Math-for-industry
Education & Research Hub

ISSN2188-1200

平成29年度　AIMaPチュートリアル

最適化理論の基礎と応用

著者：神山直之・畔上秀幸

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

MI Lecture Note Vol.79 : Kyushu University

平成 29 年度　AIMaP チュートリアル
最適化理論の基礎と応用

著者：神山直之, 畔上秀幸

About MI Lecture Note Series

The Math-for-Industry (MI) Lecture Note Series is the successor to the COE Lecture Notes, which were published for the 21st COE Program “Development of Dynamic Mathematics with High Functionality,” sponsored by Japan’s Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology (MEXT) from 2003 to 2007. The MI Lecture Note Series has published the notes of lectures organized under the following two programs: “Training Program for Ph.D. and New Master’s Degree in Mathematics as Required by Industry,” adopted as a Support Program for Improving Graduate School Education by MEXT from 2007 to 2009; and “Education-and-Research Hub for Mathematics-for-Industry,” adopted as a Global COE Program by MEXT from 2008 to 2012.

In accordance with the establishment of the Institute of Mathematics for Industry (IMI) in April 2011 and the authorization of IMI’s Joint Research Center for Advanced and Fundamental Mathematics-for-Industry as a MEXT Joint Usage / Research Center in April 2013, hereafter the MI Lecture Notes Series will publish lecture notes and proceedings by worldwide researchers of MI to contribute to the development of MI.

October 2014
Yasuhide Fukumoto
Director
Institute of Mathematics for Industry

はじめに

文部科学省委託事業「数学アドバンストイノベーションプラットフォーム」(AIMaP: Advanced Innovation powered by Mathematics Platform)は、「数学・数理科学と諸科学・産業との協働によるイノベーション創出のための研究促進プログラム（略称：数学協働プログラム)」(中核機関：統計数理研究所, H24〜28 年度）で構築されたネットワーク型研究基盤を引き継ぎ、平成 29 年度より 5 年間かけて数学・数理科学と諸科学分野・産業との協働を推進する組織的な取り組みです。九州大学マス・フォア・インダストリ研究所（IMI）が幹事拠点となり、全国 12 の数学・数理科学機関と協力体制を築き、諸科学・産業界に潜在する数学・数理科学へのニーズを積極的に発掘して、問題解決にふさわしい数学・数理科学研究者との協働による研究を促進する仕組みを構築することを目標としています。

当事業の一環として、2018 年 1 月 19 日に AIMaP チュートリアル「最適化理論の基礎と応用」を開催いたしました。これは AIMaP 事業と国立研究開発法人科学技術振興機構(JST)との連携企画「CREST・さきがけ・AIMaP 合同シンポジウム『数学パワーが世界を変える 2018』」(2018 年 1 月 19〜21 日)の初日に実施されたものです。近年とみに重要性を増している最適化理論とその産業への応用について、本チュートリアルでは第一線で活躍中の 2 名の研究者に非専門家向けの入門的講義を行っていただきました。このレクチャーノートは、参加者のみならず非参加者に対しても、当該分野の基礎事項の勉学に供し、また、先端的情報を提供するため、講義資料をとりまとめたものです。

チュートリアルの前半には、離散最適化理論の若手第一人者で、㈱富士通研究所と共同でその社会実装で大きな成果をあげている神山直之准教授（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）に「線形計画法入門」と題して線形計画法の理論的基礎および専用ソフトウェアを活用した現実的な問題の解法をご紹介いただきました。後半は、計算機を援用した形状最適化理論のパイオアニアで、製品設計への応用で大きな成果をあげてこられた畔上秀幸教授（名古屋大学情報学研究科）にご担当いただきました。「形状最適化理論と製品設計への応用」として、形状最適化の理論的側面と工業製品等の設計への実践的な応用についてご講義いただき、その後、参加者のパソコンを用いたソフトウェア活用の実習を行っていただきました。本研究会が今後の数学・応用数学研究および諸科学分野・産業への応用の一助となることを願っています。

本チュートリアルは、JST のご協力のもと、AIMaP 事業（文部科学省）が主催いたしました。開催に際しては、日本数学会、日本応用数理学会、統計関連学会連合にご後援いただきました。講師を務めてくださった両先生、開催にご協力いただいた皆様に、この場をお借りして深く御礼申し上げます。

AIMaP 事業 代表　福本　康秀
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所・所長

2018 年 2 月

AIMaPチュートリアル「最適化理論の基礎と応用」

■日時: 2018年1月19日(金) 9:00-17:00

■会場: 日本橋ライフサイエンスビルディング　2階大会議室

（東京メトロ銀座線半蔵門線「三越前」駅より徒歩3分）

■プログラム

8:30- 9:00　受付

9:00-12:00 「線形計画法入門」

講師：神山 直之（九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所）

概要：

・線形計画問題の定義および応用例（ネットワークフロー）

・線形計画問題の理論的基礎（基本定理，端点解とマッチングにおける応用，双対性）

・線形計画問題を解くための Python のライブラリ PuLP の紹介

12:00-14:00 休憩

14:00-17:00 「形状最適化理論と製品設計への応用」

講師：畔上 秀幸（名古屋大学 大学院情報学研究科）

概要：

・非線形計画問題としてみたときの最適設計問題の特徴と解法

・最適設計問題の連続体形状最適化問題への拡張

・製品設計への応用例の紹介

・FreeFEM++を用いた実習（実習に参加される方はパソコンをご用意ください。）

■ 午後セッションの実習資料

・必要ファイル

－ FreeFEM++： 下記URLよりダウンロードし、インストールしてください。

http://www.freefem.org/ff++/download.php

（FreeFEM++メインページ： http://www.freefem.org ）

－実習プログラム：下記の研究会ウェブページにあるリンクからダウンロードしてください。

https://aimap.imi.kyushu-u.ac.jp/wp/event/2017k002

（ファイルへの直接リンク：

https://aimap.imi.kyushu-u.ac.jp/wp/wp-content/uploads/2017/10/book_v1.zip ）

実習要領については、同梱の"README.txt"にある説明をご覧ください。

文部科学省　九州大学 KYUSHU UNIVERSITY　AIMaP Advanced Innovation　国立研究開発法人 科学技術振興機構 Japan Science and Technology Agency

CREST･さきがけ･AIMaP合同シンポジウム

数学パワーが世界を変える 2018

参加無料

EVENT① 1/19(金) 9:00-17:00

AIMaPチュートリアル「最適化理論の基礎と応用」

■会場／日本橋ライフサイエンスビルディング 2階大会議室

お問合せ先 aimap@imi.kyushu-u.ac.jp　参加申込み https://aimap.imi.kyushu-u.ac.jp/wp/event/2017k002

「線形計画法入門」 神山 直之 (九州大学 マス･フォア･インダストリ研究所)
「形状最適化理論と製品設計への応用」 畔上 秀幸 (名古屋大学 大学院情報学研究科)

EVENT② 1/20(土) 10:15-17:30

AIMaP公開シンポジウム「数学と産業の協働ケーススタディ」

■会場／日本橋ライフサイエンスビルディング 9階911会議室

お問合せ先 aimap@imi.kyushu-u.ac.jp　参加申込み https://aimap.imi.kyushu-u.ac.jp/wp/event/2017k003

「数学者から産業界へ」

鍛冶 静雄 (山口大学理学部, JSTさきがけ) 『柔らかい幾何の拡がり～トポロジーの応用』
早水 桃子 (情報･システム研究機構統計数理研究所, JSTさきがけ) 『離散数学と幹細胞生物学のコラボレーション』
中野 直人 (京都大学国際高等教育院, JSTさきがけ) 『数学とデータと気象学:MaeT数理=気象連携のあゆみ』
松江 要 (九州大学 マス･フォア･インダストリ研究所／カーボンニュートラル･エネルギー国際研究所) 『異分野･異業種放浪記』

「産業界から数学者へ」

下津 直武** (ダイキン工業株式会社) 『「人」と「空気」のデータに対する数学活用について』
池森 俊文* (一橋大学 大学院商学研究科) 『金融イノベーションと数理手法(学界と実務界)』
宮下 大** (住友重機械工業株式会社、東京大学大学院数理科学研究科) 『数学-産業協働のインターフェース問題～プラズマ数値シミュレーション技術開発を通して』
檜貝 信一* (株式会社村田製作所、ADMAT、CAMMフォーラム) 『電子セラミックス産業界からの数学者への大いなる期待』

*AIMaP運営委員　**2017年開催のスタディグループ課題提供者

EVENT③ 1/21(日) 10:00-18:00

CREST･さきがけ 数学関連領域合同シンポジウム

■会場／アキバホール(富士ソフト秋葉原ビル5階)

お問合せ先 mathsympo@math.jst. go.jp　参加申込み http://www.jst.go.jp/kisoken/crest/math-sympo/

招待講演「ブロックチェーン：公平なIT社会のための新しい技術基盤と今後の課題」
佐古 和恵 (NECセキュリティ研究所、日本応用数理学会会長)

「セキュリティと数学」

高木 剛 (東京大学大学院情報理工学系研究科、九州大学マス･フォア･インダストリ研究所、CREST) 『新たな数学問題を用いた次世代暗号の構成と安全性評価』
縫田 光司 (産業技術総合研究所情報技術研究部門、JSTさきがけ) 『プライバシー保護型情報解析技術とその数学的基盤』

「金融と数学」

吉田 朋広 (東京大学大学院数理科学研究科、CREST) 『先端的確率統計学が開く大規模従属性モデリング～金融ビッグデータ解析のための統計数理とその実装』
荻原 哲平 (情報･システム研究機構統計数理研究所、JSTさきがけ) 『株式市場の高頻度データに対する統計解析と機械学習』

「数値計算／制御と数学」

大石 進一 (早稲田大学理工学術院、CREST) 『精度保証付き数値計算の理論の進展と応用』
小林 亮 (広島大学大学院理学研究科、CREST) 『環境を友とする制御法の創成～未知なる環境を動き回るロボットの実現を目指して』

CREST研究統括
坪井 俊(東京大学)

さきがけ研究統括
國府 寛司(京都大学)

数学アドバンストイノベーションプラットフォーム(AIMaP)
福本 康秀(九州大学)

■会場アクセス

日本橋ライフサイエンスビルディング
東京都中央区日本橋本町2-3-11
アクセス／東京メトロ銀座線･半蔵門線「三越前」駅より徒歩3分

アキバホール
東京都千代田区神田練塀町3 富士ソフト秋葉原ビル5階
アクセス／JR秋葉原駅中央改札口より徒歩2分
つくばエクスプレス 秋葉原駅A3改札口より徒歩2分
東京メトロ日比谷線 秋葉原駅2番出口より徒歩4分

主催／文部科学省　九州大学 マス･フォア･インダストリ研究所(文部科学省委託事業「数学アドバンスト イノベーション プラットフォーム(AIMaP)」受託機関)　国立研究開発法人 科学技術振興機構(JST)　後援／日本数学会　日本応用数理学会　統計関連学会連合


Pythonパッケージ PuLP


12 FreeFEM++を用いた実習

目次

線形計画法入門

神山 直之 （九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所）

線形計画法入門

神山 直之

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所

九州大学
KYUSHU UNIVERSITY

概要

概要

最適化問題とは？

最適化問題とは？

最適化問題 $=$ 「**入力**」$+$「**目的**」

入力：解の候補集合 F と目的関数 $f\colon F \to \mathbb{R}$

目的：$f(x)$ を最小化する $x \in F$ を見つける

- **例 1 ：**

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1\}, \ \ f(x) = x^2 - x$$

- **例 2 ：**

$$F = \left\{X \subseteq N \mid \sum_{i \in X} c(i) \le B\right\}, \ f(X) = B - \sum_{i \in X} c(i)$$

ただし $N =$ 有限集合, $B \in \mathbb{Z}_+$, $c\colon N \to \mathbb{Z}_+$

最適化問題とは？

- 最適化問題を形式的には以下のように書く

$$\begin{array}{rl} \text{Minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \in F \end{array}$$

  - “Minimize” は最小化を表しその横に目的関数を書く
  - “subject to” のところに制約を書く
    集合ではなく幾つかの式でかかれることもある

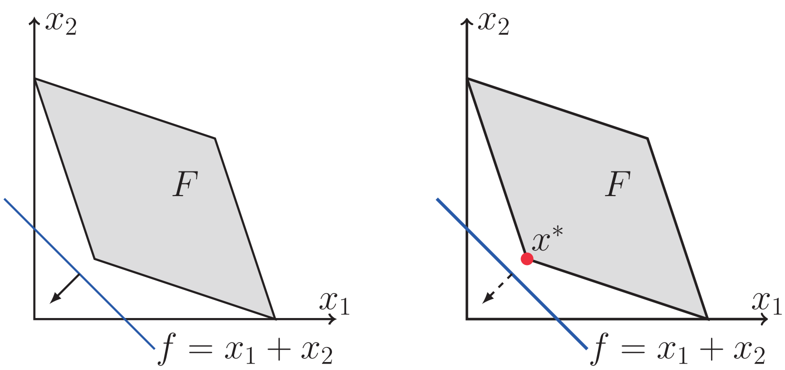
- $f(x)$ の最小値を達成する $x^* \in F$ を**最適解**とよぶ
  最適解 x^* に対して $f(x^*)$ を**最適値**とよぶ

  注意：実は色々細いことがあります
  最適解の存在性などなど

線形計画問題とは？

線形計画問題とは？

f や F が「線形」である最適化問題



- **本講義**：線形計画問題の基礎と理論的応用とソルバー

線形計画問題の例

必要な栄養をとれる食事を考える問題

食品 A：価格 $= 2$, 栄養 1 $= 3$, 栄養 2 $= 2$

食品 B：価格 $= 3$, 栄養 1 $= 2$, 栄養 2 $= 6$

必要な栄養量：栄養 1 $= 5$, 栄養 2 $= 8$

$\Longrightarrow$ 最小の価格で必要な栄養を確保するには？

- $x_1 =$ 食品 A の量を表す変数
- $x_2 =$ 食品 B の量を表す変数
- 最小化する価格 $= 2x_1 + 3x_2$
- 制約 $=$ 栄養 1：$3x_1 + 2x_2 \geq 5$,　栄養 2：$2x_1 + 6x_2 \geq 8$

7 / 52

線形計画問題の例

必要な栄養をとれる食事を考える問題

食品 A：価格 $= 2$, 栄養 1 $= 3$, 栄養 2 $= 2$

食品 B：価格 $= 3$, 栄養 1 $= 2$, 栄養 2 $= 6$

必要な栄養量：栄養 1 $= 5$, 栄養 2 $= 8$

$\Longrightarrow$ 最小の価格で必要な栄養を確保するには？

- 以下のような線形計画問題になる

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & 3x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ & 2x_1 + 6x_2 \geq 8 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

8 / 52

行列を用いた表現

- 以下の線形計画問題を

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & 3x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ & 2x_1 + 6x_2 \geq 8 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

行列を用いて表現すると以下のようになる

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{subject to} \quad & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

線形計画問題

線形計画問題

入力：
- $m \times n$ 行列 $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$
- n 次元ベクトル $c \in \mathbb{Q}^n$
- m 次元ベクトル $b \in \mathbb{Q}^m$

目的：
- 以下の最適化問題の最適解を求める

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \geq b \\ & x \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned}$$

線形計画問題の基本性質

- $x \in \mathbb{R}^n$ が線形計画問題の実行可能解

  $\overset{\text{def}}{\iff}$ $x \in \mathbb{R}^n_+$ かつ $Ax \geq b$ を満たす

定理

任意の線形計画問題に対して以下の一つが成り立つ

1. 実行可能解が存在しない
2. 実行可能解が存在し目的関数の値に下界がない
3. 実行可能解が存在し目的関数の値に下界がある
   さらにこの下界を達成する実行可能解が存在

- 証明は省略

11 / 52

線形計画問題に対するアルゴリズム

本講演の前提

線形計画法は理論・実用的に効率的に解ける

- 理論的なアルゴリズム
  - 単体法，楕円体法，内点法
- 本講演 $\neq$ これらのアルゴリズムの解説

  本講演 $=$ 問題自体の理論的基礎・理論的応用
- ソフトウェア
  - CPLEX，Gurobi，GLPK
  - **PuLP （Python）**

12 / 52

概要

Python パッケージ PuLP

- 線形計画問題を解くソフトウェア PuLP
  - 正確には Python のパッケージ
- インストールの仕方は例えば

```
sudo pip install pulp
```

- 以下では次の線形計画問題を PuLP で解いてみる

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & 8x + 19y \\
\text{subject to} \quad & 2x + 7y \geq 40 \\
& 6x + 3y \geq 50 \\
& x \geq 0 \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$

PuLP の使用方法

- PuLP をインポートする

```
import pulp
```

- 問題そのものを作る

```
problem = pulp.LpProblem("P",pulp.LpMinimize)
```

- 変数を定義

```
x = pulp.LpVariable("x")
y = pulp.LpVariable("y")
```

- 目的関数を定義

```
problem += 8*x + 19*y
```


PuLP の使用方法

- 制約を定義

```
problem += 2*x + 7*y >= 40
problem += 6*x + 3*y >= 50
problem += x >= 0
problem += y >= 0
```

- 問題を解いて状況を確認して解を出力

```
status = problem.solve()
print(pulp.LpStatus[status])
print(pulp.value(problem.objective))
print(x.value())
print(y.value())
```

全体のソースファイル

```
import pulp
problem = pulp.LpProblem("P", pulp.LpMinimize)
x = pulp.LpVariable("x")
y = pulp.LpVariable("y")
problem += 8*x + 19*y
problem += 2*x + 7*y >= 40
problem += 6*x + 3*y >= 50
problem += x >= 0
problem += y >= 0
status = problem.solve()
print(pulp.LpStatus[status])
print(pulp.value(problem.objective))
print(x.value())
print(y.value())
```


概要

有向グラフ

- 有向グラフ $D = (V, A)$

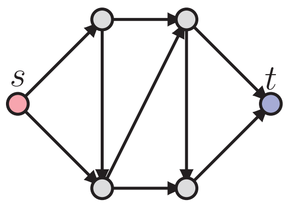
  $V :=$ 点集合と呼ばれる有限集合, $\quad A \subseteq V \times V$

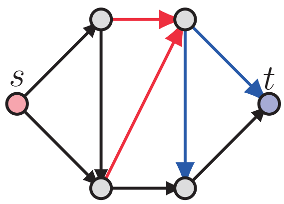
- 特別な点 $s, t \in V$ と関数 $c\colon A \to \mathbb{Q}_+$ に対して

  - 関数 $f\colon A \to \mathbb{R}_+$ が実行可能 s-t フロー $\overset{\text{def}}{\iff}$

    $\forall a \in A\colon f(a) \le c(a)$

    $\forall v \in V \setminus \{s,t\}\colon \sum_{a \in \varrho(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta(v)} f(a)$





19 / 52

最大流問題

最大流問題

$\sum_{a \in \delta(s)} f(a)$ を最大化する s-t 実行可能フローを求める

- 最大流問題は以下の線形計画問題に定式化できる

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & -\sum_{a \in \delta(s)} f(a) \\
\text{subject to} \quad & \sum_{a \in \delta(v)} f(a) = \sum_{a \in \varrho(v)} f(a) \quad (v \in V \setminus \{s,t\}) \\
& f(a) \le c(a) \quad (a \in A) \\
& f \in \mathbb{R}_+^A
\end{aligned}
$$

20 / 52

Python による実装例

```
import pulp

problem = pulp.LpProblem("P", pulp.LpMinimize)

x1 = pulp.LpVariable("x1")
x2 = pulp.LpVariable("x2")
x3 = pulp.LpVariable("x3")
x4 = pulp.LpVariable("x4")
x5 = pulp.LpVariable("x5")
x6 = pulp.LpVariable("x6")
x7 = pulp.LpVariable("x7")
x8 = pulp.LpVariable("x8")
x9 = pulp.LpVariable("x9")
```


Python による実装例

```
problem += - x1 - x2

problem += x1 - x3 - x4 == 0
problem += x2 + x3 - x5 - x6 == 0
problem += x4 + x5 - x7 - x8 == 0
problem += x6 + x7 - x9 == 0
problem += x1 <= 1
problem += x2 <= 1
problem += x3 <= 1
problem += x4 <= 1
problem += x5 <= 1
problem += x6 <= 1
problem += x7 <= 1
problem += x8 <= 1
problem += x9 <= 1
```

Python による実装例

```
status = problem.solve()
print(pulp.LpStatus[status])

print(pulp.value(problem.objective))
print(x1.value())
print(x2.value())
print(x3.value())
print(x4.value())
print(x5.value())
print(x6.value())
print(x7.value())
print(x8.value())
print(x9.value())
```

答えとして -2 が出れば正解

概要

NetworkX

- インストールの仕方は例えば

```
sudo pip install networkx
```

- Networkx をインポートする

```
import networkx as nx
```

- 空のグラフを用意する

```
G = nx.DiGraph()
```

- 点を加える

```
G.add_node('s')
G.add_node('1')
G.add_node('2')
G.add_node('3')
G.add_node('4')
G.add_node('t')
```


NetworkX

- 辺を加える

```
G.add_edge('s', '1', capacity=1)
G.add_edge('s', '2', capacity=1)
G.add_edge('1', '2', capacity=1)
G.add_edge('1', '3', capacity=1)
G.add_edge('2', '3', capacity=1)
G.add_edge('2', '4', capacity=1)
G.add_edge('3', '4', capacity=1)
G.add_edge('3', 't', capacity=1)
G.add_edge('4', 't', capacity=1)
```

- 最大流問題を解く

```
flow_value, flows = nx.maximum_flow(G, 's', 't')
```

- 結果を表示する

```
print(flow_value)
```

全体のソースファイル

```
import networkx as nx
G = nx.DiGraph()
G.add_node('s')
G.add_node('1')
G.add_node('2')
G.add_node('3')
G.add_node('4')
G.add_node('t')
G.add_edge('s', '1', capacity=1)
G.add_edge('s', '2', capacity=1)
G.add_edge('1', '2', capacity=1)
G.add_edge('1', '3', capacity=1)
G.add_edge('2', '3', capacity=1)
G.add_edge('2', '4', capacity=1)
G.add_edge('3', '4', capacity=1)
G.add_edge('3', 't', capacity=1)
G.add_edge('4', 't', capacity=1)
flow_value, flows = nx.maximum_flow(G, 's', 't')
print(flow_value)
```

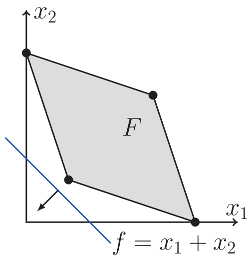

概要

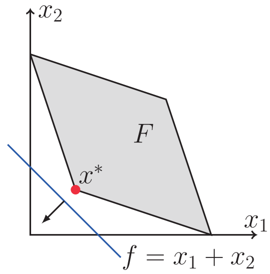
端点解

- 線形計画問題の実行可能解 x が端点解 $\overset{\text{def}}{\iff}$
  以下を満たす x と異なる実行可能解 y, z が存在しない
  $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}$ s.t $0 < \varepsilon < 1$: $(1-\varepsilon)y + \varepsilon z = x$

定理（証明略）

最適解が存在すれば端点最適解が常に存在する





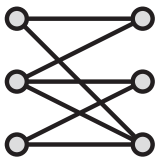
概要

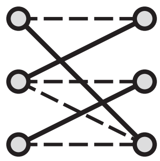
最大マッチング問題への応用

- 二部グラフ $G = (A, B; E)$
  - $A \cap B = \emptyset$ を満たす有限な点集合 A, B
  - 以下を満たす有限な辺集合 E

$$\forall e \in E\colon e \subseteq V,\ |e \cap A| = |e \cap B| = 1$$

- $M \subseteq E$ がマッチング $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $v \in A \cup B$ に対して $|\{e \in M \mid v \in e\}| \leq 1$





最大マッチング問題への応用

二部グラフ上の最大マッチング問題

入力：二部グラフ $G = (A, B; E)$

目的：要素数が最大のマッチング

- 線形計画問題っぽく定式化してみる　(整数計画問題)

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & -\sum_{e \in E} x(e) \\ \text{subject to} \quad & \sum_{e \in E\colon v \in e} x(e) \leq 1 \quad (v \in A \cup B) \\ & x \in \{0, 1\}^E \end{aligned}$$

- 注意：$x \in \{0, 1\}$ の制約のある問題は一般には難しい

最大マッチング問題への応用

- $x(e) \in \{0,1\}$ を $0 \leq x(e) \leq 1$ に緩和

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & -\sum_{e\in E} x(e) \\ \text{subject to} \quad & \sum_{e\in E:\ v\in e} x(e) \leq 1 \quad (v \in A \cup B) \\ & x(e) \leq 1 \quad (e \in E) \\ & x \in \mathbb{R}_+^E \end{aligned}$$

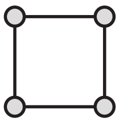
$\Longrightarrow$ 問題は変わるが線形計画問題になる

定理

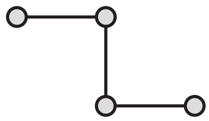
緩和しても最適解の目的関数値は変わらない

証明

- 任意の端点解の任意の要素が整数であることを示す
- 整数ではない要素を含む端点解 x が存在すると仮定
- $F \overset{\text{def}}{=} \{e \in E \mid 0 < x(e) < 1\}$
- 以下の場合に分けて証明
  - F の中に "サイクル" C がある場合
    $\Longrightarrow$ 2 部グラフなので C の長さは偶数
  - F の中に "サイクル" がない場合



サイクル



パス

証明：F の中に閉路 C がある場合

- $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \min\{x(e) \mid e \in C\}$
- $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \min\{1 - x(e) \mid e \in C\}$
- $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\alpha, \beta\}$
- $x^+, x^- \stackrel{\text{def}}{=} x$ に交互に M を足す・引くしたもの

  $\Longrightarrow$ x^+, x^- は実行可能解かつ $x = \frac{1}{2}(x^+ + x^-)$

  $\Longrightarrow$ x が端点解であることに矛盾

証明：F の中に閉路がない場合

- F の中の任意の極大な “パス” P （u から w へと仮定）
- $v \in \{u, w\}$ にはそれぞれ 1 つの F の辺が入る

  $\Longrightarrow$ この辺を $\delta_F(v)$ と書くと $1 - x(\delta_F(v)) < 1$
- $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \min\{x(e) \mid e \in P\}, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \min\{1 - x(e) \mid e \in P\}$
- $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\alpha, \beta\}$
- $x^+, x^- \stackrel{\text{def}}{=} x$ に交互に M を足す・引くしたもの

  $\Longrightarrow$ x^+, x^- は実行可能解かつ $x = \frac{1}{2}(x^+ + x^-)$

  $\Longrightarrow$ x が端点解であることに矛盾

概要

線形計画問題の書き換え

- 行列 A の i 行 j 列を a_{ij} とかく
- ベクトル b を $b \stackrel{\text{def}}{=} (b_1, b_2, \dots, b_m)^\top$ と定義
- ベクトル c を $c \stackrel{\text{def}}{=} (c_1, c_2, \dots, c_n)^\top$ と定義
- この記法を使うと線形計画問題は以下のようになる

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{subject to} & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \geq b_1 \\
& a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \geq b_2 \\
& \qquad\vdots \\
& a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \geq b_m \\
& x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

ラグランジュ緩和

- 先ほどの線形計画問題を緩和してみる
- 制約式 $a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \geq b_1$ を取り除く
- $b_1 - a_{1,1}x_1 - \cdots - a_{1,n}x_n \leq 0$ なので

  $\Longrightarrow$ $y_1 \geq 0$ を掛けて目的関数に足す

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
 & \quad + y_1(b_1 - a_{1,1}x_1 - \cdots - a_{1,n}x_n) \\
\text{subject to} & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \geq b_2 \\
 & \qquad \vdots \\
 & a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \geq b_m \\
 & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

39 / 52

ラグランジュ緩和

- 他の制約も緩和してみる (ただし $y_j \geq 0$)

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
 & \quad + \sum_{j=1}^{m} y_j(b_j - a_{j,1}x_1 - \cdots - a_{j,n}x_n) \\
\text{subject to} & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

- 項を並べ替えると

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & b_1y_1 + \cdots + b_my_m \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{n} x_i(c_i - a_{1,i}y_1 - \cdots - a_{m,i}y_m) \\
\text{subject to} & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

40 / 52

双対問題

- この問題は元の問題の「緩和」
- 最適解の目的関数の値は下がっている

  $\Longrightarrow$ 元の問題の最適解の目的関数の値の下界
- 良い下界が欲しいので

  $$b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m$$

  を最大化にする $y_1, y_2, \ldots, y_m$
- しかし $x_i \geq 0$ なので

  $$c_i - a_{1,i} y_1 - \cdots - a_{m,i} y_m \geq 0$$

  じゃないと意味がない

  $\Longleftarrow$ いくらでも目的関数の値を小さくできる

双対問題

- 以下の問題を元の問題の「双対問題」とよぶ

$$\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad & b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m \\
\text{subject to} \quad & a_{1,1} y_1 + a_{2,1} y_2 + \cdots + a_{m,1} y_m \leq c_1 \\
& a_{1,2} y_1 + a_{2,2} y_2 + \cdots + a_{m,2} y_m \leq c_2 \\
& \qquad \vdots \\
& a_{1,n} y_1 + a_{2,n} y_2 + \cdots + a_{m,n} y_m \leq c_n \\
& y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0
\end{aligned}$$

- 行列を使った表現は以下のようになる

$$\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad & b^\top y \\
\text{subject to} \quad & A^\top y \leq c \\
& y \in \mathbb{R}_+^m
\end{aligned}$$

双対定理

- $x \in \mathbb{R}^n_+ \overset{\text{def}}{=}$ 元の問題の実行可能解 ($x^* \overset{\text{def}}{=}$ 最適解)
- $y \in \mathbb{R}^m_+ \overset{\text{def}}{=}$ 双対問題の実行可能解 ($y^* \overset{\text{def}}{=}$ 最適解)

定理：弱双対定理

$c^\top x \geq b^\top y$

証明

- $c^\top x \geq (y^\top A)x = y^\top (Ax) \geq y^\top b = b^\top y$ $\square$

定理：強双対定理（証明は省略）

$c^\top x^* = b^\top y^*$

概要

ゼロ和ゲーム

- 入力：
  - 行列 $A = (a_{i,j})_{i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,n}$
  - 行プレイヤー R と列プレイヤー C
  - $a_{i,j}$ = C が R に払う金額
- 考えるゲーム：
  - R の戦略
    $\Longrightarrow$ 行集合 $\{1,2,\ldots,m\}$ 上の確率分布
  - C の戦略
    $\Longrightarrow$ 列集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上の確率分布

45 / 52

ゼロ和ゲーム

- 利得の定義：(R の戦略 $\{x_i\}$, C の戦略 $\{y_i\}$)
  - R の利得 $:= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_iy_j$
  - C の損害 $:= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_iy_j$
- 目的：
  - R の目的 $:= \max_{\{x_i\}}\min_{\{y_j\}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_iy_j$
  - C の目的 $:= \min_{\{y_j\}}\max_{\{x_i\}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_iy_j$

46 / 52

von Neumann の最大最小定理

定理

$$\max_{\{x_i\}} \min_{\{y_j\}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j = \min_{\{y_j\}} \max_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j$$

- 左辺の問題は以下のように書ける

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & z \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq z \quad (j \in \{1, 2, \ldots, n\}) \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad (i \in \{1, 2, \ldots, m\}) \end{aligned}$$

von Neumann の最大最小定理

- 先ほどの線形計画問題の双対問題は以下のようになる

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \alpha \\ \text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq \alpha \quad (i \in \{1, 2, \ldots, m\}) \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & y_j \geq 0 \quad (j \in \{1, 2, \ldots, n\}) \end{aligned}$$

- これは定理の右辺を求める問題
- 強双対定理より右辺と左辺が一致

□

概要

課題

課題 1

講演で紹介した線形計画問題の例をソルバーで解く

課題 2

以下の問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & z \\
\text{subject to} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq z \quad (j \in \{1, 2, \ldots, n\}) \\
& \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\
& x_i \geq 0 \quad (i \in \{1, 2, \ldots, m\})
\end{array}
$$

の双対問題を導く

課題 2 の解答

- 各 $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して変数 $y_j \geq 0$ を用意する
- 変数 β を用意する
- 問題を緩和すると

$$\max \quad z + \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i - z\right) + \beta\left(1 - \sum_{i=1}^{m} x_i\right)$$

- 整理すると

$$\max \quad \beta + z\left(1 - \sum_{j=1}^{m} y_j\right) + \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - \beta\right)$$

課題 2 の解答

- よい上界を求めたいので　$\min \ \beta$
- z は自由なので　$\sum_{j=1}^{n} y_j - 1 = 0$
- $x_i \geq 0$ なので意味があるためには　$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - \beta \leq 0$
- 以上より

$$\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \beta \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq \beta \quad (i \in \{1, 2, \ldots, m\}) \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\
& y_j \geq 0 \quad (j \in \{1, 2, \ldots, n\})
\end{aligned}$$

形状最適化理論と製品設計への応用

畔上 秀幸 （名古屋大学 大学院情報学研究科）

形状最適化理論と製品設計への応用

畔上 秀幸

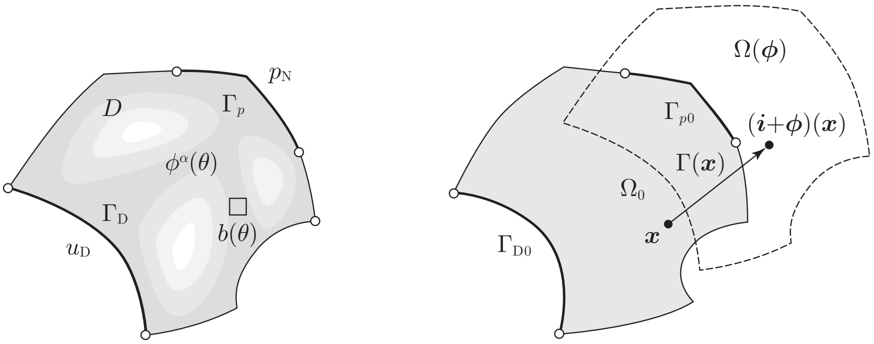
名古屋大学 情報学研究科 複雑系科学専攻

AIMaP[1] チュートリアル「最適化理論の基礎と応用」
日本橋ライフサイエンスビルディング, 2018 年 1 月 19 日

[1]数学アドバンストイノベーションプラットフォーム, Advanced Innovation powered by Mathematics Platform

はじめに

■ 形状最適化問題



(a) 密度変動 $\phi(\theta)$, 設計変数 $\theta : D \to \mathbb{R}$ (b) 領域変動 (設計変数) $\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

図 1.1: $d \in \{2, 3\}$ 次元の領域 $D, \Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ と設計変数

■ 概要

- 非線形計画問題としてみたときの最適設計問題の特徴 (§1) と解法 (§2)
- 最適設計問題の連続体形状最適化問題への拡張 (§3, §4, §5, §6)
- 製品設計への応用例の紹介 (§7 ∼ §11)
- FreeFEM++を用いた実習 (§12)

§1　最適設計問題の特徴

■ 段つき 1 次元線形弾性体の断面積最適化問題 [1, 1.1 節]

断面積 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)^{\mathrm{T}}$ が与えられたとき，外力 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)^{\mathrm{T}}$ を既知として，変位 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$ は

$$\frac{e_{\mathrm{Y}}}{l}\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 \\ -a_2 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

より求められる．ここで，$\boldsymbol{a}$ を設計変数，$\boldsymbol{u}$ を状態変数とみなす．

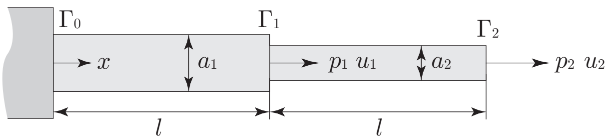


図 1.1: 2 つの断面積をもつ 1 次元線形弾性体

問題 1.1 (状態決定問題)

図 2.4 の 1 次元線形弾性体に対して，長さ l, Young 率 e_{Y}, $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ および $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ が与えられたとき，

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} \tag{1.2}$$

を満たす $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ を求めよ．ただし，式 (1.2) は式 (1.1) を表すことにする．

問題 1.1 の解 $\boldsymbol{u}$ に対して，目的関数と制約関数 (あわせて評価関数とよぶ) を

$$f_0(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{u},$$

$$f_1(\boldsymbol{a}) = l(a_1 + a_2) - c_1 = \begin{pmatrix} l & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - c_1$$

とおく．f_0 は平均コンプライアンス，f_1 は体積制約関数とよばれる．

設計変数の入る線形空間を $X = \mathbb{R}^2$ とおき，さらに，設計集合を

$$\mathcal{D} = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{a}_0\}$$

とおく．ただし，$\boldsymbol{a}_0 = (a_{01}, a_{02})^{\mathrm{T}} > \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^2}$ を定数ベクトルとする．また，状態変数の入る線形空間を $U = \mathbb{R}^2$ とおく．

問題 1.2 (平均コンプライアンス最小化問題)

$X = \mathbb{R}^2$ および $U = \mathbb{R}^2$ とおく．このとき，

$$\min_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}) \in \mathcal{D} \times U} \{ f_0(\boldsymbol{u}) \mid f_1(\boldsymbol{a}) \leq 0,\ \text{問題 1.1}\}$$

を満たす $\boldsymbol{a}$ を求めよ．

最適設計問題の特徴

最適設計問題は，状態決定問題が等式制約として加わった不等式つき非線形最適化問題のクラスとみなすことができる．

例題 1.3 (平均コンプライアンス最小化問題の数値例)

問題 1.2 において $l=1$, $e_{\mathrm{Y}}=1$, $c_1=1$, $\boldsymbol{p}=(1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_0=(0.1,0.1)^{\mathrm{T}}$ とおいて，$\boldsymbol{a}$ の最小点を求めよ．

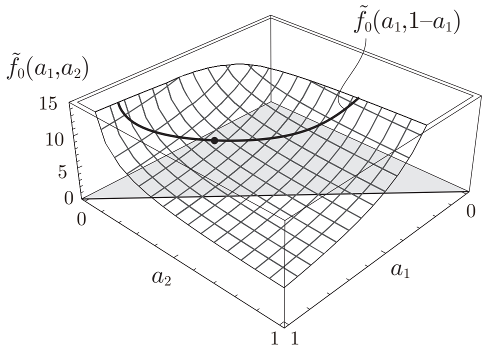


図 1.2: 設計変数の集合における平均コンプライアンス ($f_0(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a}))$ を $\tilde{f}_0(\boldsymbol{a})$ とかく)

§2　最適設計問題の解法

■ 勾配法と Newton 法 [1, 3.3 節, 3.5 節]

最初に制約なしの問題を考える．

問題 2.1 (制約なし最適化問題)

$X=\mathbb{R}^d$，$f:X\to\mathbb{R}$ に対して，

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

評価関数 f の試行点 $\boldsymbol{x}_k$ 周りの Taylor 展開

$$f(\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{y} + o(\|\boldsymbol{y}\|_X)$$

において，勾配 $\boldsymbol{g}$ が計算されたとき，勾配法は，

$$\boxed{\boldsymbol{y}_g\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{y} \quad \forall\boldsymbol{y}\in X} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y}_g = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{g} \tag{2.1}$$

を満たすように探索ベクトル $\boldsymbol{y}_g\in X$ を求める方法である．ただし，$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{d\times d}$ は正定値対称行列とする．すなわち，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \quad \exists\alpha>0:\ \boldsymbol{y}\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) \geq \alpha\|\boldsymbol{y}\|_{\mathbb{R}^d}^2 \ \ \forall\boldsymbol{y}\in X.$$

実際，

$$f(\boldsymbol{x}_k+\epsilon\boldsymbol{y}_g) - f(\boldsymbol{x}_k) = -\epsilon\boldsymbol{y}_g\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_g) + o(\epsilon) \leq -\epsilon\alpha\|\boldsymbol{y}_g\|_X^2 + o(\epsilon).$$

式 (2.1) は，

$$q(\boldsymbol{y}_g) = \min_{\boldsymbol{y}\in X}\left\{q(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{y}\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{y} + f(\boldsymbol{x}_k)\right\}$$

を満たす $\boldsymbol{y}_g\in X$ を求めることと同値である．

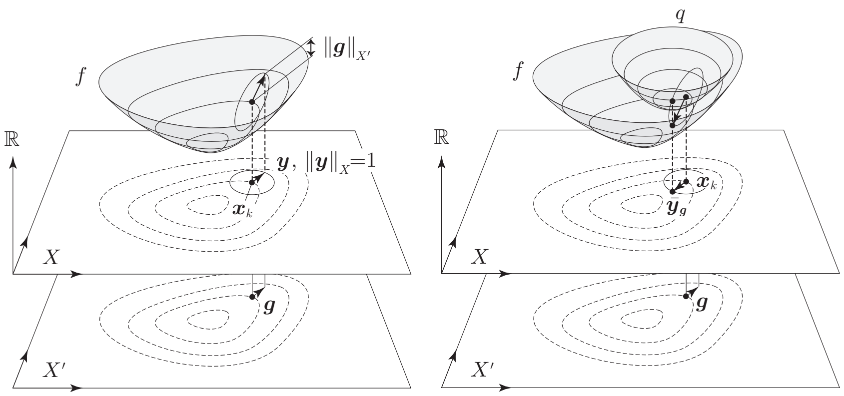


図 2.1: 勾配 $\boldsymbol{g}$ の定義　　図 2.2: 勾配法

勾配 $\boldsymbol{g}$ の試行点 $\boldsymbol{x}_k$ 周りの Taylor 展開

$$\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_g\right) = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}_g + \boldsymbol{o}\left(\|\boldsymbol{y}_g\|_X\right)$$

を満たす勾配 $\boldsymbol{g}$ と Hesse 行列 $\boldsymbol{H}$ が計算されたとき，Newton 法は，

$$\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_g\right) = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}_g = \boldsymbol{0}_{X'}$$

とおくことにより探索ベクトル $\boldsymbol{y}_g \in X$ を求める方法である．すなわち，

$$\boxed{\boldsymbol{y}_g \cdot (\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{y} \quad \forall \boldsymbol{y} \in X}.$$

■ 等式制約つき問題における f の勾配と Hesse 行列 [1, 2.6 節]

最適化理論

- 設計変数を $\boldsymbol{x} \in X = \mathbb{R}^d$ とする．
- 等式制約を $\boldsymbol{h} = (h_1, \cdots, h_n)^{\mathrm{T}} : X \to \mathbb{R}^n$ $(n < d)$ とかく．

最適設計理論

- 設計変数を $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}) \in X = \mathbb{R}^d = \Xi \times U = \mathbb{R}^{d-n} \times \mathbb{R}^n$ $(n < d)$ とする．$\boldsymbol{\phi} \in \Xi$ を設計変数，$\boldsymbol{u} \in U$ を状態変数とよぶ．
- 等式制約を $\boldsymbol{h} = (h_1, \cdots, h_n)^{\mathrm{T}} : X \to \mathbb{R}^n = U'$ とおく．

問題 2.2 (等式制約つき最適化問題)

$X = \mathbb{R}^d$，$f : X \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{h} = (h_1, \cdots, h_n)^{\mathrm{T}} : X \to \mathbb{R}^n$ $(n < d)$ に対して，次を満たす $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u})$ を求めよ．

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} \left\{ f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_{U'} \right\}$$

問題 2.2 に対する Lagrange 関数を

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$$

と定義する．$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ は Lagrange 乗数とよばれる．

定理 2.3 (極小点 1 次の必要条件 [1，定理 2.6.4])

$f \in C^1(X;\mathbb{R})$，$\boldsymbol{h} \in C^1(X;\mathbb{R}^n)$ および $\boldsymbol{x} = (\phi,\boldsymbol{u}) \in X$ において $\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が正則行列とする．このとき，$\boldsymbol{x}$ が問題 2.2 の極小点ならば，

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{0}_X,$$
$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_{U'}$$

を満たす $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ が存在する．

定理 2.3 の条件は，次のようにかける．

$$\mathscr{L}'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})\left[\boldsymbol{y},\hat{\boldsymbol{\lambda}}\right] = \mathscr{L}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})[\boldsymbol{y}] + \mathscr{L}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})\left[\hat{\boldsymbol{\lambda}}\right] = 0 \quad \forall\left(\boldsymbol{y},\hat{\boldsymbol{\lambda}}\right) \in X\times U.$$

■ Lagrange 乗数法 (随伴変数法) による勾配の求め方

$\boldsymbol{x} = (\phi,\boldsymbol{u}) \in X = \Xi\times U$ に注意して，問題 2.2 に対する Lagrange 関数を

$$\mathscr{L}(\phi,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = f(\phi,\boldsymbol{u}) + \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\phi,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = f(\phi,\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{h}(\phi,\boldsymbol{u})$$

とおく．$\boldsymbol{v} \in U$ は Lagrange 乗数である．$\mathscr{L}$ の全微分に対して，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}'(\phi,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})[\varphi,\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{v}}] \\
&\quad= \boxed{f_{\phi}(\phi,\boldsymbol{u})[\varphi] + \mathscr{L}_{\mathrm{S}\phi}(\phi,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})[\varphi]} \\
&\qquad + f_{\boldsymbol{u}}(\phi,\boldsymbol{u})[\hat{\boldsymbol{u}}] + \mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{u}}(\phi,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})[\hat{\boldsymbol{u}}] \quad \left(=0 \Leftarrow \boxed{f_{\boldsymbol{u}} + \mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{u}}(\phi,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_{U'}}\right) \\
&\qquad + \mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{v}}(\phi,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})[\hat{\boldsymbol{v}}] \quad \left(=0 \Leftarrow \boxed{\boldsymbol{h}(\phi,\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_{U'}}\right) \\
&\quad= \boldsymbol{g}\cdot\varphi = \tilde{f}'(\phi)[\varphi] \quad \forall(\varphi,\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{v}}) \in \Xi\times U\times U
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，$f(\phi,\boldsymbol{u}(\phi))$ を $\tilde{f}(\phi)$ とかいた．

■ Lagrange 乗数法 (随伴変数法) による Hesse 行列の求め方

許容集合と許容方向集合あるいは接面を次のように定義する．

$$S = \{ \boldsymbol{x} \in X \mid \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_{U'} \},$$
$$T_S(\boldsymbol{x}) = \{ \boldsymbol{y} \in X \mid \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^n} \}.$$

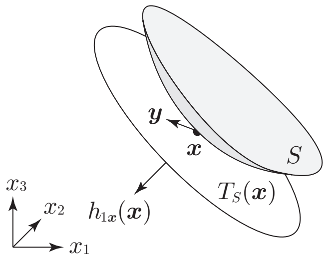


図 2.3: 許容集合 S と許容方向集合 $T_S(\boldsymbol{x})$ ($X = \mathbb{R}^3$, $n = 1$)

定理 2.4 (極小点 2 次の必要条件 [1, 定理 2.6.6])

問題 2.2 において，$f \in C^2(X;\mathbb{R})$ および $\boldsymbol{h} \in C^2(X;U)$ とする．
$\boldsymbol{x} = (\phi, \boldsymbol{u}) \in S$ において $\partial_X h_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \partial_X h_n(\boldsymbol{x})$ が 1 次独立とする．このとき，$\boldsymbol{x}$ が極小点ならば，次が成り立つ．

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}] \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{y} \in T_S(\boldsymbol{x})$$

定理 2.5 (極小点 2 次の十分条件 [2, Theorem 2.3])

問題 2.2 において，$f \in C^2(X;\mathbb{R})$ および $\boldsymbol{h} \in C^2(X;U)$ とする．$\boldsymbol{x} \in X$ において $\partial_X h_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \partial_X h_n(\boldsymbol{x})$ が 1 次独立とする．このとき，$\boldsymbol{x}$ が定理 2.3 の条件を満たし，

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}] > 0 \quad \forall \boldsymbol{y} \in T_S(\boldsymbol{x})$$

を満たす $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ が存在するならば，$\boldsymbol{x}$ は問題 2.2 の極小点である．

Hesse 行列は次のように得られる．$\mathscr{L}$ の $(\phi, \boldsymbol{u})$ に対する 2 階偏微分は，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{(\phi,\boldsymbol{u})(\phi,\boldsymbol{u})}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[(\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_1), (\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{v}}_2)] \\
&\quad = (\mathscr{L}_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\boldsymbol{\varphi}_1] + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\hat{\boldsymbol{v}}_1])_{\boldsymbol{\phi}}[\boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\qquad + (\mathscr{L}_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\boldsymbol{\varphi}_1] + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\hat{\boldsymbol{v}}_1])_{\boldsymbol{u}}[\hat{\boldsymbol{v}}_2] \\
&\quad = \mathscr{L}_{\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\hat{\boldsymbol{v}}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\qquad + \mathscr{L}_{\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2] + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\hat{\boldsymbol{v}}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2] \\
&\qquad\qquad\qquad \forall (\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_1), (\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{v}}_2) \in T_S(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u})
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

となる．

一方，$j \in \{1, 2\}$ として，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{S}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u})}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\boldsymbol{\varphi}_j, \hat{\boldsymbol{v}}_j] \\
&\quad = \mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\boldsymbol{\varphi}_j] + \mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\hat{\boldsymbol{v}}_j] \\
&\quad = \boxed{\mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\boldsymbol{\varphi}_j] + \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, \hat{\boldsymbol{v}}_j, \boldsymbol{v}) = 0} \quad \forall (\boldsymbol{\varphi}_j, \hat{\boldsymbol{v}}_j) \in T_S(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u})
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これより，

$$
\hat{\boldsymbol{v}}_j = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\boldsymbol{\varphi}_j] \tag{2.3}
$$

が得られると仮定する．

式 (2.3) を式 (2.2) に代入して，次が得られるとき，$\boldsymbol{H}$ は Hesse 行列となる．

$$
\begin{aligned}
&h(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] = \boldsymbol{\varphi}_1 \cdot (\boldsymbol{H}\boldsymbol{\varphi}_2) \\
&\quad = \mathscr{L}_{(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u})}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\boldsymbol{\varphi}_1]), (\boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\boldsymbol{\varphi}_2])] \\
&\quad = \boldsymbol{\varphi}_1 \cdot (\boldsymbol{H}\boldsymbol{\varphi}_2) = \tilde{f}''(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] \quad (\tilde{f}(\boldsymbol{\phi}) = f(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\phi})))
\end{aligned}
$$

■ 簡単な問題を用いた検証 [1, 1.1 節]

問題 2.6 (平均コンプライアンス)

$\Xi = \mathbb{R}^2$ および $U = \mathbb{R}^2$ とおく．このとき，

$$\min_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})\in \Xi\times U} \left\{ f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u} \;\middle|\; \boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} \right\}$$

を満たす $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})$ を求めよ．

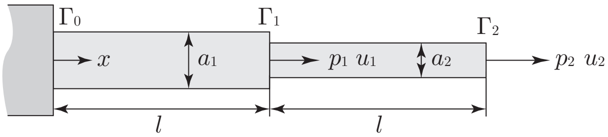


図 2.4: 2 つの断面積をもつ 1 次元線形弾性体

■ 代入法

状態方程式の解 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{p}$ を $f(\boldsymbol{u})$ に代入すれば，

$$\tilde{f}(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a})) = \boldsymbol{p}\cdot\left(\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{p}\right) = \frac{l}{e_{\mathrm{Y}}}\left(\frac{(p_1+p_2)^2}{a_1} + \frac{p_2^2}{a_2}\right)$$

を得る．これを $\boldsymbol{a}$ で偏微分して，次を得る．

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial a_1} \\ \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial a_2} \end{pmatrix} = \frac{l}{e_{\mathrm{Y}}}\begin{pmatrix} -\dfrac{(p_1+p_2)^2}{a_1^2} \\ -\dfrac{p_2^2}{a_2^2} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

さらに，それをもう一度 $\boldsymbol{a}$ で偏微分すれば，

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial a_1 \partial a_1} & \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial a_1 \partial a_2} \\ \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial a_2 \partial a_1} & \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial a_2 \partial a_2} \end{pmatrix} = \frac{l}{e_{\mathrm{Y}}} \begin{pmatrix} \dfrac{2\left(p_1 + p_2\right)^2}{a_1^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{2 p_2^2}{a_2^3} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

となる．$a_1, a_2 > 0$ のとき，$\boldsymbol{H}$ は正定値となる．

Lagrange 乗数法

問題 2.6 に対する Lagrange 関数を

$$\mathscr{L}\left(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) = f\left(\boldsymbol{u}\right) + \mathscr{L}_{\mathrm{S}}\left(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \cdot \left(-\boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{a}\right)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}\right)$$

とおく．$\boldsymbol{v} \in U$ は Lagrange 乗数である．$\mathscr{L}$ の全微分に対して，

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}'\left(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)\left[\boldsymbol{b}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}\right] \\ &= \boxed{-\left\{\boldsymbol{v} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{a}\right)}{\partial a_1}\boldsymbol{u} \quad \frac{\partial \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{a}\right)}{\partial a_2}\boldsymbol{u}\right)\right\}\boldsymbol{b}} \\ &\quad + \boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{a}\right)\hat{\boldsymbol{u}} \quad \left(= 0 \ \Leftarrow \ \boxed{\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{a}\right)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}}\right) \\ &\quad + \hat{\boldsymbol{v}} \cdot \left(-\boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{a}\right)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}\right) \quad \left(= 0 \ \Leftarrow \ \boxed{\boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{a}\right)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}}\right) \\ &= \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{b} \quad \forall \left(\boldsymbol{b}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}\right) \in \Xi \times U \times U \end{aligned} \tag{2.6}$$

が成り立つ．ここで，$\boldsymbol{g}$ は代入法による式 (2.4) と一致する．

Hesse 行列は次のように得られる．許容集合と許容方向集合あるいは接面を

$$S = \{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}) \in \Xi \times U \mid \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_{U'}\},$$
$$T_S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}) = \{(\boldsymbol{b},\hat{\boldsymbol{v}}) \in \Xi \times U \mid \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})[\boldsymbol{b},\hat{\boldsymbol{v}}] = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^n}\}.$$

とおく．$\mathscr{L}$ の設計変数 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})$ に対する 2 階偏微分は，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})[(\boldsymbol{b}_1,\hat{\boldsymbol{v}}_1),(\boldsymbol{b}_2,\hat{\boldsymbol{v}}_2)] \\
&\quad = (\mathscr{L}_{0\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})[\boldsymbol{b}_1] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})[\hat{\boldsymbol{v}}_1])_{\boldsymbol{a}}[\boldsymbol{b}_2] \\
&\qquad + (\mathscr{L}_{0\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})[\boldsymbol{b}_1] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})[\hat{\boldsymbol{v}}_1])_{\boldsymbol{u}}[\hat{\boldsymbol{v}}_2] \\
&\quad = \begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_2\\ \hat{\boldsymbol{v}}_2\end{pmatrix} \cdot \left(\boldsymbol{H}_{\mathscr{L}_{\mathrm{S}}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \hat{\boldsymbol{v}}_1\end{pmatrix}\right) \quad \forall (\boldsymbol{b}_1,\hat{\boldsymbol{v}}_1),(\boldsymbol{b}_2,\hat{\boldsymbol{v}}_2) \in T_S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})
\end{aligned} \tag{2.7}$$

となる．ここで，次のようである．

$$\boldsymbol{H}_{\mathscr{L}_{\mathrm{S}}} = \begin{pmatrix}\mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}} & \mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}}\\ \mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{u}\boldsymbol{a}} & \mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^{2\times 2}} & \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{a_1}\\ \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{a_2}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{K}_{a_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{K}_{a_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\end{pmatrix} & \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\end{pmatrix}$$

一方，$j \in \{1,2\}$ に対して

$$\mathscr{L}_{\mathrm{S}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})[\boldsymbol{b}_i,\hat{\boldsymbol{v}}_j] = \boldsymbol{v}\cdot\{-(\boldsymbol{K}'(\boldsymbol{a})[\boldsymbol{b}_i])\boldsymbol{u} - \boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})(\hat{\boldsymbol{v}}_j)\} = 0$$
$$\forall (\boldsymbol{b}_i,\hat{\boldsymbol{v}}_j) \in T_S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})$$

より，次を得る．

$$\hat{\boldsymbol{v}}_j = -\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{K}'(\boldsymbol{a})[\boldsymbol{b}_i]) = \begin{pmatrix}-\dfrac{u_1}{a_1} & 0\\ -\dfrac{u_1}{a_1} & -\dfrac{u_2-u_1}{a_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{i1}\\ b_{i2}\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

式 (2.8) を式 (2.7) に代入し，自己随伴関係を用いれば，

$$\begin{aligned}
&h(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2] \\
&\quad = \mathscr{L}_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})[(\boldsymbol{b}_1,\hat{\boldsymbol{v}}_1),(\boldsymbol{b}_2,\hat{\boldsymbol{v}}_2)] \\
&\quad = \boldsymbol{b}_1\cdot(\boldsymbol{H}\boldsymbol{b}_2)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{H}$ は代入法で得られた式 (2.5) と一致する．

■ 制約つき問題における勾配法と Newton 法 [1, 3.7 節, 3.8 節]

これ以降，最適設計問題における設計変数 ϕ を $\boldsymbol{x}$ とかくことにする．

問題 2.7 (制約つき最適化問題)

$X = \mathbb{R}^d$ とする．$f_0, \cdots, f_m \in C^2(X;\mathbb{R})$ に対して，

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X}\left\{ f_0(\boldsymbol{x}) \mid f_1(\boldsymbol{x}) \le 0, \cdots, f_m(\boldsymbol{x}) \le 0 \right\}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

不等式制約が満たされる許容集合と有効な制約に対する添え字の集合を

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \in X \mid f_1(\boldsymbol{x}) \le 0, \cdots, f_m(\boldsymbol{x}) \le 0 \right\},$$
$$I_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{x}) = \left\{ i \in \{1, \cdots, m\} \mid f_i(\boldsymbol{x}) \ge 0 \right\} = \left\{ i_1, \cdots, i_{|I_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{x})|} \right\}$$

とおく．

問題 2.8 (制約つき問題に対する勾配法)

試行点 $\boldsymbol{x}_k \in S$ において $f_0(\boldsymbol{x}_k)$, $f_{i_1}(\boldsymbol{x}_k) = 0$, $\cdots$, $f_{i_{|I_{\mathrm{A}}|}}(\boldsymbol{x}_k) = 0$, $\boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x}_k)$, $\boldsymbol{g}_{i_1}(\boldsymbol{x}_k)$, $\cdots$, $\boldsymbol{g}_{i_{|I_{\mathrm{A}}|}}(\boldsymbol{x}_k)$ を既知とする．また，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ を正定値実対称行列，c_a を正の定数とする．このとき，

$$q(\boldsymbol{y}_g) = \min_{\boldsymbol{y}\in X}\left\{ q(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{y}\cdot(c_a \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x}_k)\cdot\boldsymbol{y} + f_0(\boldsymbol{x}_k) \;\middle|\; f_i(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_k)\cdot\boldsymbol{y} \le 0 \text{ for } i \in I_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{x}_k) \right\}$$

を満たす $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_g$ を求めよ．

問題 2.8 の Lagrange 関数を次のようにおく．

$$\mathscr{L}_{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}) = q(\boldsymbol{y}) + \sum_{i\in I_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{x}_k)} \lambda_{i\,k+1}\left(f_i(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_k)\cdot\boldsymbol{y}\right)$$

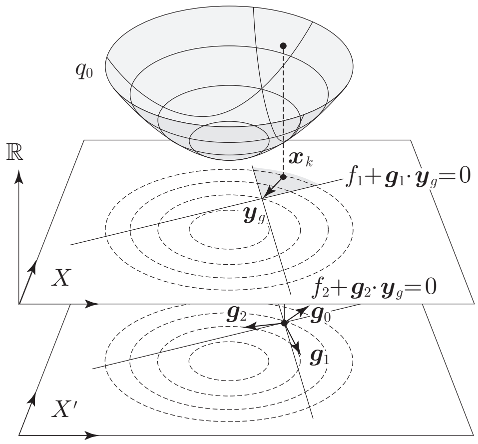


図 2.5: 制約つき問題に対する勾配法

問題 2.8 の最小点 $\boldsymbol{y}_g$ における KKT 条件は,

$$\mathscr{L}_{\mathrm{Q}\boldsymbol{y}}\left(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda}_{k+1}\right)=c_a\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_g+\boldsymbol{g}_0\left(\boldsymbol{x}_k\right)+\sum_{i\in I_{\mathrm{A}}\left(\boldsymbol{x}_k\right)}\lambda_{i\,k+1}\boldsymbol{g}_i\left(\boldsymbol{x}_k\right)=\boldsymbol{0}_{X'}, \tag{2.10}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{Q}\boldsymbol{\lambda}_{k+1}}\left(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda}_{k+1}\right)=f_i\left(\boldsymbol{x}_k\right)+\boldsymbol{g}_i\left(\boldsymbol{x}_k\right)\cdot\boldsymbol{y}_g\le 0\quad\text{for } i\in I_{\mathrm{A}}\left(\boldsymbol{x}_k\right), \tag{2.11}$$

$$\lambda_{i\,k+1}\left(f_i\left(\boldsymbol{x}_k\right)+\boldsymbol{g}_i\left(\boldsymbol{x}_k\right)\cdot\boldsymbol{y}_g\right)=0\quad\text{for } i\in I_{\mathrm{A}}\left(\boldsymbol{x}_k\right), \tag{2.12}$$

$$\lambda_{i\,k+1}\ge 0\quad\text{for } i\in I_{\mathrm{A}}\left(\boldsymbol{x}_k\right) \tag{2.13}$$

となる.

ここで，$\boldsymbol{y}_{g0}$, $\boldsymbol{y}_{gi_1}$, $\cdots$, $\boldsymbol{y}_{gi_{|I_{\mathrm{A}}|}}$ を $i \in I_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{x}_k)$ ごとに勾配法を適用したときの解とする．すなわち，

$$\boldsymbol{y}_{gi} = -\left(c_a \boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{g}_i \quad \text{for } i \in I_{\mathrm{A}}\left(\boldsymbol{x}_k\right).$$

また，$\boldsymbol{\lambda}_{k+1} \in \mathbb{R}^{|I_{\mathrm{A}}|}$ を未知の Lagrange 乗数とする．このとき，

$$\boldsymbol{y}_g = \boldsymbol{y}_g\left(\boldsymbol{\lambda}_{k+1}\right) = \boldsymbol{y}_{g0} + \sum_{i \in I_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{x}_k)} \lambda_{i\,k+1}\, \boldsymbol{y}_{gi}$$

は式 (2.10) を満たす．さらに，式 (2.11) は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_{i_1} \cdot \boldsymbol{y}_{gi_1} & \cdots & \boldsymbol{g}_{i_1} \cdot \boldsymbol{y}_{gi_{|I_{\mathrm{A}}|}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{g}_{i_{|I_{\mathrm{A}}|}} \cdot \boldsymbol{y}_{gi_1} & \cdots & \boldsymbol{g}_{i_{|I_{\mathrm{A}}|}} \cdot \boldsymbol{y}_{gi_{|I_{\mathrm{A}}|}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{i_1\,k+1} \\ \vdots \\ \lambda_{i_{|I_{\mathrm{A}}|}\,k+1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f_{i_1} + \boldsymbol{g}_{i_1} \cdot \boldsymbol{y}_{g0} \\ \vdots \\ f_{i_{|I_{\mathrm{A}}|}} + \boldsymbol{g}_{i_{|I_{\mathrm{A}}|}} \cdot \boldsymbol{y}_{g0} \end{pmatrix}$$

となる．この連立一次方程式より，$\boldsymbol{\lambda}_{k+1}$ が決定される．

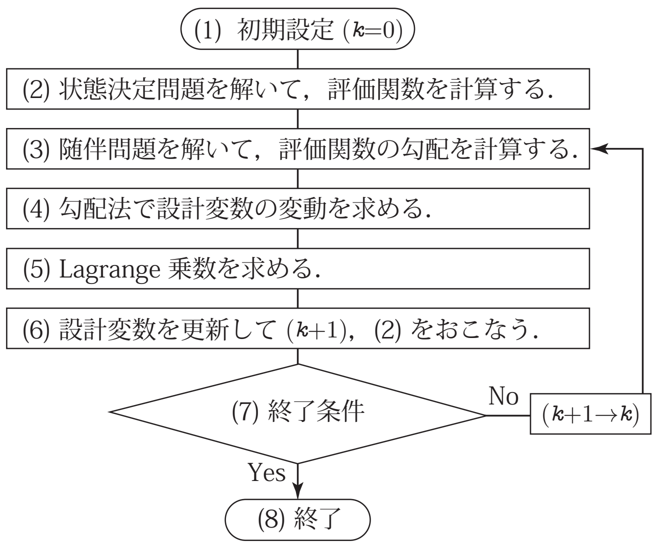


図 2.6: 制約つき最適化問題に対する勾配法のアルゴリズム

問題 2.9 (制約つき問題に対する Newton 法)

試行点 $\boldsymbol{x}_k \in X$ において，$\boldsymbol{\lambda}_k \in \mathbb{R}^{|I_{\mathrm{A}}|}$ は KKT 条件を満たすとする．また，

$$\boldsymbol{H}_{\mathscr{L}}(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{x}_k) + \sum_{i \in I_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{x}_k)} \lambda_{ik} \boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{x}_k)$$

とおく．このとき，

$$q(\boldsymbol{y}_g) = \min_{\boldsymbol{y} \in X} \left\{ q(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{H}_{\mathscr{L}}(\boldsymbol{x}_k) \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x}_k) \cdot \boldsymbol{y} + f_0(\boldsymbol{x}_k) \;\middle|\; f_i(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_k) \cdot \boldsymbol{y} \leq 0 \text{ for } i \in I_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{x}_k) \right\}$$

を満たす $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_g$ を求めよ．

勾配法の $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{H}_{\mathscr{L}}$ におきかえれば Newton 法になる．

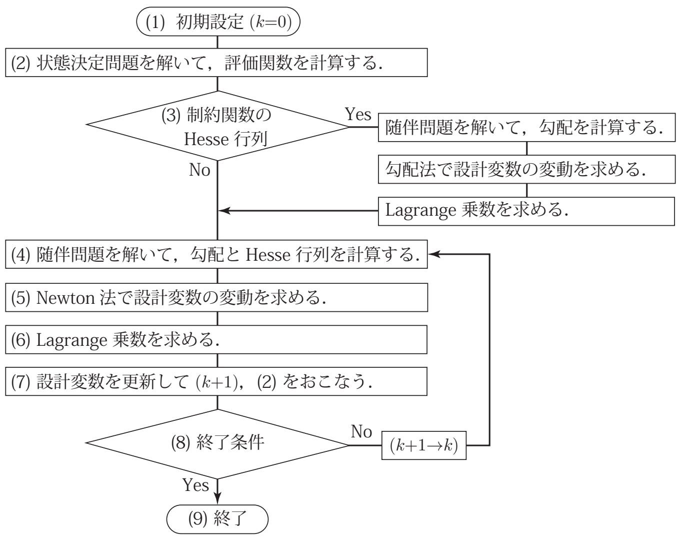


図 2.7: 制約つき最適化問題に対する Newton 法のアルゴリズム

■ 数値例

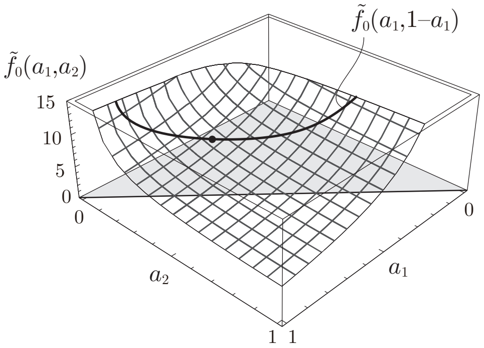
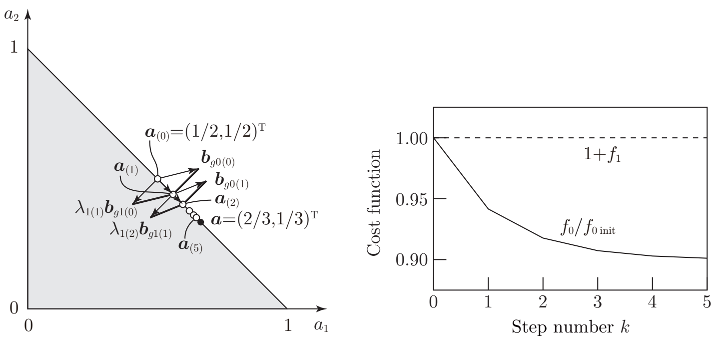
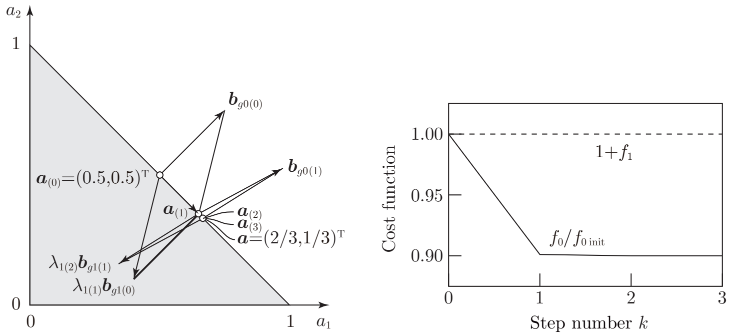


図 2.8: 体積制約つき平均コンプライアンス最小化問題の数値例



(a) 試行点の推移　(b) 評価関数の履歴

図 2.9: 勾配法による数値解



(a) 試行点の推移　(b) 評価関数の履歴

図 2.10: Newton 法による数値解

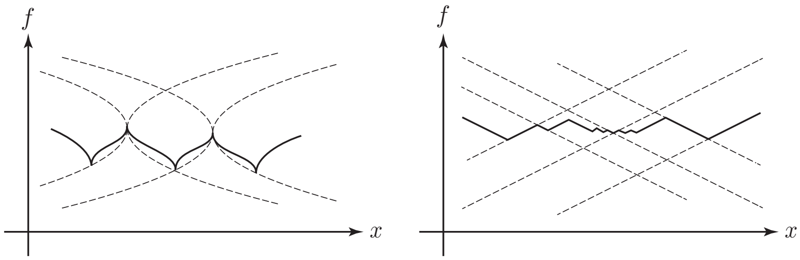
§3 関数解析の基礎

■ 関数空間 [1, 4.3 節]

- $W^{k,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$: k 階微分まで p 乗可積分な関数 $\Omega\to\mathbb{R}^d$ の集合 (Sobolev 空間: 完備なノルム空間 (Banach 空間) の性質をもつ)
- $W^{0,2}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)=L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$
- $W^{k,2}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)=H^k\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$: $H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$ の場合，たとえば，内積

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}=\int_\Omega\left\{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\right)\right\}\,\mathrm{d}x$$

  に対して完備な内積空間 (Hilbert 空間) の性質をもつ．
- $W^{0,\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)=L^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$: 有界かつ可積分な関数の集合
- $W^{1,\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$: Lipschitz 連続な関数の集合
- $C^{0,\sigma}\left(\Omega;\mathbb{R}\right)$: $\sigma\in(0,1]$ に対して，Hölder 連続な関数の集合 ($\sigma=1$ のとき， Lipschitz 連続に対応する)



(a) $\sigma = 0.5$　　(b) $\sigma = 1$ (Lipschitz 連続)

図 3.1: Hölder 連続な関数

■ 関数空間の包含関係

定理 3.1 (Sobolev の埋蔵定理)

$k \in \{1, 2, \cdots\}$, $p \in [1, \infty)$ に対して，$k + 1 - d/p \geq k - d/q$ ならば

$$W^{k+1,p}(\Omega; \mathbb{R}) \subset W^{k,q}(\Omega; \mathbb{R})$$

が成り立つ．さらに，$0 < \sigma = k - d/p < 1$ ならば，

$$W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}) \subset C^{0,\sigma}(\Omega; \mathbb{R})$$

となる．

定理 3.2 (Hölder の不等式)

$d \in \mathbb{N}$ に対して，Ω を $\mathbb{R}^d$ 上の可測集合とし，$p, q \in (1, \infty)$ は

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

を満たすとする．このとき，$f \in L^p(\Omega; \mathbb{R})$ と $g \in L^q(\Omega; \mathbb{R})$ に対して

$$\|fg\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R})}$$

が成り立つ．

■ 双対空間 [1, 4.4 節]

Banach 空間 X に対して，

$$f(v) = \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in X$$

を満たすような有界線形汎関数 $f(\cdot) = \langle u, \cdot \rangle$ の集合 (u の集合) を X' とかいて，X の双対空間という．また，$\langle \cdot, \cdot \rangle : X' \times X \to \mathbb{R}$ を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$ ともかいて，双対積という．

定義 3.3 (k 階の Fréchet 微分)

X と Y を $\mathbb{R}$ 上の Banach 空間とする．$\boldsymbol{x} \in X$ の近傍 $B \subset X$ 上で $f : B \to Y$ が定義されているとする．任意の変動ベクトル $\boldsymbol{y}_1 \in X$ に対して，

$$\lim_{\|\boldsymbol{y}_1\|_X \to 0} \frac{\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}_1) - f(\boldsymbol{x}) - f'(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1]\|_Y}{\|\boldsymbol{y}_1\|_X} = 0 \tag{3.1}$$

を満たす有界線形作用素 $f'(\boldsymbol{x})[\,\cdot\,] \in \mathcal{L}(X;Y)$ が存在するとき，$f'(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1]$ を f の $\boldsymbol{x}$ における Fréchet 微分という．さらに，任意の $\boldsymbol{y}_2 \in X$ に対して，

$$\lim_{\|\boldsymbol{y}_2\|_X \to \boldsymbol{0}_X} \frac{\|f'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}_2)[\boldsymbol{y}_1] - f'(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1] - f''(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2]\|_Y}{\|\boldsymbol{y}_2\|_X} = 0$$

を満たす $f''(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1, \,\cdot\,] \in \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X;Y))$ が存在するとき，$f''(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2]$ を f の $\boldsymbol{x}$ における 2 階の Fréchet 微分という．$\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X;Y))$ を $\mathcal{L}^2(X \times X; Y)$ とかく．$k \in \{3, 4, \ldots\}$ 階の Fréchet 微分 $f^{(k)}$ も同様に定義される．

式 (3.1) は，

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}_1) = f(\boldsymbol{x}) + f'(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{y}_1] + o(\|\boldsymbol{y}_1\|_X)$$

ともかける．ここで，$o(\|\boldsymbol{y}_1\|_X)$ は

$$\lim_{\|\boldsymbol{y}_1\|_X \to 0} \frac{o(\|\boldsymbol{y}_1\|_X)}{\|\boldsymbol{y}_1\|_X} = \boldsymbol{0}_Y$$

のように定義される．

§4　偏微分方程式の境界値問題

■ 線形弾性問題 [1, 5.4 節]

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ の境界 $\partial\Omega$ は Lipchitz 連続とする．ひずみと応力を次のようにかく．

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} + \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right\}, \quad \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})$$

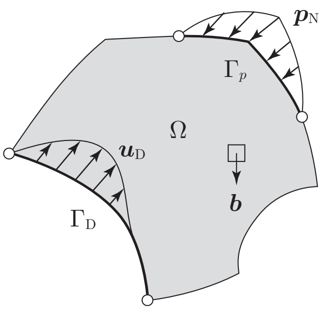


図 4.1: 線形弾性問題

問題 4.1 (線形弾性問題)

体積力 $\boldsymbol{b}:\Omega\to\mathbb{R}^d$, 境界力 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}}:\Gamma_{\mathrm{N}}\to\mathbb{R}^d$, 既知変位 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}:\Omega\to\mathbb{R}^d$ に対して，

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \quad \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}, \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}} \end{aligned}$$

を満たす変位 $\boldsymbol{u}:\Omega\to\mathbb{R}^d$ を求めよ．

$$\begin{aligned} U &= \left\{\boldsymbol{u}\in H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D}}\right\}, \\ U(\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) &= \left\{\boldsymbol{u}\in H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D}}\right\}, \\ a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= \int_\Omega \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}x, \\ l(\boldsymbol{v}) &= \int_\Omega \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\gamma. \end{aligned}$$

問題 4.2 (線形弾性問題の弱形式)

$\boldsymbol{b}\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$, $\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}}\in L^2\left(\Gamma_{\mathrm{N}};\mathbb{R}^d\right)$, $\boldsymbol{C}\in L^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d\times d\times d}\right)$, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\in H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$ のとき，

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = l(\boldsymbol{v}) \quad \forall\boldsymbol{v}\in U$$

を満たす $\boldsymbol{u}\in U(\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}})$ を求めよ．

■ 楕円型偏微分方程式の弱解の一意存在 [1, 5.2 節]

定理 4.3 (Lax-Milgram の定理)

U を実 Hilbert 空間とする．a は強圧的かつ有界とする．また，$l \in U'$ とする．このとき，問題 4.2 の解 $u \in U$ は一意に存在する．

例題 4.4 (線形弾性問題の解の一意存在)

問題 4.2 において，$|\Gamma_{\mathrm{D}}| > 0$ のとき，解 $\boldsymbol{u} \in U(\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}})$ は一意に存在することを示せ．

(解答) 次のおきかえにより，Lax-Milgram の定理の仮定が成り立つことが確かめられる．

$$a(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) = l(\boldsymbol{v}) - a(\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}, \boldsymbol{v}) \hat{l}(\boldsymbol{v})$$

□

■ 解の正則性 [1, 5.3 節]

問題 4.1 において，角点と Dirichlet 境界と Neumann 境界の境界 $\bar{\Gamma}_{\mathrm{N}} \cap \bar{\Gamma}_{\mathrm{D}}$ の近傍を B とかくことにする．

$\boldsymbol{b} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ ならば，$\boldsymbol{u} \in H^2(\Omega \setminus \bar{B}; \mathbb{R})$ を得る．

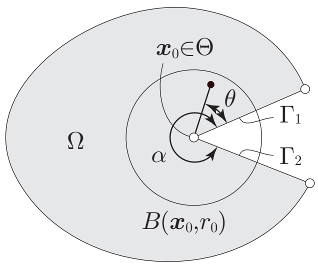
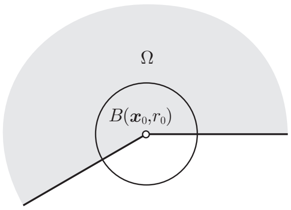
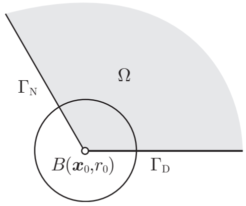


図 4.2: 角をもつ 2 次元領域



(a) 同一種境界で開き角が $\alpha > \pi$



(b) 混合境界で開き角が $\alpha > \pi/2$

図 4.3: 特異性が現れる角をもつ 2 次元領域

定理 4.5 (角点近傍における解の正則性 [1, 定理 5.3.2])

厳密解 $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{x}_0$ の近傍で $\boldsymbol{u} \in H^s\left(B\left(\boldsymbol{x}_0, r_0\right) \cap \Omega; \mathbb{R}^2\right)$ に入る．ただし，

1. Γ_1 と Γ_2 が同一種境界ならば，$\alpha \in [\pi, 2\pi)$ のとき $s \in (3/2, 2]$
2. Γ_1 と Γ_2 が混合境界ならば，$\alpha \in [\pi/2, \pi)$ のとき $s \in (3/2, 2]$，および $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ のとき $s \in (5/4, 3/2]$ となる．

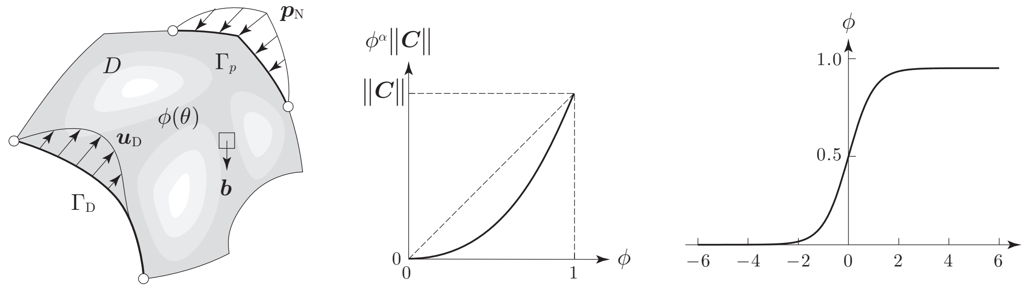
定理 4.6 (角点近傍における解の正則性)

厳密解 $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{x}_0$ の近傍で

1. Γ_1 と Γ_2 が同一種境界ならば，$\alpha < \pi$ のとき，
2. Γ_1 と Γ_2 が混合境界ならば，$\alpha < \pi/2$ のとき，

$W^{1,\infty}\left(B\left(\boldsymbol{x}_0, r_0\right) \cap \Omega; \mathbb{R}^2\right)$ に入る．

§5　線形弾性体の密度型位相最適化 [1, 第 8 章]



(a) 線形弾性体　(b) 密度 ϕ と剛性 $\phi^\alpha \|\boldsymbol{C}\|$　(c) 密度 $(\tanh\theta + 1)/2$

図 5.1: SIMP (solid isotropic material with penalization) モデルと設計変数 $\theta : D \to \mathbb{R}$

■ 線形空間と許容集合 [1, 8.1 節]

設計変数を $\theta \in \mathcal{D} \subset X$ とおく．ただし，線形空間 X と許容集合 $\mathcal{D}$ を

$$X = H^1(D;\mathbb{R}),$$
$$\mathcal{D} = X \cap W^{1,\infty}(D;\mathbb{R})$$

とおく．密度を

$$\phi(\theta) = \frac{1}{2}\tanh\theta + \frac{1}{2}$$

とおく．さらに，状態変数 (状態決定問題の解) $\boldsymbol{u}$ の線形空間と許容集合を

$$U = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1\left(D;\mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D}} \right\},$$
$$U(\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1\left(D;\mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D}} \right\},$$
$$\mathcal{S} = U \cap W^{1,2q_{\mathrm{R}}}\left(D;\mathbb{R}^d\right), \quad \mathcal{S}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) = U(\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cap W^{1,2q_{\mathrm{R}}}\left(D;\mathbb{R}^d\right)$$

とおく．ただし，$q_{\mathrm{R}} > d$ とする．

■ 状態決定問題 (等式制約)[1, 8.8 節]

問題 5.1 (θ 型線形弾性問題)

$\alpha > 1$ を定数とする．$\theta \in \mathcal{D}$, $\boldsymbol{b}(\theta)$, $\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}}$ に対して，

$$-\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}}\left(\phi^{\alpha}(\theta)\,\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\right) = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(\theta) \quad \text{in } D,$$

$$\phi^{\alpha}(\theta)\,\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}},$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D}}$$

を満たす $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}})$ を求めよ．

形状最適化理論と製品設計への応用
└ 線形弾性体の密度型位相最適化

■ 評価関数

平均コンプライアンスと領域の大きさに対する制約関数を次のようにおく．

$$f_0(\theta,\boldsymbol{u}) = \int_D \boldsymbol{b}(\theta)\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\gamma - \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\cdot\left(\phi^{\alpha}(\theta)\,\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{\nu}\right)\mathrm{d}\gamma,$$

$$f_1(\theta) = \int_D \phi(\theta)\;\mathrm{d}x - c_1.$$

問題 5.2 (平均コンプライアンス最小化問題)

f_0 と f_1 に対して，

$$\min_{(\theta,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}})\in\mathcal{D}\times\mathcal{S}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}})} \{ f_0(\theta,\boldsymbol{u}) \mid f_1(\theta) \le 0,\ \text{問題 5.1}\}$$

を満たす θ を求めよ．

■ 評価関数の θ 微分 [1, 8.8 節]

$f_0(\theta, \boldsymbol{u})$ の Lagrange 関数を

$$\mathscr{L}_0(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0) = f_0(\theta, \boldsymbol{u}) + \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)$$

とおく．ただし，$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}$ は問題 5.1 の Lagrange 関数で次のようにおく．

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0) \\
&= \int_D \{-\phi^\alpha(\theta) \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0) + \boldsymbol{b}(\theta) \cdot \boldsymbol{u}\} \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}} \{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\phi^\alpha(\theta) \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_0) \boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{v}_0 \cdot (\phi^\alpha(\theta) \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu})\} \, \mathrm{d}\gamma
\end{aligned}$$

$\mathscr{L}_0$ の Fréchet 微分に対して，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_0'(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\vartheta, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}_0] \\
&= \boxed{\mathscr{L}_{0\theta}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\vartheta]} \\
&\quad + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\hat{\boldsymbol{u}}] \quad (= 0 \ \Leftarrow \ \boxed{\mathscr{L}_0(\theta, \boldsymbol{v}_0, \hat{\boldsymbol{u}}) = 0 \ \forall \hat{\boldsymbol{u}} \in U}) \\
&\quad + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{v}_0}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\hat{\boldsymbol{v}}_0] \quad (= 0 \ \Leftarrow \ \boxed{\mathscr{L}_0(\theta, \boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{v}}_0) = 0 \ \forall \hat{\boldsymbol{v}}_0 \in U}) \\
&= \int_D \left\{\boldsymbol{b}' \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_0) - \alpha\phi^{\alpha-1}\phi' \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)\right\} \vartheta \, \mathrm{d}x \\
&= \langle g_0, \vartheta \rangle \quad \forall (\vartheta, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}_0) \in X \times U \times U
\end{aligned}$$

一方，$f_1(\theta)$ に関しては，次が成り立つ．

$$f_1'(\theta)[\vartheta] = \int_D \phi' \vartheta \, \mathrm{d}x = \langle g_1, \vartheta \rangle \quad \forall \vartheta \in X$$

■ 評価関数の θ Hesse 形式

$\boldsymbol{b}$ は θ の関数ではないと仮定する．$(\theta, \boldsymbol{u})$ を設計変数とみなし，その許容集合と許容方向集合を

$$S = \{(\theta, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \mid \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 \text{ for all } \boldsymbol{v} \in U\},$$
$$T_S(\theta, \boldsymbol{u}) = \{(\vartheta, \hat{\boldsymbol{v}}) \in X \times U \mid \mathscr{L}_{\mathrm{S}\theta\boldsymbol{u}}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\vartheta, \hat{\boldsymbol{v}}] = 0 \text{ for all } \boldsymbol{v} \in U\}$$

とおく．このとき，$\mathscr{L}_0$ の設計変数 $(\theta, \boldsymbol{u})$ に対する 2 階 Fréchet 偏微分は

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{0(\theta,\boldsymbol{u})(\theta,\boldsymbol{u})}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[(\vartheta_1, \hat{\boldsymbol{v}}_1), (\vartheta_2, \hat{\boldsymbol{v}}_2)] \\
&\quad = \mathscr{L}_{0\theta\theta}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\vartheta_1, \vartheta_2] + \mathscr{L}_{0\theta\boldsymbol{u}}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\vartheta_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2] \\
&\qquad + \mathscr{L}_{0\theta\boldsymbol{u}}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\vartheta_2, \hat{\boldsymbol{v}}_1] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\hat{\boldsymbol{v}}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2] \\
&\qquad\qquad \forall (\vartheta_1, \hat{\boldsymbol{v}}_1), (\vartheta_2, \hat{\boldsymbol{v}}_2) \in T_S(\theta, \boldsymbol{u})
\end{aligned} \tag{5.1}$$

となる．

式 (5.1) 右辺の各項は，

$$\mathscr{L}_{0\theta\theta}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\vartheta_1, \vartheta_2] = \int_D -(\phi^\alpha(\theta))'' \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)\, \vartheta_1 \vartheta_2 \, \mathrm{d}x, \tag{5.2}$$

$$\mathscr{L}_{0\theta\boldsymbol{u}}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\vartheta_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2] = \int_D -(\phi^\alpha(\theta))' \boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{v}}_2) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)\, \vartheta_1 \, \mathrm{d}x, \tag{5.3}$$

$$\mathscr{L}_{0\theta\boldsymbol{u}}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\vartheta_2, \hat{\boldsymbol{v}}_1] = \int_D -(\phi^\alpha(\theta))' \boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{v}}_1) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)\, \vartheta_2 \, \mathrm{d}x, \tag{5.4}$$

$$\mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}(\theta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\hat{\boldsymbol{v}}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2] = 0 \tag{5.5}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}$，$\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}$，$\hat{\boldsymbol{v}}_1$ および $\hat{\boldsymbol{v}}_2$ は Γ_{D} 上で $\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d}$ となることを用いた．

一方，$j \in \{1,2\}$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{S}\theta\boldsymbol{u}}(\theta,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})[\vartheta_j,\hat{\boldsymbol{v}}_j] \\
&= \int_D \left\{-(\phi^\alpha(\theta))'\vartheta_j \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}) - \phi^\alpha(\theta)\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{v}}_j)\right\}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v})\ \mathrm{d}x \\
&= 0 \quad \forall(\vartheta_j,\hat{\boldsymbol{v}}_j)\in T_S(\theta,\boldsymbol{u}) \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{v}_0$ と $\hat{\boldsymbol{v}}_j$ の Dirichlet 境界条件が使われた．式 (5.6) より，

$$\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{v}}_j) = -\frac{(\phi^\alpha(\theta))'}{\phi^\alpha(\theta)}\vartheta_j\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \quad \text{in } D \qquad (5.7)$$

を得る．そこで，式 (5.7) の $\hat{\boldsymbol{v}}_j$ を式 (5.4) の $\hat{\boldsymbol{v}}_1$ と式 (5.3) の $\hat{\boldsymbol{v}}_2$ に代入すれば，次を得る．

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{0\theta\boldsymbol{u}}(\theta,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0)[\vartheta_1,\hat{\boldsymbol{v}}_2] = \mathscr{L}_{0\theta\boldsymbol{u}}(\theta,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0)[\vartheta_2,\hat{\boldsymbol{v}}_1] \\
&= \int_D \frac{(\phi^\alpha(\theta))'^2}{\phi^\alpha(\theta)}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)\,\vartheta_1\vartheta_2\ \mathrm{d}x \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

f_0 の 2 階 θ 微分は，式 (5.8) と式 (5.2) を式 (5.1) に代入することにより，

$$\begin{aligned}
h_0(\theta,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0)[\vartheta_1,\vartheta_2] &= \int_D \left\{2\frac{(\phi^\alpha(\theta))'^2}{\phi^\alpha(\theta)} - (\phi^\alpha(\theta))''\right\}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)\,\vartheta_1\vartheta_2\ \mathrm{d}x \\
&= \int_D \beta(\alpha,\theta)\,\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)\,\vartheta_1\vartheta_2\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

となる．ただし，$\beta(\alpha,\theta)$ は

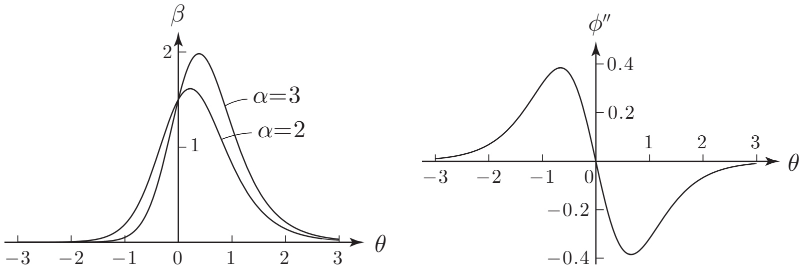
$$\begin{aligned}
\beta(\alpha,\theta) &= \alpha(\alpha+1)\left(\frac{1}{2}\tanh\theta+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-2}\left(\frac{\operatorname{sech}^2\theta}{2}\right)^2 \\
&\quad -\alpha\left(\frac{1}{2}\tanh\theta+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(-\operatorname{sech}^2\theta\tanh\theta\right)
\end{aligned}$$

となる．図 5.2 (a) より，$\beta(\alpha,\theta)>0$ が確認される．さらに，自己随伴関係を用いれば，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)>0$ となり，$h_0(\theta,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0)[\cdot,\cdot]$ は X 上の強圧的かつ有界なある双 1 次形式となる．

一方，$f_1(\theta)$ の 2 階 θ 微分は，

$$h_1(\theta)[\vartheta_1,\vartheta_2] = \int_D \phi''(\theta)\,\vartheta_1\vartheta_2\;\mathrm{d}x = \int_D -\mathrm{sech}^2\theta\tanh\theta\vartheta_1\vartheta_2\;\mathrm{d}x$$

となる．図 5.2 (b) より，$h_1(\theta)[\cdot,\cdot]$ は強圧的にはならない．



(a) $\beta(\alpha,\theta)$　(b) $\phi''(\theta)$

図 5.2: 評価関数の 2 階 θ 微分における係数関数

■ H^1 勾配法と H^1 Newton 法 [1, 8.6 節]

問題 5.3 (θ 型 H^1 勾配法)

X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式 $a_X : X\times X\to\mathbb{R}$ と $g_i(\theta_k)\in X'$ が与えられたとき，

$$\boxed{a_X(\vartheta_{gi},\psi) = -\langle g_i(\theta_k),\psi\rangle \quad \forall\psi\in X}$$

を満たす $\vartheta_{gi}\in X$ を求めよ．

例えば，

$$a_X(\vartheta,\psi) = \int_D (\boldsymbol{\nabla}\vartheta\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + c_D\vartheta\psi)\;\mathrm{d}x$$

とおく．アルゴリズムは，図 2.6 が使われる．

問題 5.4 (H^1 内積を用いた θ 型 H^1 勾配法)

$\theta \in \mathcal{D}$ に対して $g_i \in X'$ が与えられたとき，次を満たす $\vartheta_{gi} \in X$ を求めよ．

$$
\begin{aligned}
-\Delta\vartheta_{gi} + c_D\vartheta_{gi} &= -g_i \quad \text{in } D,\\
\partial_\nu \vartheta_{gi} &= 0 \quad \text{on } \partial D.
\end{aligned}
$$

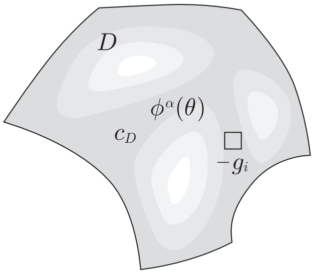


図 5.3: H^1 空間の内積を用いた H^1 勾配法

定理 5.5 (θ 型 H^1 勾配法 [1, 定理 8.4.2, 定理 8.5.5])

$\theta \in \mathcal{D}$ に対して，問題 5.1 の解 $\boldsymbol{u}$ が $\mathcal{S}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}})$ に入るとき，$i \in \{0,1\}$ に対して，$\boldsymbol{g}_i \in L^{q_{\mathrm{R}}}(D;\mathbb{R})$ となる．さらに，問題 5.4 の弱解 ϑ_{gi} は一意に存在し，その解 ϑ_{gi} は $D \setminus \bar{B}$ 上で，$W^{1,\infty}$ 級となる．また，ϑ_{gi} は $\tilde{f}_i(\theta)$ の降下方向を向いている．

(証明) Hölder の不等式などにより，$g_i \in L^{q_{\mathrm{R}}}(D;\mathbb{R}) \subset X'$ を得る．さらに，Lax-Milgram の定理より，ϑ_{gi} は一意に存在し，ϑ_{gi} は $D \setminus \bar{B}$ 上で $W^{2,q_{\mathrm{R}}}$ 級を得る．さらに，Sobolev の埋蔵定理より，

$$
2 - \frac{d}{q_{\mathrm{R}}} = 1 + \sigma > 1 \ (\sigma \in (0,1)) \ \Rightarrow \ W^{2,q_{\mathrm{R}}}(D \setminus \bar{B}, \mathbb{R}) \subset W^{1,\infty}(D \setminus \bar{B}, \mathbb{R})
$$

が成り立つ．また，次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_i(\theta + \bar{\epsilon}\vartheta_{gi}) - \tilde{f}_i(\theta) &= \bar{\epsilon}\langle \boldsymbol{g}_i, \vartheta_{gi}\rangle + o(|\bar{\epsilon}|)\\
&= -\bar{\epsilon} a_X(\vartheta_{gi}, \vartheta_{gi}) + o(|\bar{\epsilon}|) \le -\bar{\epsilon}\alpha_X \|\vartheta_{gi}\|_X^2 + o(|\bar{\epsilon}|)
\end{aligned}
$$

問題 5.6 (θ 型 H^1 Newton 法)

試行点 $\theta_k \in X$ において，$\boldsymbol{\lambda}_k \in \mathbb{R}^{|I_{\mathrm{A}}|}$ は KKT 条件を満たすとする．また，

$$h_{\mathscr{L}}(\theta_k)[\vartheta_1, \vartheta_2] = h_0(\theta_k)[\vartheta_1, \vartheta_2] + \sum_{i \in I_{\mathrm{A}}(\theta_k)} \lambda_{ik} h_i(\theta_k)[\vartheta_1, \vartheta_2] \quad \forall \vartheta_1, \vartheta_2 \in X$$

とおく．$a_X : X \times X \to \mathbb{R}$ を X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式とするとき，

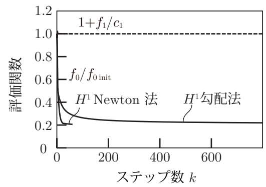
$$\boxed{c_h h_{\mathscr{L}}(\theta_k)[\vartheta_{gi}, \psi] + c_a a_X(\vartheta_{gi}, \psi) = -\langle g_i(\theta_k), \psi \rangle \quad \forall \psi \in X}$$

を満たす $\varphi_{gi} \in X$ を求めよ．

図 2.7 のアルゴリズムが使われる．

数値例

(a) 初期密度と境界条件



(b) 評価関数の履歴

(c) H^1 勾配法による最適密度

(d) H^1 Newton 法による最適密度

図 5.4: 2 次元線形弾性体の密度型位相最適化問題に対する数値例

§6 線形弾性体の形状最適化 [1, 第 9 章]

■ 線形空間と許容集合 [1, 9.1 節]

設計変数を $\phi \in \mathcal{D} \subset X$ とおく．ただし，線形空間 X と許容集合 $\mathcal{D}$ を

$$X = \left\{ \boldsymbol{\phi} \in H^1 \left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \bar{\Omega}_{\mathrm{C0}} \right\},$$
$$\mathcal{D} = \left\{ \boldsymbol{\phi} \in X \cap W^{1,\infty} \left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \text{全単射の条件} \right\}.$$

とおく．ただし，$\bar{\Omega}_{\mathrm{C0}} \subset \bar{\Omega}_0$ は設計上の固定領域あるいは境界とする．
状態変数 (状態決定問題の解) $\boldsymbol{u}$ の線形空間と許容集合を

$$U = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1 \left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \boldsymbol{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D}} (\boldsymbol{\phi}) \right\},$$
$$U (\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1 \left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D}} (\boldsymbol{\phi}) \right\},$$
$$\mathcal{S} = U \cap W^{1,\infty} \left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right),$$
$$\mathcal{S} (\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) = U (\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cap W^{1,\infty} \left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right)$$

とおく．

■ 状態決定問題 (等式制約)[1, 9.11 節]

問題 6.1 (線形弾性問題)

$\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}$, $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\phi})$, $\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\phi})$, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})$ および $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\phi})$ に対して，

$$-\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{\phi}) \quad \text{in } \Omega (\boldsymbol{\phi}),$$
$$\boldsymbol{S} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} (\boldsymbol{\phi}) \quad \text{on } \Gamma_p (\boldsymbol{\phi}),$$
$$\boldsymbol{S} (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}} (\boldsymbol{\phi}) \setminus \bar{\Gamma}_p (\boldsymbol{\phi}),$$
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} (\boldsymbol{\phi}) \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}} (\boldsymbol{\phi})$$

を満たす $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S} (\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}})$ を求めよ．

■ 評価関数 [1, 9.11 節]

平均コンプライアンスと領域の大きさに対する制約関数を次のようにおく．

$$f_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\gamma - \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \cdot (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu}) \, \mathrm{d}\gamma,$$

$$f_1(\boldsymbol{\phi}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \mathrm{d}x - c_1.$$

問題 6.2 (平均コンプライアンス最小化問題)

f_0 と f_1 に対して，

$$\min_{(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}} \{ f_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}) \mid f_1(\boldsymbol{\phi}) \le 0, \text{ 問題 6.1} \}$$

を満たす $\Omega(\boldsymbol{\phi})$ を求めよ．

■ 評価関数の形状微分 [1, 9.11 節]

$f_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u})$ の Lagrange 関数を

$$\mathscr{L}_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0) = f_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}) + \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)$$

とおく．ただし，$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}$ は問題 6.1 の Lagrange 関数で次のようにおく．

$$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} (-\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\gamma$$
$$+ \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \cdot (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu})\} \, \mathrm{d}\gamma$$

$\boldsymbol{b}(\phi)$, $\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}}(\phi)$, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}(\phi)$ および $\boldsymbol{C}(\phi)$ は物質固定であると仮定する．このとき，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_0'(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}_0] \\
&\quad = \boxed{\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}]} \\
&\qquad + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\hat{\boldsymbol{u}}] \quad \left(= 0 \ \Leftarrow \ \boxed{\mathscr{L}_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{v}_0, \hat{\boldsymbol{u}}) = 0 \ \forall \hat{\boldsymbol{u}} \in U}\right) \\
&\qquad + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{v}_0}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\hat{\boldsymbol{v}}_0] \quad \left(= 0 \ \Leftarrow \ \boxed{\mathscr{L}_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{v}}_0) = 0 \ \forall \hat{\boldsymbol{v}}_0 \in U}\right) \\
&\quad = \langle \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \left(\Leftarrow \boxed{\text{[1, 命題 9.3.4 と命題 9.3.7]}}\right) \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left(\boldsymbol{G}_{\Omega 0} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} + g_{\Omega 0} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi} \right) \mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{g}_{p0} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma + \int_{\partial \Gamma_p(\boldsymbol{\phi}) \cup \Theta(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{g}_{\partial p0} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma \\
&\qquad\quad \forall (\boldsymbol{\varphi}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}_0) \in \Xi \times U \times U
\end{aligned}
$$

形状最適化理論と製品設計への応用
└線形弾性体の領域変動型形状最適化

が成り立つ．ただし，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_{\Omega 0} &= 2\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}}, \\
g_{\Omega 0} &= -\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) + 2\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}, \\
\boldsymbol{g}_{p0} &= 2\kappa (\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nu}, \\
\boldsymbol{g}_{\partial p0} &= 2 (\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{\tau}
\end{aligned}
$$

である．

あるいは，$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}}$, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}$ および $\boldsymbol{C}$ は空間固定の関数であると仮定して，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}_0$ は $q_{\mathrm{R}} > d$ に対して $W^{2,2q_{\mathrm{R}}}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)$ と仮定とき，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}^*}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}] \\
&\quad = \langle \bar{\boldsymbol{g}}_0, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \left(\Leftarrow \boxed{[1,\ \text{命題 9.3.9 と命題 9.3.12}]}\right) \\
&\quad = \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} \bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega 0} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma + \int_{\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})} \bar{\boldsymbol{g}}_{p0} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma + \int_{\partial\Gamma_p(\boldsymbol{\phi})\cup\Theta(\boldsymbol{\phi})} \bar{\boldsymbol{g}}_{\partial p0} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\varsigma \\
&\qquad + \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\phi})} \bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}0} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
$$

のようにかかれる．ここで，

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial\Omega 0} &= \left(-\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) + 2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{\nu}, \\
\bar{\boldsymbol{g}}_{p0} &= 2\left(\partial_\nu + \kappa\right)\left(\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{\nu}, \\
\bar{\boldsymbol{g}}_{\partial p0} &= 2\left(\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{\tau}, \\
\bar{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{D}0} &= 2\left\{\partial_\nu\left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\right)\cdot\left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\nu}\right)\right\}\boldsymbol{\nu}.
\end{aligned}
$$

一方，$f_1(\boldsymbol{\phi})$ の形状微分は，

$$
f_1'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] = \langle \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x
$$

となる．あるいは，

$$
f_1'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] = \langle \bar{\boldsymbol{g}}_1, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\gamma
$$

となる．

評価関数の形状 Hesse 形式 [1, 9.11 節]

$\boldsymbol{b} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ を仮定する．設計変数 $(\phi, \boldsymbol{u})$ を $(\phi, \boldsymbol{u})$ の許容集合と許容方向集合を

$$S = \{(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \mid \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 \text{ for all } \boldsymbol{v} \in U\},$$
$$T_S(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}) = \{(\boldsymbol{\varphi}, \hat{\boldsymbol{v}}) \in X \times U \mid \mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\boldsymbol{\varphi}, \hat{\boldsymbol{v}}] = 0 \text{ for all } \boldsymbol{v} \in U\}$$

とおく．このとき，$\mathscr{L}_0$ の $(\phi, \boldsymbol{u})$ に対する 2 階 Fréchet 偏微分は，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{0(\boldsymbol{\phi}',\boldsymbol{u})(\boldsymbol{\phi}',\boldsymbol{u})}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[(\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_1), (\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{v}}_2)] \\
&\quad = (\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}_1] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\hat{\boldsymbol{v}}_1])_{\boldsymbol{\phi}}[\boldsymbol{\varphi}_2] \\
&\qquad + (\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}_1] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\hat{\boldsymbol{v}}_1])_{\boldsymbol{u}}[\hat{\boldsymbol{v}}_2] \\
&\quad = \mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2] \\
&\qquad + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{v}}_1] + \mathscr{L}_{0\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\hat{\boldsymbol{v}}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2] \\
&\qquad\quad \forall (\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_1), (\boldsymbol{\varphi}_2, \hat{\boldsymbol{v}}_2) \in T_S(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u})
\end{aligned} \tag{6.1}$$

となる．式 (6.1) の右辺第 1 項の計算は省略する．

式 (6.1) の右辺第 2 項は，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{0\boldsymbol{\phi}'\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{\boldsymbol{v}}_2] \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left[\left\{ \boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{v}}_2) (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}_0^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_0) (\boldsymbol{\nabla} \hat{\boldsymbol{v}}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \right\} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}} \right. \\
&\qquad \left. - (\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{v}}_2) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_0)) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \right] \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{6.2}$$

となる．

一方，$j \in \{1,2\}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{S}\phi' \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\boldsymbol{\varphi}_j, \hat{\boldsymbol{v}}_j] \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \Big\{ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{s}} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{s}} \\
&\qquad - \left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v})\right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_j - \boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{v}}_j) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) \Big\} \mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left[\left\{ \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{C} \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{s}} - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_j \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{v}}_j) \right\} \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \right] \cdot \boldsymbol{I} \, \mathrm{d}x \\
&\quad = 0 \quad \forall (\boldsymbol{\varphi}_j, \hat{\boldsymbol{v}}_j) \in T_S(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u})
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

となる．ただし，$\boldsymbol{v}$ と $\hat{\boldsymbol{v}}_j$ の Dirichlet 境界条件が使われた．

任意の $\boldsymbol{v} \in U$ に対して式 (6.3) が成り立つことから，

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{v}}_j) \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \\
&\quad = \left\{ \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{C} \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{s}} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_j \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \right\} \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

が得られる．また，式 (6.3) は

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{S}\phi' \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})[\boldsymbol{\varphi}_j, \hat{\boldsymbol{v}}_j] \\
&\quad = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \left[\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}} \right. \\
&\qquad \left. + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}) \left\{ \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_j \right) - \left(\boldsymbol{\nabla} \hat{\boldsymbol{v}}_j^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \right\} \right] \cdot \boldsymbol{I} \, \mathrm{d}x \\
&\quad = 0
\end{aligned}
$$

ともかける．

そこで,

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v})\left(\boldsymbol{\nabla}\hat{\boldsymbol{v}}_j^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v})\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_j\right\} \tag{6.5}$$

を得る．式 (6.2) に式 (6.4) と式 (6.5) を代入すれば，式 (6.1) の右辺第 2 項が計算される．同様に，式 (6.1) の右辺第 3 項は，右辺第 2 項の結果において $\boldsymbol{\varphi}_1$ と $\boldsymbol{\varphi}_2$ をいれかえたものとなる．式 (6.1) の右辺第 4 項は 0 となる．

形状最適化理論と製品設計への応用
└─ 線形弾性体の領域変動型形状最適化

以上の結果に加えて，自己随伴関係と

$$h_0(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2] = h_0(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_0)[\boldsymbol{\varphi}_2,\boldsymbol{\varphi}_1]$$

が成り立つことを用いれば，f_0 の形状 Hesse 形式は次のように得られる．

$$\begin{aligned} &h_0(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})[\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2] \\ &= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})}\Big[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})\left\{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}} + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1)\right\} \\ &\quad + \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\right)\cdot\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right\} \\ &\quad - 2\left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})\right)\cdot\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1) + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2)\right\}\Big]\,\mathrm{d}x \\ &\qquad \forall\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2\in X \end{aligned}$$

一方，$f_1(\phi)$ の形状 Hesse 形式は次のようになる．

$$h_1(\phi)[\varphi_1, \varphi_2] = \int_{\Omega(\phi)} \left\{ -\left(\nabla \varphi_2^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \nabla \varphi_1^{\mathrm{T}} + (\nabla \cdot \varphi_2)(\nabla \cdot \varphi_1) \right\} \mathrm{d}x \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in X$$

■ H^1 勾配法と H^1 Newton 法 [1, 9.8 節]

問題 6.3 (領域変動型 H^1 勾配法)

X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式 $a_X : X \times X \to \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{g}_i \in X'$ が与えられたとき，

$$\boxed{a_X(\varphi_{gi}, \psi) = -\langle \boldsymbol{g}_i, \psi \rangle \quad \forall \psi \in X}$$

を満たす $\varphi_{gi} \in X$ を求めよ．

例えば，

$$a_X(\varphi, \psi) = \int_{\Omega(\phi)} \left\{ \left(\nabla \varphi^{\mathrm{T}}\right) \cdot \left(\nabla \psi^{\mathrm{T}}\right) + c_\Omega \varphi \cdot \psi \right\} \mathrm{d}x$$

とおく．アルゴリズムは，図 2.6 が使われる．

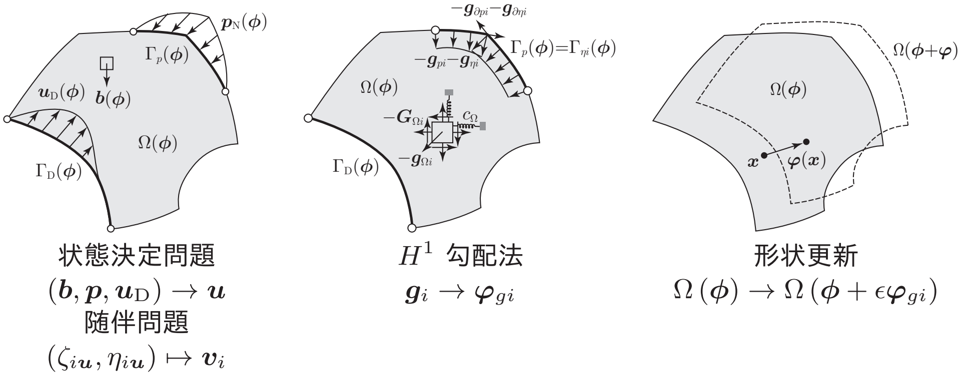


図 6.1: H^1 勾配法による形状更新

問題 6.4 (領域変動型 H^1 Newton 法)

試行点 $\boldsymbol{\phi}_k \in X$ において，$\boldsymbol{\lambda}_k \in \mathbb{R}^{|I_{\mathrm{A}}|}$ は KKT 条件を満たすとする．また，

$$h_{\mathscr{L}}(\boldsymbol{\phi}_k)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] = h_0(\boldsymbol{\phi}_k)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] + \sum_{i \in I_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{x}_k)} \lambda_{ik} h_i(\boldsymbol{\phi}_k)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2]$$

$$\forall \boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 \in X$$

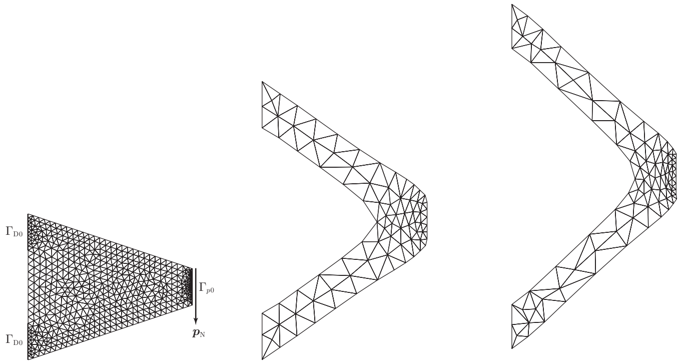
とおく．$a_X : X \times X \to \mathbb{R}$ を X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式とする．このとき，

$$\boxed{c_h h_{\mathscr{L}}(\boldsymbol{\phi}_k)[\boldsymbol{\varphi}_{gi}, \boldsymbol{\psi}] + c_a a_X(\boldsymbol{\varphi}_{gi}, \boldsymbol{\psi}) = -\langle g_i(\boldsymbol{\phi}_k), \boldsymbol{\psi}\rangle \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in X}$$

を満たす $\boldsymbol{\varphi}_{gi} \in X$ を求めよ．

図 2.7 のアルゴリズムが使われる．

■ 数値例



(a) 初期形状 (b) H^1 勾配法 (c) H^1 Newton 法

図 6.2: 2 次元線形弾性体に対する数値結果: 形状比較

形状最適化理論と製品設計への応用
└ 線形弾性体の領域変動型形状最適化

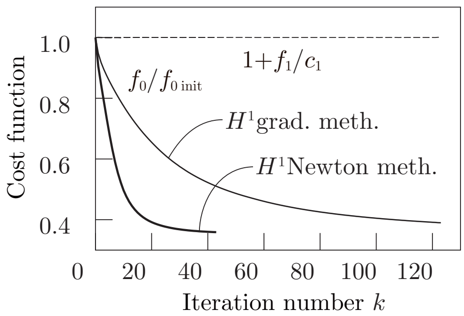


図 6.3: 2 次元線形弾性体に対する数値結果: 評価関数の履歴

§7 リンク機構の形状最適化 [3]

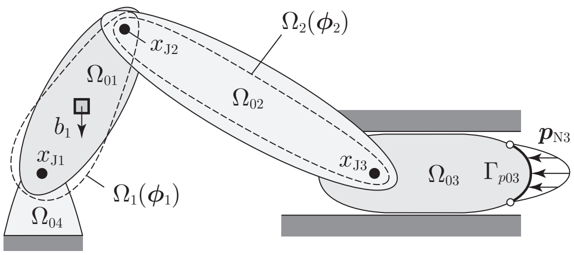


図 7.1: $t = 0$ におけるリンク結合された剛体の領域変動

形状最適化理論と製品設計への応用
└ リンク機構の形状最適化

■ 設計変数

- $\mathcal{L} = \{1, 2, \cdots, |\mathcal{L}|\}$: リンクに付けられた番号の集合
- $\Omega_{0l} \subset \mathbb{R}^d$: リンク $l \in \mathcal{L}$ の時刻 $t = 0$ のときの初期領域
- $\Omega_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \{\Omega_{0l}\}_{l \in \mathcal{L}}$, $\partial\Omega_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \{\partial\Omega_{0l}\}_{l \in \mathcal{L}}$
- $X = \left\{ \boldsymbol{\phi} \in H^1\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \bar{\Omega}_{\mathrm{C}0} \right\}$
- $\mathcal{D} = \left\{ \boldsymbol{\phi} \in X \cap W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \text{全単射の条件} \right\}$
- $\boldsymbol{\phi}_l \in \mathcal{D}$ に対して，$\Omega_l(\boldsymbol{\phi}_l) = \{(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\phi}_l)(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \Omega_{0l}\}$
- $\boldsymbol{\phi} \overset{\mathrm{def}}{=} \{\boldsymbol{\phi}_l\}_{i \in \mathcal{L}} \in \mathcal{D}^{|\mathcal{L}|}$, $\Omega(\boldsymbol{\phi}) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\Omega_l(\boldsymbol{\phi}_l)\}_{l \in \mathcal{L}}$

状態変数

- $\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}l} : (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}^d$: $\Omega_l(\phi)$ の重心の位置
- θ_l : $(0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}$: $\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}l}$ 周りの回転
- $\boldsymbol{q}_l(t) = \left((\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}l}(t) - \boldsymbol{x}_{\mathrm{G}l}(0))^{\mathrm{T}}, \theta_l(t) \right)^{\mathrm{T}} : (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}^{d_{\mathrm{F}}}$: $\Omega_l(\phi)$ の剛体運動 $(d_{\mathrm{F}} = 3)$
- $\boldsymbol{q} = \left(\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{q}_{|\mathcal{L}|}^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}} : (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}^{d_{\mathrm{F}}|\mathcal{L}|}$: 全体系の剛体運動

$$
\begin{aligned}
Q &= \left\{ \boldsymbol{q} \in H^1\left((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R}^{d_{\mathrm{F}}|\mathcal{L}|} \right) \;\middle|\; \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}(0) \\ \boldsymbol{q}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \right\}, \\
Q_0 &= \left\{ \boldsymbol{q} \in H^1\left((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R}^{d_{\mathrm{F}}|\mathcal{L}|} \right) \;\middle|\; \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}(0) \\ \boldsymbol{q}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_0 \end{pmatrix} \right\}, \\
Q_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) &= \left\{ \boldsymbol{r} \in H^1\left((0, t_{\mathrm{T}}); \mathbb{R}^{d_{\mathrm{F}}|\mathcal{L}|} \right) \;\middle|\; \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{r}}(t_{\mathrm{T}}) \\ \boldsymbol{r}(t_{\mathrm{T}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}(t_{\mathrm{T}}) \\ \boldsymbol{q}(t_{\mathrm{T}}) \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{q}_l, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{G}l}(t) - \boldsymbol{x}_{\mathrm{G}l}(0) + \theta_l(t)\, \boldsymbol{e}_3 \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{G}l}(0))$: $\boldsymbol{q}_l$ から $\Omega_l(\phi_l)$ 上の任意の点 $\boldsymbol{x}$ の変位
- $\tilde{\Omega}_l(\phi_l, \boldsymbol{q}_l) = \{ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{q}_l, \boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \Omega_l(\phi_l) \}$: 剛体運動する領域
- $\tilde{\Gamma}_{pl}(\boldsymbol{q}_l) = \left\{ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{q}_l, \boldsymbol{x}) \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_{0l} \cap \Gamma_{p0} \right\}$: 剛体運動する非同次 Neumann 境界

■ 運動制約

- $\mathcal{J} = \{1, 2, \cdots, |\mathcal{J}|\}$：リンク結合制約に付けられた番号の集合
- $i \in \mathcal{J}$ に対して，$\boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{q}_l, \boldsymbol{x}_{\mathrm{J}il}) - \boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{q}_m, \boldsymbol{x}_{\mathrm{J}im}) = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^2}$：リンク結合制約
- $\mathcal{T} = \{1, 2, \cdots, |\mathcal{T}|\}$：並進運動制約に付けられた番号の集合
- $i \in \mathcal{T}$ に対して，$u_{\mathrm{T}il}(\boldsymbol{q}_l, \boldsymbol{x}_{\mathrm{G}l}) = (\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}lj}(t) - \boldsymbol{x}_{\mathrm{G}lj}(0)) \cdot \boldsymbol{e}_{\mathrm{T}i} = 0$：並進運動制約
- $\mathcal{R} = \{1, 2, \cdots, |\mathcal{R}|\}$：回転運動制約に付けられた番号の集合
- $i \in \mathcal{R}$ に対して，$\theta_l(t) = 0$：回転運動制約
- $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^{|\mathcal{C}|}}$ ($\mathcal{C} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\{1, 2\} \times \mathcal{J}) \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{R}$)：すべての運動制約

■ 一般化質量と一般化外力

リンク機構の一般化質量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\phi}) = \mathrm{diag}\big(&m_1(\phi_1), m_1(\phi_1), j_{\mathrm{G}1}(\phi_1), \\ &\ldots, m_{|\mathcal{L}|}(\phi_{|\mathcal{L}|}), m_{|\mathcal{L}|}(\phi_{|\mathcal{L}|}), j_{\mathrm{G}|\mathcal{L}|}(\phi_{|\mathcal{L}|})\big)\end{aligned}$$

ただし，

$$m_l(\phi_l) = \int_{\Omega_l(\phi_l)} \rho_l \, \mathrm{d}x,$$

$$j_{\mathrm{G}l}(\phi_l) = \int_{\Omega_l(\phi_l)} \rho_l \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{G}l}(0)\|^2_{\mathbb{R}^d} \, \mathrm{d}x$$

リンク $l \in \mathcal{L}$ に作用する体積力 $\boldsymbol{b}_l \in L^2\left((0,t_{\mathrm{T}});L^\infty\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)$ と非零の境界力 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}l} \in L^2\left((0,t_{\mathrm{T}});L^\infty\left(\Gamma_{p0l};\mathbb{R}^d\right)\right)$ に対する一般化外力

$$\boldsymbol{s}_l = \left(\boldsymbol{s}_{\mathrm{F}l}^{\mathrm{T}}, s_{\mathrm{M}l}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{d_{\mathrm{F}}}$$

ただし，

$$\boldsymbol{s}_{\mathrm{F}l} = \int_{\Omega_l(\boldsymbol{\phi}_l)} \boldsymbol{b}_l(t)\ \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{p0l}} \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}l}(t)\ \mathrm{d}\gamma,$$

$$s_{\mathrm{M}l}\boldsymbol{e}_3 = \int_{\Omega_l(\boldsymbol{\phi}_l)} \boldsymbol{b}_l(t) \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{G}l}(t))\ \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{p0l}} \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}l}(t) \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{G}l}(t))\ \mathrm{d}\gamma$$

全体系の一般化力

$$\boldsymbol{s} = \left(\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{s}_{|\mathcal{L}|}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$$

■ 状態決定問題

問題 7.1 (リンク運動)

$\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}^{|\mathcal{L}|}$ は与えられたとする．また，$\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{q}_1 \in \mathbb{R}^{d_{\mathrm{F}}|\mathcal{L}|}$ が与えられたとして，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}'(\boldsymbol{q}_0)[\boldsymbol{q}_1] \\ \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{q}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

を満たすとする．さらに，$\operatorname{rank} \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{q}_0) = |\mathcal{C}|$ とする．このとき，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\phi}) & \left(\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{q})\right)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{q}) & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}} \\ -\boldsymbol{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ -\boldsymbol{\psi}''(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}] \end{pmatrix} \quad \text{in } (0, t_{\mathrm{T}}),$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}(0) \\ \boldsymbol{q}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_0 \end{pmatrix}$$

を満たす $\left(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} : (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}^{d_{\mathrm{F}}|\mathcal{L}| + |\mathcal{C}|}$ を求めよ．

問題 7.1 において，$\boldsymbol{\mu}$ は，運動制約に対する Lagrange 乗数で，運動制約を満たすために作用した制約力を表す．そこで，$\boldsymbol{\mu}$ の要素を

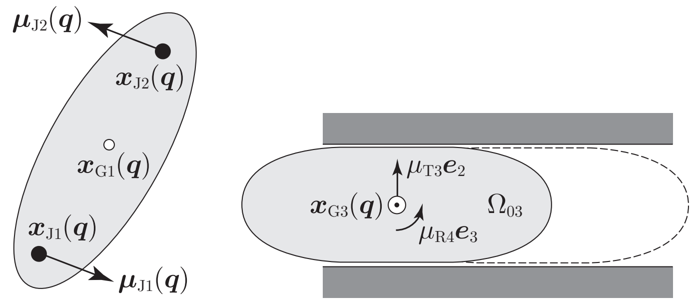
$$\boldsymbol{\mu} = \left(\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{J}1}^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{J}|\mathcal{J}|}^{\mathrm{T}}, \mu_{\mathrm{T}1}^{\mathrm{T}}, \ldots, \mu_{\mathrm{T}|\mathcal{T}|}^{\mathrm{T}}, \mu_{\mathrm{R}1}^{\mathrm{T}}, \ldots, \mu_{\mathrm{R}|\mathcal{R}|}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \in E$$

とかくことにする．ここで，次のようにおく．

$$E = L^2\left((0, t_{\mathrm{T}}) ; \mathbb{R}^{|\mathcal{C}|}\right)$$

■ 制約力と制約モーメント

- リンク結合力：$\boldsymbol{x}_{\mathrm{J}i} \in \Omega_l(\boldsymbol{\phi})$ において $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{J}i} : (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}^2$，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{J}i} \in \Omega_m(\boldsymbol{\phi})$ において $-\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{J}i}(0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}^2$ (図 7.2 (a))
- 並進運動制約に対する制約力：$\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}l} \in \Omega_l(\boldsymbol{\phi})$ において $\mu_{\mathrm{T}i}\boldsymbol{e}_j$ (図 7.2 (b))
- 回転運動制約に対する制約モーメント：$\mu_{\mathrm{R}i}\boldsymbol{e}_3$ on $\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}l} \in \Omega_l(\boldsymbol{\phi})$ (図 7.2 (b))



(a) リンク結合力　(b) 並進制約力と回転制約モーメント

図 7.2: 運動制約に対する制約力

問題 7.1 の Lagrange 関数は，$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{r},\boldsymbol{\eta}) \in Q_0 \times E \times Q_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) \times E$ に対して

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{q},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{r},\boldsymbol{\eta})\\
&\quad = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} \Big(-\ddot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\phi})\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{r}} + \ddot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{q})\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\psi}''(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{q}}]\cdot\boldsymbol{\eta}\\
&\qquad + \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \ddot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{q})\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\psi}''(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{r}},\dot{\boldsymbol{r}}]\cdot\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{s}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \Big)\mathrm{d}t\\
&\qquad + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}(t_{\mathrm{T}})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\phi})\dot{\boldsymbol{q}}(t_{\mathrm{T}})
\end{aligned} \tag{7.1}$$

とおく．また，次のようにかく．

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\mathrm{S}\boldsymbol{r},\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{q},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{r},\boldsymbol{\eta})[\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{\eta}}]\\
&\quad = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} \Big(-\ddot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\phi})\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} + \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{q})\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} + \ddot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{q})\right)^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\psi}''(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{q}}]\cdot\hat{\boldsymbol{\eta}}\\
&\qquad + \hat{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \ddot{\hat{\boldsymbol{r}}}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{q})\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\psi}''(\boldsymbol{q})\left[\dot{\hat{\boldsymbol{r}}},\dot{\hat{\boldsymbol{r}}}\right]\cdot\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{s}\cdot\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} \Big)\mathrm{d}t\\
&\qquad\qquad \forall(\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{\eta}}) \in Q_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{0})
\end{aligned}$$

問題 7.2 (リンク運動の弱形式)

問題 7.1 の仮定が成り立つとき，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{S}\mathrm{r},\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{r},\boldsymbol{\eta})[\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{\eta}}] = 0 \quad \forall(\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{\eta}}) \in Q_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{0}) \times E$$

を満たす $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\mu}) \in Q_0 \times E$ を求めよ．

■ 形状最適化問題

$$f_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\mu}) = -\int_0^{t_{\mathrm{T}}} \boldsymbol{s} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \, \mathrm{d}t,$$

$$f_1(\boldsymbol{\phi}) = c_1 - \sum_{i \in \mathcal{L}} \int_{\Omega_l(\boldsymbol{\phi}_l)} \mathrm{d}x$$

問題 7.3 (体積制約つき外力仕事最大化問題)

次を満たす $\Omega(\boldsymbol{\phi})$ を求めよ.

$$\min_{(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{D}^{|\mathcal{L}|} \times Q_0 \times E} \{ f_0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\mu}) \mid f_1(\boldsymbol{\phi}) \le 0,\ \text{問題 7.2} \}$$

■ 形状微分

$$\tilde{f}_0'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] = \sum_{l \in \mathcal{L}} \int_{\Omega_l(\boldsymbol{\phi}_l)} g_{\boldsymbol{M}0l} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi}_l \, \mathrm{d}x = \sum_{l \in \mathcal{L}} \langle \boldsymbol{g}_{0l}, \boldsymbol{\varphi}_l \rangle = \langle \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{\varphi} \rangle$$

あるいは,

$$\tilde{f}_0'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] = \sum_{l \in \mathcal{L}} \int_{\partial\Omega_l(\boldsymbol{\phi}_l)} g_{\boldsymbol{M}0l} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi}_l \, \mathrm{d}\gamma = \sum_{l \in \mathcal{L}} \langle \bar{\boldsymbol{g}}_{0l}, \boldsymbol{\varphi}_l \rangle = \langle \bar{\boldsymbol{g}}_0, \boldsymbol{\varphi} \rangle$$

ただし,

$$g_{\boldsymbol{M}0l} = -\int_0^{t_{\mathrm{T}}} \rho_l \boldsymbol{u}_l(\ddot{\boldsymbol{q}}_l) \cdot \boldsymbol{u}_l(\dot{\boldsymbol{r}}_{0l}) \, \mathrm{d}t$$

■ 数値例

外力 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{N3}} = (-0.2, 0)^{\mathrm{T}}\ \mathrm{N/mm}$，初期姿勢 $\theta_1(0) = 60°$，$\theta_2(0) = 150°$，初期角速度 $0.2618 \mathrm{rad/s}$，終端時刻 $\theta_1(t_{\mathrm{T}}) = 73°$ (初期形状のとき)

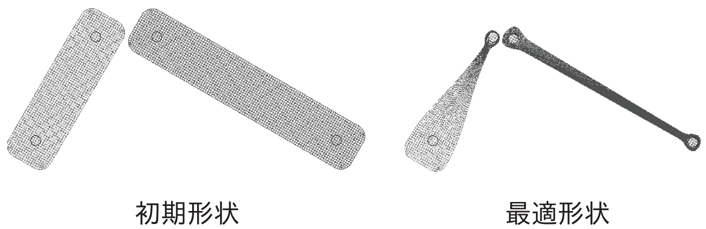


図 7.3: 形状比較

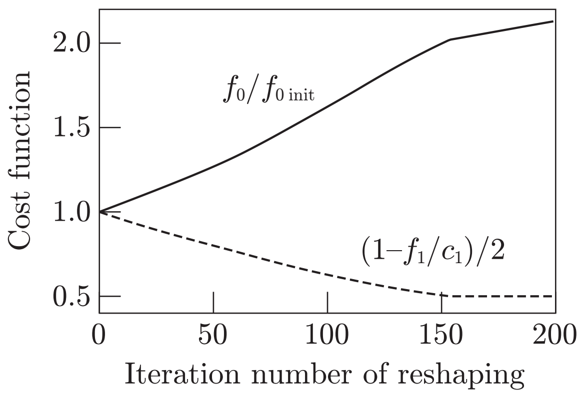


図 7.4: 形状修正に対する評価関数の履歴

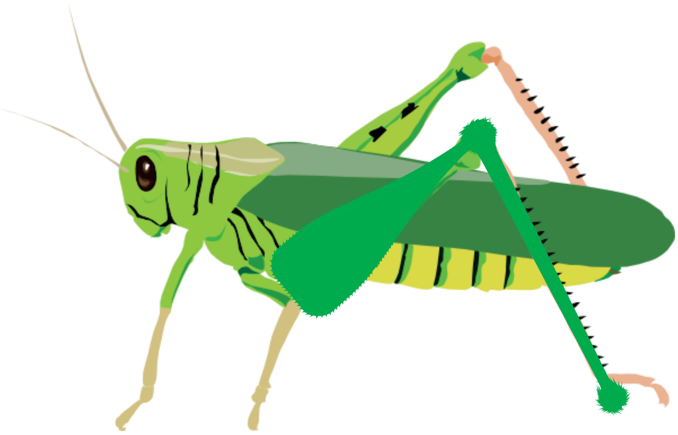


図 7.5: バッタの足（？）

§8　ブレーキ鳴き現象に対する形状最適化 [4]

ブレーキ鳴きは，ロータとパッド間の摩擦による自励振動現象である．特に，複素固有値の実部が正となる固有振動と考えられてきた．

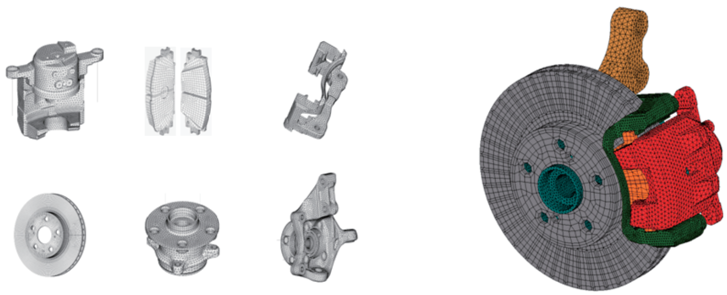
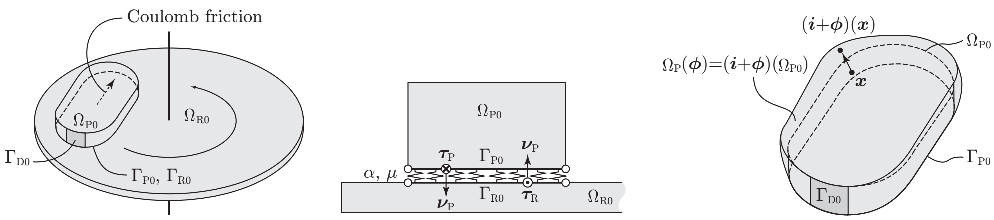


図 8.1: 車両のブレーキ部品



(a) ディスクとパッド　(b) Coulomb 摩擦　(c) パッドの領域変動

図 8.2: ブレーキモデル

■ 状態決定問題

固有振動モード (変位) $\hat{\boldsymbol{u}}$ の Fourier 変換のための線形空間と許容集合

$$U = \left\{ \hat{\boldsymbol{u}} \in H^1\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d\right) \;\middle|\; \hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{C}^d} \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D0}} \right\},$$
$$\mathcal{S} = U \cap W^{2,2q_{\mathrm{R}}}\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d\right)$$

問題 8.1 (固有振動)

$\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}$ が与えられたとき，$k \in \{1, 2, \cdots\}$ に対して，次を満たす $(s_k, \hat{\boldsymbol{u}}_k) = (s_k, \hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{R}}, \hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{P}}) \in \mathbb{C} \times \mathcal{S}$ を求めよ．

$$
\begin{aligned}
& s_k^2 \rho_{\mathrm{R}} \hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{R}} - \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S}\left(\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{R}}\right)\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{in } \Omega_{\mathrm{R0}}, \\
& s^2 \rho_{\mathrm{P}} \hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{P}} - \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S}\left(\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{P}}\right)\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{in } \Omega_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\phi}), \\
& \boldsymbol{S}\left(\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{R}}\right) \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \left(\partial\Omega_{\mathrm{R0}} \setminus \bar{\Gamma}_{\mathrm{R0}}\right), \\
& \boldsymbol{S}\left(\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{P}}\right) \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{P}} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \left(\partial\Omega_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\phi}) \setminus \bar{\Gamma}_{\mathrm{P0}}\right), \\
& \boldsymbol{S}\left(\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{R}}\right) \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{R}} = \operatorname{Re}\left[\alpha \left\{\left(\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{R}} - \hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{P}}\right) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{R}}\right\} \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{R}}\right] \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{R0}}, \\
& \boldsymbol{S}\left(\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{R}}\right) \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} = \operatorname{Re}\left[\mu \alpha \left\{\left(\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{R}} - \hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{P}}\right) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{R}}\right\} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}}\right] \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{R0}}, \\
& \boldsymbol{S}\left(\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{P}}\right) \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{P}} = \alpha \left\{\left(\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{P}} - \hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{R}}\right) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{P}}\right\} \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{P}} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{P0}}, \\
& \boldsymbol{S}\left(\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{P}}\right) \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{P}} = -\mu \alpha \left\{\left(\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{P}} - \hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{R}}\right) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{P}}\right\} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{P}} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{P0}} \\
& \hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{R}} = \hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{P}} \quad \text{on } \left(\Gamma_{\mathrm{R0}} \cup \Gamma_{\mathrm{P0}}\right), \quad \hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D0}}.
\end{aligned}
$$

■ 形状最適化問題

モード次数 k は与えられると仮定する．評価関数を次のように定義する．

$$f_0(\phi, s_k) = 2\mathrm{Re}[s_k] = s_k + s_k^{\mathrm{c}},$$
$$f_1(\phi) = -\int_{\Omega_{\mathrm{P}}(\phi)} \mathrm{d}x + c_1.$$

問題 8.2 (体積制約つき複素固有値実部最小化問題)

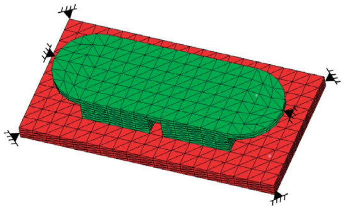
次を満たす $\Omega_{\mathrm{P}}(\phi)$ を求めよ．

$$\min_{(\phi,\boldsymbol{\phi},s_k)\in\mathcal{D}\times\mathbb{C}\times\mathcal{S}} \{ f_0(\phi, s_k) \mid f_1(\phi) \le 0,\ \text{問題 8.1}\}$$

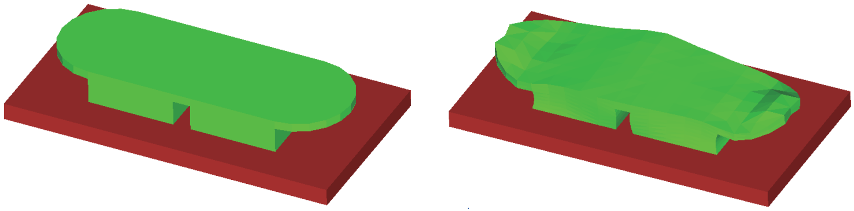
■ 数値例

表 8.1: 複素固有値の変化

初期形状			最適形状		
k	Re	Im	k	Re	Im
1	-1.692E+01	8.022947E+03	1	-1.647E+01	7.745197E+03
2	-1.444E+01	9.438261E+03	2	-1.765E+01	1.027973E+04
3	8.613E+00	1.249724E+04	3	-1.163E+01	1.110440E+04
4	-2.944E+01	1.437360E+04	4	-3.048E+01	1.503565E+04
5	-5.783E+01	1.629984E+04	5	-4.185E+01	2.092213E+04
6	-5.356E+01	2.168113E+04	6	-5.070E+01	2.186379E+04
7	-5.195E+01	2.394771E+04	7	-6.588E+01	2.671747E+04
8	-6.593E+01	2.573753E+04	8	-7.522E+01	2.756015E+04
9	-6.325E+01	2.711726E+04	9	-7.540E+01	3.137934E+04
10	-6.896E+01	2.893466E+04	10	-7.658E+01	3.320161E+04



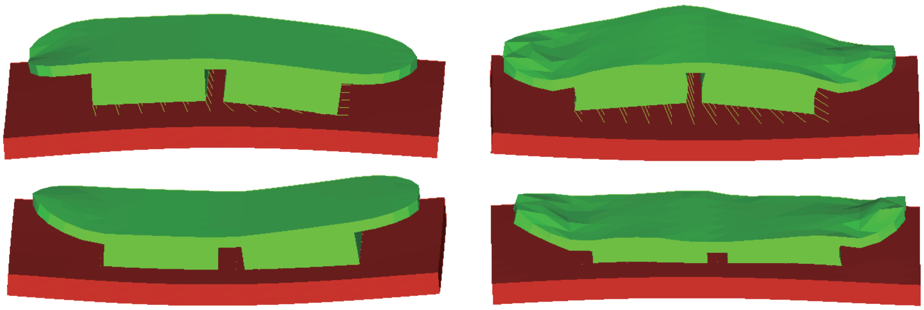
(a) 有限要素モデル



(a) 初期形状　(b) 最適形状

図 8.3: 形状比較

形状最適化理論と製品設計への応用
└ ブレーキ鳴き現象に対する形状最適化



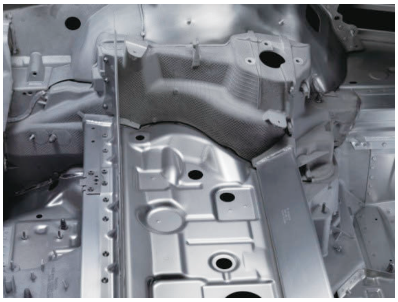
(a) 初期形状　(b) 最適形状

図 8.4: 3 次固有振動モードの比較

§9　シェル構造におけるビードの設計法 [5]

シェル構造に設けられた小さな高さの凸凹はビードとよばれる．

(a) 自動車のホワイトボディ



(b) ビード構造

図 9.1: ビード付きのシェルモデル

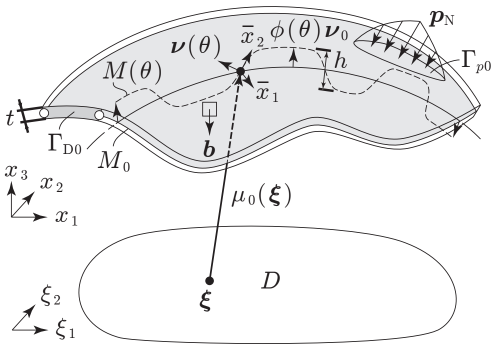


図 9.2: ビード付きのシェルモデル

■ 状態決定問題

初期のシェルに対する中立面と領域

$$M_0 = \left\{ \boldsymbol{\mu}_0 (\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{\xi} \in D \right\},$$
$$\Omega_0 = \left\{ \boldsymbol{x} + \xi_3 \boldsymbol{\nu}_0 (\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in M_0,\ \xi_3 \in (-t/2, t/2) \right\}$$

設計変数 $\theta : D \to \mathbb{R}$ に対して，ビードの高さを次のようにおく．

$$\phi (\theta) = \frac{h}{\pi} \tan^{-1} \theta + \frac{h}{2}$$

変動後の中立面と領域

$$M (\theta) = \left\{ (\boldsymbol{\mu}_0 + \phi (\theta) \boldsymbol{\nu}_0 \circ \boldsymbol{\mu}_0) (\boldsymbol{\xi}) \;\middle|\; \boldsymbol{\xi} \in D \right\}$$
$$\Omega (\theta) = \left\{ \boldsymbol{x} + \xi_3 \boldsymbol{\nu} (\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in M (\theta),\ \xi_3 \in (-t/2, t/2) \right\}.$$

形状最適化理論と製品設計への応用
└シェル構造におけるビードの設計法

設計変数 θ の線形空間と許容集合

$$X (\theta) = \left\{ \theta \in H^1 (D; \mathbb{R}) \;\middle|\; \theta = 0 \text{ on } \bar{D}_{\mathrm{C0}} \right\},$$
$$\mathcal{D} = X \cup W^{1,\infty} (D; \mathbb{R})$$

状態決定問題の解 (状態変数) $\hat{\boldsymbol{u}}$ の線形空間と許容集合

$$U = \left\{ \hat{\boldsymbol{u}} \in H^1 \left(M (\theta) ; \mathbb{R}^5 \right) \;\middle|\; \hat{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^5} \text{ on } \Gamma_{\mathrm{D}} (\theta) \right\}$$
$$\mathcal{S} = U \cap W^{2,2q_{\mathrm{R}}} \left(\Omega (\theta) ; \mathbb{R}^5 \right)$$

問題 9.1 (Mindlin-Reissner の板理論による線形弾性問題)

$\theta \in \mathcal{D}$ に対して，次を満たす $\hat{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{S}$ を求めよ．

$$\left.\begin{aligned} -\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{M}}(\hat{\boldsymbol{u}}) &= \bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{M}} \cdot \boldsymbol{m}(\hat{\boldsymbol{u}}) &= \bar{p}_{\mathrm{N}3} \\ -\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{m}(\hat{\boldsymbol{u}}) &= \bar{\boldsymbol{m}}^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \quad \text{in } M(\theta),$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{M}}(\hat{\boldsymbol{u}}) \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{M}} &= \bar{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{N}} \\ \boldsymbol{m}(\hat{\boldsymbol{u}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{M}} &= \bar{p}_{\mathrm{N}3} \\ \boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{u}}) \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{M}} &= \bar{\boldsymbol{m}}^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \quad \text{on } \Gamma_p(\theta) \cap \partial M(\theta),$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{M}}(\hat{\boldsymbol{u}}) \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{M}} &= \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^2} \\ \boldsymbol{m}(\hat{\boldsymbol{u}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{M}} &= 0 \\ \boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{u}}) \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{M}} &= \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{on } \left(\Gamma_{\mathrm{N}}(\theta) \setminus \bar{\Gamma}_p(\theta)\right) \cap \partial M(\theta),$$

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^5} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}}(\theta).$$

■ 形状最適化問題

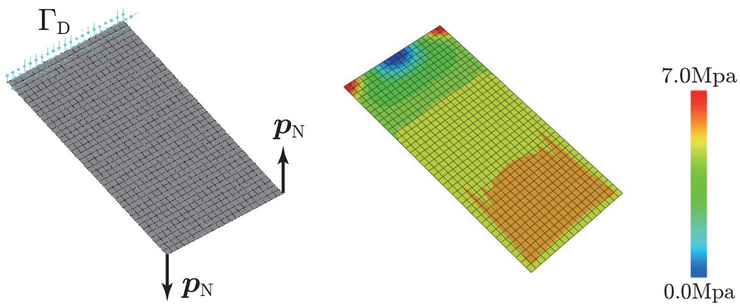
$$\begin{aligned} f(\theta, \hat{\boldsymbol{u}}) = &\int_{M(\theta)} \left(\bar{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{M}} + \bar{p}_{\mathrm{N}3} z - \bar{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{r}\right) \mathrm{d}x \\ &+ \int_{\Gamma_p(\theta) \cap \partial M(\theta)} \left(\bar{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{M}} + \bar{p}_{\mathrm{N}3} z - \bar{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{r}\right) \mathrm{d}\gamma \end{aligned}$$

問題 9.2 (平均コンプライアンス最小化問題)

次を満たす θ を求めよ．

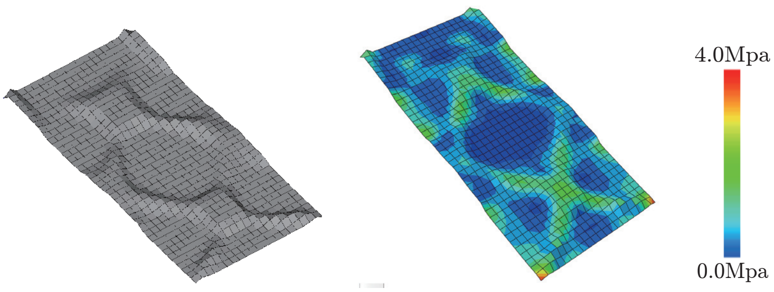
$$\min_{(\theta, \hat{\boldsymbol{u}}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}} \{ f(\theta, \hat{\boldsymbol{u}}) \mid \text{問題 } 9.1 \}$$

■ 数値例



(a) 境界条件　　(b) Mises 応力

図 9.3: ねじり荷重をうける片持ちシェルの初期形状



(a) 最適形状　　(b) Mises 応力

図 9.4: ねじり荷重をうける片持ちシェルの最適形状

§10 流れ場の安定性向上のための形状最適化問題 [6]

断面積が階段状に変化する Poiseuille 流れ場において，定常流から非定常流に推移する臨界 Reynolds 数 $\mathrm{Re_c}$ は 40 あたりであると報告されている．

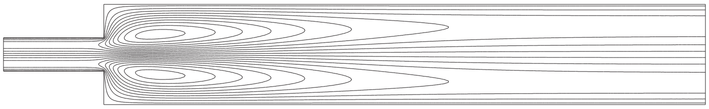


図 10.1: 段付き Poiseuille 流れ場

■ 状態決定問題

定常流の流速と圧力の線形空間と許容集合

$$
\begin{aligned}
&U = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \partial\Omega\left(\boldsymbol{\phi}\right) \right\},\\
&U\left(\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\right) = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right) \;\middle|\; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \text{ on } \partial\Omega\left(\boldsymbol{\phi}\right) \right\},\\
&\mathcal{S} = U \cap W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right),\\
&\mathcal{S}\left(\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\right) = U\left(\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}\right) \cap W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right),\\
&P = \left\{ q \in L^2\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right) \;\middle|\; \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} q \,\mathrm{d}x = 0 \right\},\\
&\mathcal{Q} = P \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)
\end{aligned}
$$

問題 10.1 (定常 Navier-Stokes 問題)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}$, μ および ρ が与えられたとき,

$$\rho (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} \left(\mu \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\right) + \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} p = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \quad \text{in } \Omega (\phi),$$
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in } \Omega (\phi),$$
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \quad \text{on } \partial\Omega (\phi),$$
$$\int_{\Omega(\phi)} p \,\mathrm{d}x = 0$$

を満たす $(\boldsymbol{u}, p) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}) \times \mathcal{Q}$ を求めよ.

さらに, $\boldsymbol{u}$ と p のかく乱を $\boldsymbol{x} \in \Omega(\phi)$ と $\tau \in [0, \infty)$ に対して,

$$\boldsymbol{u}(\tau, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(0, \boldsymbol{x}) + \mathrm{e}^{s\tau} \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) + \mathrm{e}^{s^{\mathrm{c}}\tau} \hat{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(0, \boldsymbol{x}) + 2\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{s\tau} \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})\right],$$
$$p(\tau, \boldsymbol{x}) = p(0, \boldsymbol{x}) + 2\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{s\tau} \hat{p}(\boldsymbol{x})\right]$$

と仮定する. ただし, $s \in \mathbb{C}$, $(\cdot)^{\mathrm{c}}$ は複素共役を表す. $\hat{\boldsymbol{u}}$ と $\hat{p}$ に対する線形空間と許容集合を次のようにおく.

$$\hat{U} = \left\{\hat{\boldsymbol{u}} \in H^1\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d\right) \;\middle|\; \hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \partial\Omega(\phi)\right\},$$
$$\hat{\mathcal{S}} = \hat{U} \cap W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d\right),$$
$$\hat{P} = \left\{\hat{q} \in L^2\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}\right) \;\middle|\; \int_{\Omega(\phi)} \hat{q} \,\mathrm{d}x = 0\right\},$$
$$\hat{\mathcal{Q}} = \hat{P} \cap L^{\infty}\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}\right)$$

問題 10.2 (かく乱固有値問題)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して $(\boldsymbol{u}, p)$ が与えられたとき，$i \in \{1, 2, \cdots\}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\rho s \hat{\boldsymbol{u}}_i^{\mathrm{T}} + \rho \left(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \hat{\boldsymbol{u}}_r^{\mathrm{T}} + \rho \left(\hat{\boldsymbol{u}}_i \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \\
&\qquad - \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} \left(\mu \boldsymbol{\nabla} \hat{\boldsymbol{u}}_i^{\mathrm{T}} \right) + \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} \hat{p} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d}^{\mathrm{T}} \quad \text{in } \Omega(\phi), \\
&\boldsymbol{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_i = 0 \quad \text{in } \Omega(\phi), \\
&\hat{\boldsymbol{u}}_i = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \partial\Omega(\phi), \\
&\int_{\Omega(\phi)} \hat{p} \, \mathrm{d}x = 0, \\
&\int_{\Omega(\phi)} \rho \hat{\boldsymbol{u}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_i^{\mathrm{c}} \, \mathrm{d}x = 1
\end{aligned}$$

を満たす $s_i \in \mathbb{C}$ と $(\hat{\boldsymbol{u}}_i, \hat{p}_i) \in \hat{\mathcal{S}} \times \hat{\mathcal{Q}}$ を求めよ．

■ 形状最適化問題

評価関数をかく乱固有値実部

$$f_0(s_r) = s_r + s_r^{\mathrm{c}} = 2\mathrm{Re}[s_r]$$

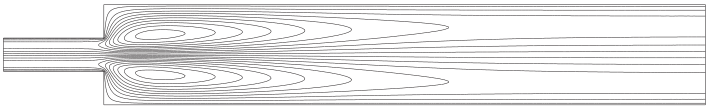
とおく．ただし，r は $\mathrm{Re}[s_i]$ が最大となるモード次数とする．

問題 10.3 (かく乱固有値実部の最小化問題)

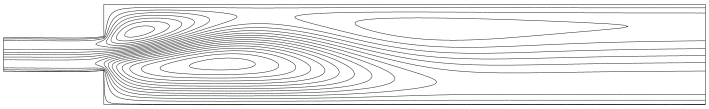
次を満たす $\Omega(\phi)$ を求めよ．

$$\min_{(\phi, \tilde{\boldsymbol{u}}, p, s_r, \hat{\boldsymbol{u}}_r, \hat{p}_r) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Q} \times \mathbb{C} \times \hat{\mathcal{S}} \times \hat{\mathcal{Q}}} \left\{ f_0(s_r) \;\middle|\; \text{問題 10.1, 問題 10.2} \right\}$$

■ 数値例



(a) 初期形状



(b) 最適形状

図 10.2: 段付き Poiseuille 流れ場 (初期領域において $\mathrm{Re} = 45$)

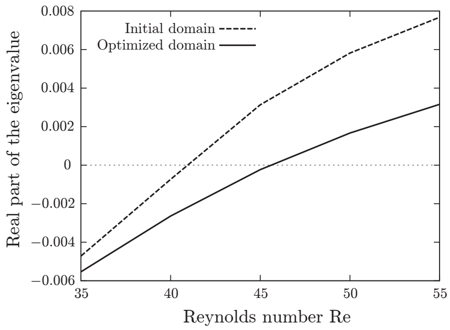


図 10.3: Reynolds 数に対する固有値の実部最大値の推移

§11　静電容量式センサの形状最適化問題 [7]

静電容量式センサは指の検出などに使われる．

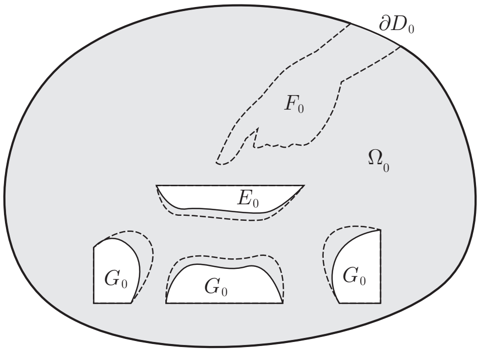


図 11.1: 初期静電場 $\Omega_0 = D_0 \setminus \left(\bar{E}_0 \cup \bar{G}_0\right)$

■ 状態決定問題

設計変数 ϕ の線形空間と許容集合

$$X = \left\{ \boldsymbol{\phi} \in H^1\left(D_0; \mathbb{R}^d\right) \,\middle|\, \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \partial D_0 \cup \partial F_0 \cup \partial G_0 \cup \Gamma_{\mathrm{C}0} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{C}0} \right\},$$
$$\mathcal{D} = \left\{ \boldsymbol{\phi} \in X \cap W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right) \,\middle|\, \text{全単射の条件} \right\}.$$

静電ポテンシャルの線形空間と許容集合

$$U = \left\{ u \in H^1(D_0; \mathbb{R}) \,\middle|\, u = 0 \text{ on } \partial E(\boldsymbol{\phi}) \cup \partial G(\boldsymbol{\phi}) \right\},$$
$$U(u_{\mathrm{D}}) = \left\{ u \in H^1(D_0; \mathbb{R}) \,\middle|\, u = u_{\mathrm{D}} \text{ on } \partial E(\boldsymbol{\phi}) \cup \partial G(\boldsymbol{\phi}) \right\},$$
$$\mathcal{S} = U \cap W^{1,\infty}(D_0; \mathbb{R}),$$
$$\mathcal{S}(u_{\mathrm{D}}) = U(u_{\mathrm{D}}) \cap W^{1,\infty}(D_0; \mathbb{R}),$$

とおく．ただし，$u_{\mathrm{D}} \in H^1(D_0; \mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(D_0; \mathbb{R})$ は $\partial E(\boldsymbol{\phi})$ 上で $u = \alpha$，$\partial G(\boldsymbol{\phi})$ 上で $u = 0$ を満たす関数とする．

問題 11.1 (基本静電場)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して，正定数 α が与えられたとき，

$$
\begin{aligned}
&-\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{e}(u) = 0 \quad \text{in } \Omega(\phi) = D_0 \setminus (E(\phi) \cup G(\phi)), \\
&\partial_\nu u = 0 \quad \text{on } \partial D_0(\phi), \\
&u = \alpha \quad \text{on } \partial E(\phi), \\
&u = 0 \quad \text{on } \partial G(\phi)
\end{aligned}
$$

を満たす, $u \in \mathcal{S}(u_{\mathrm{D}})$ を求めよ．

問題 11.2 (検出体がある静電場)

$\phi \in \mathcal{D}$ と正定数 α が与えられたとき，

$$
\begin{aligned}
&-\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{e}(u_{\mathrm{F}}) = 0 \quad \text{in } \Omega(\phi) \setminus F_0 = D_0 \setminus (E(\phi) \cup G(\phi) \cup F_0), \\
&\partial_\nu u_{\mathrm{F}} = 0 \quad \text{on } \partial D_0(\phi), \\
&u_{\mathrm{F}} = \alpha \quad \text{on } \partial E(\phi), \\
&u_{\mathrm{F}} = 0 \quad \text{on } \partial G(\phi) \cup \bar{F}_0
\end{aligned}
$$

を満たす $u_{\mathrm{F}} \in \mathcal{S}(u_{\mathrm{D}})$ を求めよ．

■ 形状最適化問題

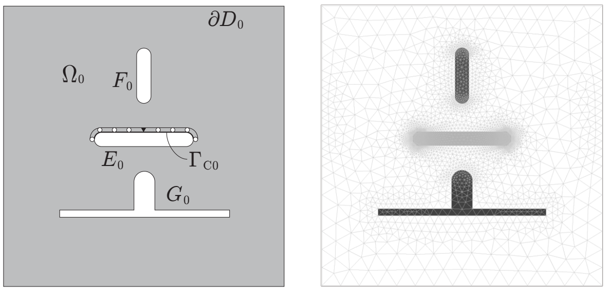
$$
\begin{aligned}
f_0(\boldsymbol{\phi}, u, u_{\mathrm{F}}) &= -\left\| u - u_{\mathrm{F}} \right\|^2_{H^1(\Omega(\boldsymbol{\phi}) \setminus F_0(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R})} \\
&= -\int_{\Omega(\boldsymbol{\phi}) \setminus F_0} \left\{ (u - u_{\mathrm{F}})^2 + (\boldsymbol{e}(u) - \boldsymbol{e}(u_{\mathrm{F}})) \cdot (\boldsymbol{e}(u) - \boldsymbol{e}(u_{\mathrm{F}})) \right\} \mathrm{d}x, \\
f_1(\boldsymbol{\phi}) &= \int_{E(\boldsymbol{\phi})} \mathrm{d}x - s_1
\end{aligned}
$$

問題 11.3 (体積制約つき静電場間の誤差ノルム最小化問題)

次を満たす $\Omega(\boldsymbol{\phi})$ を求めよ．

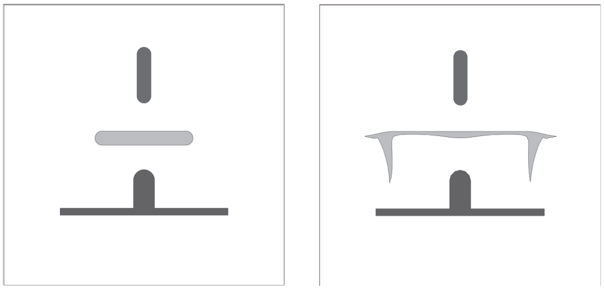
$$
\min_{(\boldsymbol{\phi}, u, u_{\mathrm{F}}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}(u_{\mathrm{D}}) \times \mathcal{S}(u_{\mathrm{D}})} \left\{ f_0(\boldsymbol{\phi}, u, u_{\mathrm{F}}) \mid f_1(\boldsymbol{\phi}) \leq 0, \text{ 問題 11.1, 問題 11.2} \right\}
$$

■ 数値例



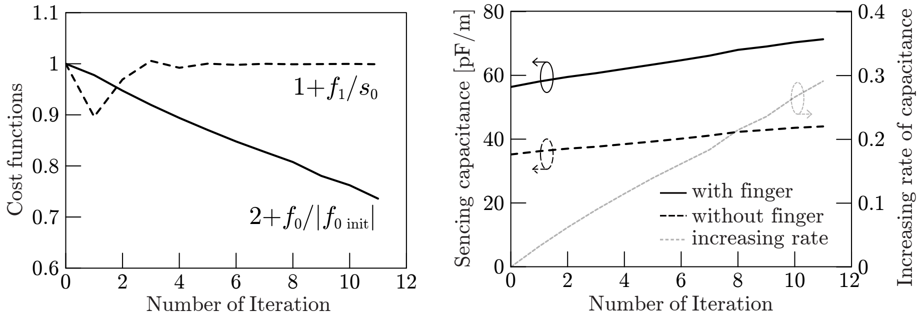
(a) 問題設定　(b) 有限要素モデル

図 11.2: 突き出た接地電極のある 2 次元静電場



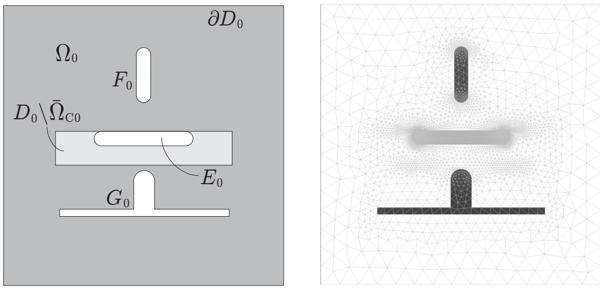
(a) 初期　(b) 最適化後 (未収束)

図 11.3: 領域変動前後の形状



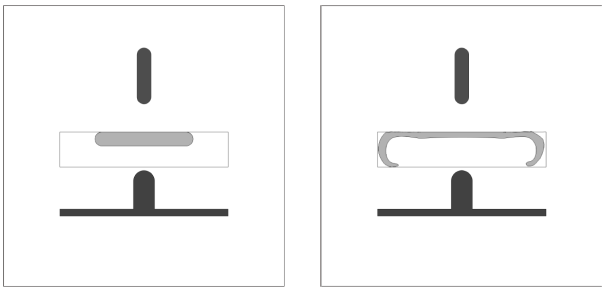
(a) 評価関数　(b) 性能

図 11.4: 形状変動に対する繰返履歴



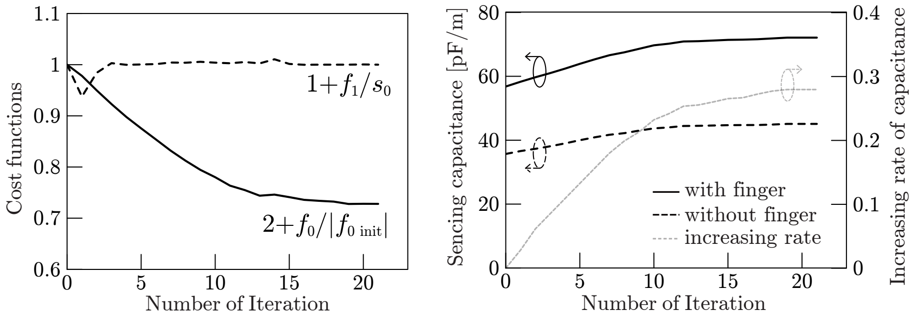
(a) 問題設定　(b) 有限要素モデル

図 11.5: 突き出た接地電極のある 2 次元静電場 $(E(\phi) \subset D_0 \setminus \bar{\Omega}_{C0})$



(a) 初期　(b) 最適化後 (収束)

図 11.6: 領域変動前後の形状 $(E(\phi) \subset D_0 \setminus \bar{\Omega}_{C0})$



(a) 評価関数　　(b) 性能

図 11.7: 形状変動に対する繰返履歴 ($E(\phi) \subset D_0 \setminus \bar{\Omega}_{C0}$)

12 FreeFEM++を用いた実習

1. H^1 勾配法 / H^1 Newton 法
   2 次元線形弾性体 (平均コンプライアンス最小化問題, hook):
   `9.11.5_shape_elastic/2d-hook/domain_integral/grad/`
   `9.11.5_shape_elastic/2d-hook/domain_integral/Newton/`
2. 有限要素の次数: 1 次要素 / 2 次要素
   3 次元線形弾性体 (平均コンプライアンス最小化問題, cantilever):
   `9.11.5_shape_elastic/3d-cantilever/boundary_integral/grad/`
   main.edp ファイルをテキストエディタで開き,
   fespace Vh(Th,[P2,P2,P2]);//Finite element space を
   fespace Vh(Th,[P1,P1,P1]);//Finite element space に変更する.
3. 特異点の挙動: 境界積分型形状微分 / 領域積分型形状微分
   2 次元線形弾性体 (平均コンプライアンス最小化問題, L-shape):
   `9.11.5_shape_elastic/2d-L-shape/boundary_integral/grad/`
   `9.11.5_shape_elastic/2d-L-shape/domain_integral/grad/`

13 まとめ

1. 最適設計問題は，状態決定問題が等式制約として加わった不等式つき非線形最適化問題のクラスとみなすことができる．その解法は勾配法や Newton 法に基づいて構成される．
2. 連続体の形状最適化問題への拡張は関数解析によって実現される．
3. 製品設計に役立つような問題を適切に構成できれば，それらを解くことは可能となっている．

参考文献

[1] 畔上 秀幸.
形状最適化問題.
森北出版, 東京, 10 2016.

[2] H. Azegami.
Second derivatives of cost functions and h1 newton method in shape optimization problems.
In Patrick van Meurs, Masato Kimura, and Hirofumi Notsu, editors, Mathematical Analysis of Continuum Mechanics and Industrial Applications II, Proceedings of the International Conference CoMFoS16, Mathematics for Industry 30, pages 61–72. Springer Singapore, 12 2017.

[3] H. Azegami, L. Zhou, K. Umemura, and N. Kondo.
Shape optimization for a link mechanism.
Structural and Multidisciplinary Optimization, 48(1):115–125, 2 2013.

参考文献 (cnt.)

[4] K. Shintani and H. Azegami.
Shape optimization for suppressing brake squeal.
Structural and Multidisciplinary Optimization, 50(6):1127–1135, 5 2014.

[5] K. Shintani and H. Azegami.
A design method of beads in shell structure using non-parametric shape optimization method.
In Proceedings of the the ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference (IDETCCIE 2014) (eBook), pages 1–8, 8 2014.

[6] T. Nakazawa and H. Azegami.
Shape optimization of flow field improving hydrodynamic stability.
Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 10 2015.
Accepted.

参考文献 (cnt.)

[7] Masayoshi Satake, Noboru Maeda, Shinji Fukui, and Hideyuki Azegami.
Shape optimization of electrostatic capacitive sensor.
In Proceedings of the 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-10) (USB), pages 1–10, 5 2013.

MI レクチャーノートシリーズ刊行にあたり

本レクチャーノートシリーズは、文部科学省 21 世紀 COE プログラム「機能数理学の構築と展開」(H.15-19 年度) において作成した COE Lecture Notes の続刊であり、文部科学省大学院教育改革支援プログラム「産業界が求める数学博士と新修士養成」(H19-21 年度) および、同グローバル COE プログラム「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」(H.20-24 年度) において行われた講義の講義録として出版されてきた。平成 23 年 4 月のマス・フォア・インダストリ研究所 (IMI) 設立と平成 25 年 4 月の IMI の文部科学省共同利用・共同研究拠点として「産業数学の先進的･基礎的共同研究拠点」の認定を受け、今後、レクチャーノートは、マス・フォア・インダストリに関わる国内外の研究者による講義の講義録、会議録等として出版し、マス・フォア・インダストリの本格的な展開に資するものとする。

平成 26 年 10 月
マス・フォア・インダストリ研究所
所長　福本康秀

平成29年度　AIMaP チュートリアル
最適化理論の基礎と応用

発　行　2018年２月28日
著　者　神山直之, 畔上秀幸
発　行　九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
九州大学大学院数理学府
〒819-0395 福岡市西区元岡744
九州大学数理・IMI 事務室
TEL 092-802-4402　FAX 092-802-4405
URL http://www.imi.kyushu-u.ac.jp/

印　刷　城島印刷株式会社
〒810-0012 福岡市中央区白金２丁目９番６号
TEL 092-531-7102　FAX 092-524-4411

シリーズ既刊

Issue	Author／Editor	Title	Published
COE Lecture Note	Mitsuhiro T. NAKAO Kazuhiro YOKOYAMA	Computer Assisted Proofs - Numeric and Symbolic Approaches - 199pages	August 22, 2006
COE Lecture Note	M.J.Shai HARAN	Arithmetical Investigations - Representation theory, Orthogonal polynomials and Quantum interpolations- 174pages	August 22, 2006
COE Lecture Note Vol.3	Michal BENES Masato KIMURA Tatsuyuki NAKAKI	Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2005 155pages	October 13, 2006
COE Lecture Note Vol.4	宮田　健治	辺要素有限要素法による磁界解析 - 機能数理学特別講義 21pages	May 15, 2007
COE Lecture Note Vol.5	Francois APERY	Univariate Elimination Subresultants - Bezout formula, Laurent series and vanishing conditions - 89pages	September 25, 2007
COE Lecture Note Vol.6	Michal BENES Masato KIMURA Tatsuyuki NAKAKI	Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2006 209pages	October 12, 2007
COE Lecture Note Vol.7	若山　正人 中尾　充宏	九州大学産業技術数理研究センター キックオフミーティング 138pages	October 15, 2007
COE Lecture Note Vol.8	Alberto PARMEGGIANI	Introduction to the Spectral Theory of Non-Commutative Harmonic Oscillators 233pages	January 31, 2008
COE Lecture Note Vol.9	Michael I.TRIBELSKY	Introduction to Mathematical modeling 23pages	February 15, 2008
COE Lecture Note Vol.10	Jacques FARAUT	Infinite Dimensional Spherical Analysis 74pages	March 14, 2008
COE Lecture Note Vol.11	Gerrit van DIJK	Gelfand Pairs And Beyond 60pages	August 25, 2008
COE Lecture Note Vol.12	Faculty of Mathematics, Kyushu University	Consortium “MATH for INDUSTRY” First Forum 87pages	September 16, 2008
COE Lecture Note Vol.13	九州大学大学院 数理学研究院	プロシーディング「損保数理に現れる確率モデル」 — 日新火災・九州大学 共同研究 2008 年 11 月 研究会 — 82pages	February 6, 2009

シリーズ既刊

Issue	Author／Editor	Title	Published
COE Lecture Note Vol.14	Michal Beneš, Tohru Tsujikawa Shigetoshi Yazaki	Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2008 77pages	February 12, 2009
COE Lecture Note Vol.15	Faculty of Mathematics, Kyushu University	International Workshop on Verified Computations and Related Topics 129pages	February 23, 2009
COE Lecture Note Vol.16	Alexander Samokhin	Volume Integral Equation Method in Problems of Mathematical Physics 50pages	February 24, 2009
COE Lecture Note Vol.17	矢嶋　徹 及川　正行 梶原　健司 辻　英一 福本　康秀	非線形波動の数理と物理 66pages	February 27, 2009
COE Lecture Note Vol.18	Tim Hoffmann	Discrete Differential Geometry of Curves and Surfaces 75pages	April 21, 2009
COE Lecture Note Vol.19	Ichiro Suzuki	The Pattern Formation Problem for Autonomous Mobile Robots —Special Lecture in Functional Mathematics— 23pages	April 30, 2009
COE Lecture Note Vol.20	Yasuhide Fukumoto Yasunori Maekawa	Math-for-Industry Tutorial: Spectral theories of non-Hermitian operators and their application 184pages	June 19, 2009
COE Lecture Note Vol.21	Faculty of Mathematics, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis 95pages	November 9, 2009
COE Lecture Note Vol.22	Masakazu Suzuki Hoon Hong Hirokazu Anai Chee Yap Yousuke Sato Hiroshi Yoshida	The Joint Conference of ASCM 2009 and MACIS 2009: Asian Symposium on Computer Mathematics Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences 436pages	December 14, 2009
COE Lecture Note Vol.23	荒川　恒男 金子　昌信	多重ゼータ値入門 111pages	February 15, 2010
COE Lecture Note Vol.24	Fulton B.Gonzalez	Notes on Integral Geometry and Harmonic Analysis 125pages	March 12, 2010
COE Lecture Note Vol.25	Wayne Rossman	Discrete Constant Mean Curvature Surfaces via Conserved Quantities 130pages	May 31, 2010
COE Lecture Note Vol.26	Mihai Ciucu	Perfect Matchings and Applications 66pages	July 2, 2010

シリーズ既刊

Issue	Author／Editor	Title	Published
COE Lecture Note Vol.27	九州大学大学院 数理学研究院	Forum "Math-for-Industry" and Study Group Workshop Information security, visualization, and inverse problems, on the basis of optimization techniques 100pages	October 21, 2010
COE Lecture Note Vol.28	ANDREAS LANGER	MODULAR FORMS, ELLIPTIC AND MODULAR CURVES LECTURES AT KYUSHU UNIVERSITY 2010 62pages	November 26, 2010
COE Lecture Note Vol.29	木田　雅成 原田　昌晃 横山　俊一	Magma で広がる数学の世界 157pages	December 27, 2010
COE Lecture Note Vol.30	原　　　隆 松井　　卓 廣島　文生	Mathematical Quantum Field Theory and Renormalization Theory 201pages	January 31, 2011
COE Lecture Note Vol.31	若山　正人 福本　康秀 高木　　剛 山本　昌宏	Study Group Workshop 2010 Lecture & Report 128pages	February 8, 2011
COE Lecture Note Vol.32	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum "Math-for-Industry" 2011 "TSUNAMI-Mathematical Modelling" Using Mathematics for Natural Disaster Prediction, Recovery and Provision for the Future 90pages	September 30, 2011
COE Lecture Note Vol.33	若山　正人 福本　康秀 高木　　剛 山本　昌宏	Study Group Workshop 2011 Lecture & Report 140pages	October 27, 2011
COE Lecture Note Vol.34	Adrian Muntean Vladimír Chalupecký	Homogenization Method and Multiscale Modeling 72pages	October 28, 2011
COE Lecture Note Vol.35	横山　俊一 夫　　紀恵 林　　卓也	計算機代数システムの進展 210pages	November 30, 2011
COE Lecture Note Vol.36	Michal Beneš Masato Kimura Shigetoshi Yazaki	Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2010 107pages	January 27, 2012
COE Lecture Note Vol.37	若山　正人 高木　　剛 Kirill Morozov 平岡　裕章 木村　正人 白井　朋之 西井　龍映 栄　伸一郎 穴井　宏和 福本　康秀	平成 23 年度 数学・数理科学と諸科学・産業との連携研究ワークショップ　拡がっていく数学　～期待される "見えない力" ～ 154pages	February 20, 2012

シリーズ既刊

Issue	Author／Editor	Title	Published
COE Lecture Note Vol.38	Fumio Hiroshima Itaru Sasaki Herbert Spohn Akito Suzuki	Enhanced Binding in Quantum Field Theory 204pages	March 12, 2012
COE Lecture Note Vol.39	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Multiscale Mathematics; Hierarchy of collective phenomena and interrelations between hierarchical structures 180pages	March 13, 2012
COE Lecture Note Vol.40	井ノ口順一 太田　泰広 筧　　三郎 梶原　健司 松浦　　望	離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2012 152pages	March 15, 2012
COE Lecture Note Vol.41	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2012 “Information Recovery and Discovery” 91pages	October 22, 2012
COE Lecture Note Vol.42	佐伯　　修 若山　正人 山本　昌宏	Study Group Workshop 2012 Abstract, Lecture & Report 178pages	November 19, 2012
COE Lecture Note Vol.43	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Combinatorics and Numerical Analysis Joint Workshop 103pages	December 27, 2012
COE Lecture Note Vol.44	萩原　　学	モダン符号理論からポストモダン符号理論への展望 107pages	January 30, 2013
COE Lecture Note Vol.45	金山　　寛	Joint Research Workshop of Institute of Mathematics for Industry (IMI), Kyushu University “Propagation of Ultra-large-scale Computation by the Domain-decomposition-method for Industrial Problems (PUCDIP 2012)” 121pages	February 19, 2013
COE Lecture Note Vol.46	西井　龍映 栄　伸一郎 岡田　勘三 落合　啓之 小磯　深幸 斎藤　新悟 白井　朋之	科学・技術の研究課題への数学アプローチ ―数学モデリングの基礎と展開― 325pages	February 28, 2013
COE Lecture Note Vol.47	SOO TECK LEE	BRANCHING RULES AND BRANCHING ALGEBRAS FOR THE COMPLEX CLASSICAL GROUPS 40pages	March 8, 2013
COE Lecture Note Vol.48	溝口　佳寛 脇　　隼人 平坂　　貢 谷口　哲至 島袋　　修	博多ワークショップ「組み合わせとその応用」 124pages	March 28, 2013

シリーズ既刊

Issue	Author／Editor	Title	Published
COE Lecture Note Vol.49	照井　　章 小原　功任 濱田　龍義 横山　俊一 穴井　宏和 横田　博史	マス・フォア・インダストリ研究所　共同利用研究集会 II 数式処理研究と産学連携の新たな発展　137pages	August 9, 2013
MI Lecture Note Vol.50	Ken Anjyo Hiroyuki Ochiai Yoshinori Dobashi Yoshihiro Mizoguchi Shizuo Kaji	Symposium MEIS2013: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis　154pages	October 21, 2013
MI Lecture Note Vol.51	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2013 “The Impact of Applications on Mathematics”　97pages	October 30, 2013
MI Lecture Note Vol.52	佐伯　　修 岡田　勘三 髙木　　剛 若山　正人 山本　昌宏	Study Group Workshop 2013 Abstract, Lecture & Report 142pages	November 15, 2013
MI Lecture Note Vol.53	四方　義啓 櫻井　幸一 安田　貴徳 Xavier Dahan	平成25年度　九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会　安全・安心社会基盤構築のための代数構造 ～サイバー社会の信頼性確保のための数理学～　158pages	December 26, 2013
MI Lecture Note Vol.54	Takashi Takiguchi Hiroshi Fujiwara	Inverse problems for practice, the present and the future　93pages	January 30, 2014
MI Lecture Note Vol.55	栄　伸一郎 溝口　佳寛 脇　　隼人 渋田　敬史	Study Group Workshop 2013 数学協働プログラム Lecture & Report 98pages	February 10, 2014
MI Lecture Note Vol.56	Yoshihiro Mizoguchi Hayato Waki Takafumi Shibuta Tetsuji Taniguchi Osamu Shimabukuro Makoto Tagami Hirotake Kurihara Shuya Chiba	Hakata Workshop 2014 ~ Discrete Mathematics and its Applications ~　141pages	March 28, 2014
MI Lecture Note Vol.57	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2014: “Applications + Practical Conceptualization + Mathematics = fruitful Innovation”　93pages	October 23, 2014
MI Lecture Note Vol.58	安生健一 落合啓之	Symposium MEIS2014: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis　135pages	November 12, 2014

シリーズ既刊

Issue	Author／Editor	Title	Published
MI Lecture Note Vol.59	西井　龍映 岡田　勘三 梶原　健司 髙木　　剛 若山　正人 脇　　隼人 山本　昌宏	Study Group Workshop 2014 数学協働プログラム Abstract, Lecture & Report　196pages	November 14, 2014
MI Lecture Note Vol.60	西浦　　博	平成 26 年度九州大学 IMI 共同利用研究・研究集会（I） 感染症数理モデルの実用化と産業及び政策での活用のための新たな展開　120pages	November 28, 2014
MI Lecture Note Vol.61	溝口　佳寛 Jacques Garrigue 萩原　　学 Reynald Affeldt	研究集会 高信頼な理論と実装のための定理証明および定理証明器 Theorem proving and provers for reliable theory and implementations (TPP2014)　138pages	February 26, 2015
MI Lecture Note Vol.62	白井　朋之	Workshop on "β-transformation and related topics"　59pages	March 10, 2015
MI Lecture Note Vol.63	白井　朋之	Workshop on "Probabilistic models with determinantal structure" 107pages	August 20, 2015
MI Lecture Note Vol.64	落合　啓之 土橋　宜典	Symposium MEIS2015: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis　124pages	September 18, 2015
MI Lecture Note Vol.65	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum "Math-for-Industry" 2015 "The Role and Importance of Mathematics in Innovation"　74pages	October 23, 2015
MI Lecture Note Vol.66	岡田　勘三 藤澤　克己 白井　朋之 若山　正人 脇　　隼人 Philip Broadbridge 山本　昌宏	Study Group Workshop 2015 Abstract, Lecture & Report 156pages	November 5, 2015
MI Lecture Note Vol.67	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	IMI-La Trobe Joint Conference "Mathematics for Materials Science and Processing" 66pages	February 5, 2016
MI Lecture Note Vol.68	古庄　英和 小谷　久寿 新甫　洋史	結び目と Grothendieck-Teichmüller 群 116pages	February 22, 2016
MI Lecture Note Vol.69	土橋　宜典 鍛治　静雄	Symposium MEIS2016: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis　82pages	October 24, 2016
MI Lecture Note Vol.70	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum "Math-for-Industry" 2016 "Agriculture as a metaphor for creativity in all human endeavors" 98pages	November 2, 2016
MI Lecture Note Vol.71	小磯　深幸 二宮　嘉行 山本　昌宏	Study Group Workshop 2016 Abstract, Lecture & Report　143pages	November 21, 2016

シリーズ既刊

Issue	Author／Editor	Title	Published
MI Lecture Note Vol.72	新井　朝雄 小嶋　　泉 廣島　文生	Mathematical quantum field theory and related topics　133pages	January 27, 2017
MI Lecture Note Vol.73	穴田　啓晃 Kirill Morozov 須賀　祐治 奥村　伸也 櫻井　幸一	Secret Sharing for Dependability, Usability and Security of Network Storage and Its Mathematical Modeling　211pages	March 15, 2017
MI Lecture Note Vol.74	QUISPEL, G. Reinout W. BADER, Philipp MCLAREN, David I. TAGAMI, Daisuke	IMI-La Trobe Joint Conference Geometric Numerical Integration and its Applications　71pages	March 31, 2017
MI Lecture Note Vol.75	手塚　　集 田上　大助 山本　昌宏	Study Group Workshop 2017 Abstract, Lecture & Report　118pages	October 20, 2017
MI Lecture Note Vol.76	宇田川誠一	Tzitzéica 方程式の有限間隙解に付随した極小曲面の構成理論 ―Tzitzéica 方程式の楕円関数解を出発点として―　68pages	August 4, 2017
MI Lecture Note Vol.77	松谷　茂樹 佐伯　　修 中川　淳一 田上　大助 上坂　正晃 Pierluigi Cesana 濵田　裕康	平成 29 年度　九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会（I） 結晶の界面，転位，構造の数理　148pages	December 20, 2017
MI Lecture Note Vol.78	瀧澤　重志 小林　和博 佐藤憲一郎 斎藤　　努 清水　正明 間瀬　正啓 藤澤　克樹 神山　直之	平成 29 年度　九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 プロジェクト研究　研究集会（I） 防災・避難計画の数理モデルの高度化と社会実装へ向けて 136　pages	February 26, 2018

Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
九州大学大学院 数理学府

〒819-0395 福岡市西区元岡744　TEL 092-802-4402　FAX 092-802-4405
URL http://www.imi.kyushu-u.ac.jp/