
MI Lecture Note Vol.55	栄 伸一郎 溝口 佳寛 脇 隼人 洪田 敬史	Study Group Workshop 2013 数学協働プログラム Lecture & Report 98pages	February 10, 2014
MI Lecture Note Vol.56	Yoshihiro Mizoguchi Hayato Waki Takafumi Shibuta Tetsuji Taniguchi Osamu Shimabukuro Makoto Tagami Hirotake Kurihara Shuya Chiba	Hakata Workshop 2014 ~ Discrete Mathematics and its Applications ~ 141pages	March 28, 2014
MI Lecture Note Vol.57	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2014: “Applications + Practical Conceptualization + Mathematics = fruitful Innovation” 93pages	October 23, 2014
MI Lecture Note Vol.58	安生健一 落合啓之	Symposium MEIS2014: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis 135pages	November 12, 2014

シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
MI Lecture Note Vol.59	西井 龍映 岡田 勘三 梶原 健司 高木 剛 若山 正人 脇 隼人 山本 昌宏	Study Group Workshop 2014 数学協働プログラム Abstract, Lecture & Report 196pages	November 14, 2014
MI Lecture Note Vol.60	西浦 博	平成26年度九州大学 IMI 共同利用研究・研究集会 (I) 感染症数理モデルの実用化と産業及び政策での活用のための新たな展開 120pages	November 28, 2014
MI Lecture Note Vol.61	溝口 佳寛 Jacques Garrigue 萩原 学 Reynald Affeldt	研究集会 高信頼な理論と実装のための定理証明および定理証明器 Theorem proving and provers for reliable theory and implementations (TPP2014) 138pages	February 26, 2015
MI Lecture Note Vol.62	白井 朋之	Workshop on “ β -transformation and related topics” 59pages	March 10, 2015
MI Lecture Note Vol.63	白井 朋之	Workshop on “Probabilistic models with determinantal structure” 107pages	August 20, 2015
MI Lecture Note Vol.64	落合 啓之 土橋 宜典	Symposium MEIS2015: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis 124pages	September 18, 2015
MI Lecture Note Vol.65	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2015 “The Role and Importance of Mathematics in Innovation” 74pages	October 23, 2015
MI Lecture Note Vol.66	岡田 勘三 藤澤 克己 白井 朋之 若山 正人 脇 隼人 Philip Broadbridge 山本 昌宏	Study Group Workshop 2015 Abstract, Lecture & Report 156pages	November 5, 2015
MI Lecture Note Vol.67	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	IMI-La Trobe Joint Conference “Mathematics for Materials Science and Processing” 66pages	February 5, 2016
MI Lecture Note Vol.68	古庄 英和 小谷 久寿 新甫 洋史	結び目と Grothendieck-Teichmüller 群 116pages	February 22, 2016
MI Lecture Note Vol.69	土橋 宜典 鍛冶 静雄	Symposium MEIS2016: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis 82pages	October 24, 2016
MI Lecture Note Vol.70	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2016 “Agriculture as a metaphor for creativity in all human endeavors” 98pages	November 2, 2016
MI Lecture Note Vol.71	小磯 深幸 二宮 嘉行 山本 昌宏	Study Group Workshop 2016 Abstract, Lecture & Report 143pages	November 21, 2016

シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
MI Lecture Note Vol.72	新井 朝雄 小嶋 泉 廣島 文生	Mathematical quantum field theory and related topics 133pages	January 27, 2017
MI Lecture Note Vol.73	穴田 啓晃 Kirill Morozov 須賀 祐治 奥村 伸也 櫻井 幸一	Secret Sharing for Dependability, Usability and Security of Network Storage and Its Mathematical Modeling 211pages	March 15, 2017
MI Lecture Note Vol.74	QUISPEL, G. Reinout W. BADER, Philipp MCLAREN, David I. TAGAMI, Daisuke	IMI-La Trobe Joint Conference Geometric Numerical Integration and its Applications 71pages	March 31, 2017
MI Lecture Note Vol.75	手塚 集 田上 大助 山本 昌宏	Study Group Workshop 2017 Abstract, Lecture & Report 118pages	October 20, 2017
MI Lecture Note Vol.76	宇田川誠一	Tzitzéica 方程式の有限間隙解に付随した極小曲面の構成理論 —Tzitzéica 方程式の楕円関数解を出発点として— 68pages	August 4, 2017
MI Lecture Note Vol.77	松谷 茂樹 佐伯 修 中川 淳一 田上 大助 上坂 正晃 Pierluigi Cesana 濱田 裕康	平成29年度 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究会 (I) 結晶の界面, 転位, 構造の数理 148pages	December 20, 2017
MI Lecture Note Vol.78	瀧澤 重志 小林 和博 佐藤憲一郎 斎藤 努 清水 正明 間瀬 正啓 藤澤 克樹 神山 直之	平成29年度 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 プロジェクト研究 研究会 (I) 防災・避難計画の数理モデルの高度化と社会実装へ向けて 136pages	February 26, 2018
MI Lecture Note Vol.79	神山 直之 畔上 秀幸	平成29年度 AIMaP チュートリアル 最適化理論の基礎と応用 96pages	February 28, 2018
MI Lecture Note Vol.80	Kirill Morozov Hiroaki Anada Yuji Suga	IMI Workshop of the Joint Research Projects Cryptographic Technologies for Securing Network Storage and Their Mathematical Modeling 116pages	March 30, 2018
MI Lecture Note Vol.81	Tsuyoshi Takagi Masato Wakayama Keisuke Tanaka Noboru Kunihiro Kazufumi Kimoto Yasuhiko Ikematsu	IMI Workshop of the Joint Research Projects International Symposium on Mathematics, Quantum Theory, and Cryptography 246pages	September 25, 2019
MI Lecture Note Vol.82	池森 俊文	令和2年度 AIMaP チュートリアル 新型コロナウイルス感染症にかかわる諸問題の数理 145pages	March 22, 2021



Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
九州大学大学院 数理学府

〒819-0395 福岡市西区元岡744 TEL 092-802-4402 FAX 092-802-4405
URL <https://www.imi.kyushu-u.ac.jp/>