

流体シミュレーションにおける様々な手法

廣瀬三平 (芝浦工業大学)

2016/6/12

物理現象の演出可能な離散モデルの構築

1. 非圧縮性流体の方程式
2. 非圧縮性流体の方程式の離散化
3. 格子法
4. 粒子法
5. PIC/FLIP

非圧縮性流体の方程式

非圧縮性流体の方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- 1 本目: 非圧縮性流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式
- 2 本目: 質量保存を表す連続の方程式

- t : 時間
- \mathbf{x} : 空間座標
 - 2次元 (x_1, x_2)
 - 3次元 (x_1, x_2, x_3)
- \mathbf{u} : 流体の速度
- p : 圧力
- ρ : 質量密度
- ν : 動粘性係数
- $-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$: 移流項
- $\nu \Delta \mathbf{u}$: 粘性項
- $-\frac{1}{\rho} \nabla p$: 圧力項
- \mathbf{f} : 外力項

物体の流れではなく、流れを生み出す速度の変化を記述

非圧縮性流体の方程式 (2次元)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$

- $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$

- $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = \sum_{k=1}^2 a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2$

- $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$

- $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$

ならば

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = - \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \quad (i = 1, 2)$$

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

非圧縮性流体の方程式 (3次元)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$

- $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$

- $(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = \sum_{k=1}^3 a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

- $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$

- $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$

ならば

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = - \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \nu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- 流体の流れに沿っての変化を表す
- 流れに沿った視点で見れば静止運動であるので無視できる
 - ラグランジュ微分 $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} := \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ を普通の微分と見なせる
- 格子法: 固定された座標 \implies 移流項を考慮する必要あり
- 粒子法: 流れに沿った座標 \implies 移流項を考慮する必要なし

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

- 流れに沿って変化していく様子を記述
- 初期値を \mathbf{F} とした解は

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{x} - t\mathbf{u})$$

- この解の表示より
 - 初期値が \mathbf{x}_0 で滑らか \implies 解は $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$ で滑らか
 - 初期値が \mathbf{x}_0 で特異性を持つ \implies 解は $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$ で特異性を持つ

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- 流体の粘性を表す
 - ν が大きいと粘りが強い
 - ν が小さいと粘りが弱い

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{u}$$

- 拡散方程式と呼ばれ、物質が広がっていく過程を記述
- ラプラシアン Δ : 周囲と平均化する演算子
 - 平均化 \implies 一部が動くとその周りも合わせて動く \implies 粘性
- 初期値に特異性があってもすぐに滑らかになる

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- 流体の互いに押し合う力を表す
- p はポアソン方程式を解くことにより求める
 - Navier-Stokes 方程式に $\nabla \cdot$ をかけると

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{f}.$$

連続の方程式より

$$0 = -\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \Delta p + \nabla \cdot \mathbf{f}$$

整理すると

$$\Delta p = \rho \{-\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{f}\}$$

- この手法は離散化で重要な役割を果たす

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

ただし

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & (2 \text{次元}) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & (3 \text{次元}) \end{cases}$$

- $\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$: ベクトル \mathbf{u} の x_k 方向の流入, 流出量を記述
 - 正負の符号により x_k 方向の流入量, 流出量を表す
 - 0 ならば x_k 方向からの流入量は流出量と等しいこと表す
- 連続の方程式は流入した分はすべて流出していることを表す
 - 連続の方程式 = 質量保存

非圧縮性流体の方程式の 離散化

時間微分の離散化

- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t + \delta t) - \mathbf{u}(t)}{\delta t} \sim \frac{\mathbf{u}(t + \delta t) - \mathbf{u}(t)}{h}$: 前進差分
- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \delta t)}{\delta t} \sim \frac{\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \delta t)}{\delta t}$: 後進差分
- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t + \delta t) - \mathbf{u}(t - \delta t)}{2\delta t} \sim \frac{\mathbf{u}(t + \delta t) - \mathbf{u}(t - \delta t)}{2\delta t}$: 中心差分

後進差分, 中心差分は前の時間での値 $\mathbf{u}(t - h)$ が必要であり使いにくい
時間微分の離散化には前進差分を使用

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \\ \implies \frac{\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}}{\delta t} &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \\ \implies \mathbf{u}_+ &= \mathbf{u} + \delta t \left\{ -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \right\}\end{aligned}$$

以上より考えるべきは空間に関する微分が含まれている右辺の離散化

格子法と粒子法の違い

格子法

- 固定された格子 (メッシュ) に情報を持たせる
- 微分方程式の解析によく用いられており, 様々な手法が研究されている
- 誤差の評価についても進んでいる

粒子法

- 固定された格子ではなく, 粒子 (パーティクル) に情報を持たせる
- 移流項を考慮に入れる必要がない
- 流体が2つに千切れるなどの大変形の記述ができる

これらを混ぜた手法も存在

フラクショナル・ステップ法

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$$

フラクショナル・ステップ法では次のように分解し、交互に計算を行い時間発展

- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}$
- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$: 圧力

ここではさらに次のように分解したものを考える

- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}$: 外力
- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$: 移流
- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{u}$: 粘性
- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$: 圧力

これを利用し次のように時間発展

$$\mathbf{u}(x, t) \xrightarrow{\text{外力}} \mathbf{u}^1(x, t) \xrightarrow{\text{移流}} \mathbf{u}^2(x, t) \xrightarrow{\text{粘性}} \mathbf{u}^3(x, t) \xrightarrow{\text{圧力}} \mathbf{u}(x, t + \delta t)$$

格子法

有限差分法を用いた離散化

以下では有限差分法, つまり微分の差分化

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t + \delta t) - \mathbf{u}(t)}{\delta t} \sim \frac{\mathbf{u}(t + \delta t) - \mathbf{u}(t)}{\delta t}$$

を用いて方程式を離散化 (外力の離散化は単純なので省略)

例

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v$$

離散化すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = u &\implies \frac{u(t + \delta t) - u(t)}{\delta t} = u(t) \\ &\implies u(t + \delta t) = (1 + \delta t)u(t) \end{aligned}$$

これより初期値 $u(0) = a$ がわかれば

$$u(\delta t) = (1 + \delta t)u(0) = (1 + \delta t)a$$

$$u(2\delta t) = (1 + \delta t)u(\delta t) = (1 + \delta t)^2 a$$

$$u(3\delta t) = (1 + \delta t)u(2\delta t) = (1 + \delta t)^3 a$$

⋮

と $t = \delta t, 2\delta t, 3\delta t, \dots$ (格子) での値 $u(\delta t), u(2\delta t), u(3\delta t), \dots$ が求められる

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

簡単のため 1 次元で説明

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -u \frac{\partial u}{\partial x} \\ \Rightarrow \frac{u(x, t + \delta t) - u(x, t)}{\delta t} &= -u(x, t) \frac{u(x + \delta x, t) - u(x, t)}{\delta x} \\ \Rightarrow u(x, t + \delta t) &= u(x, t) - \frac{\delta t}{\delta x} u(x, t) \{u(x + \delta x, t) - u(x, t)\} \end{aligned}$$

現在の時間の値 $u(x, t)$, $u(x + \delta x, t)$ より $u(x, t + \delta t)$ が決まる

注意

- 上記手法では不安定 (振動, 発散) になる可能性がある
- 別の手法として移流項を粒子の流れとしたセミラグランジュ法

$$u(x, t + \delta t) = u(x - \delta t u(x, t), t)$$

が用いられている (Stam, Stable Fluids)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{u}$$

簡単のため 1 次元で説明

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \Rightarrow \frac{u(x, t + \delta t) - u(x, t)}{\delta t} &= \nu \frac{u(x + \delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \delta x, t)}{\delta x^2} \\ \Rightarrow u(x, t + \delta t) &= u(x, t) + \nu \frac{\delta t}{\delta x^2} (u(x + \delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \delta x, t)) \end{aligned}$$

現在の時間の値 $u(x, t)$, $u(x + \delta x, t)$, $u(x - \delta x, t)$ より $u(x, t + \delta t)$ が決まる

注意

- "求めたい値 = 既知の量の組み合わせ"である陽解法は不安定になりやすい
- (半) 陰解法は安定になりやすい

$$\frac{u(x, t + \delta t) - u(x, t)}{\delta t} = \nu \frac{u(x + \delta x, t + \delta t) - 2u(x, t + \delta t) + u(x - \delta x, t + \delta t)}{\delta x^2}$$

圧力項の離散化

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

圧力 p の満たす方程式をこの方程式より導出

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}}{\delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (\text{時間微分の離散化})$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}_+ - \nabla \cdot \mathbf{u}}{\delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla p \quad (\nabla \cdot \text{を左からかける})$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{\rho}{\delta t} \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (=: f) \quad (\text{連続の方程式 } \nabla \cdot \mathbf{u}_+ = 0)$$

このポアソン方程式を離散化して整理すると連立方程式が得られる

1次元の場合は次であり、境界値 $p(x - \delta x), p(x + (N + 1)\delta x)$ を与えると解ける

$$p(x + \delta x) - 2p(x) + p(x - \delta x) = \delta x^2 f(x)$$

$$p(x + 2\delta x) - 2p(x + \delta x) + p(x) = \delta x^2 f(x + \delta x)$$

⋮

$$p(x + (N + 1)\delta x) - 2p(x + N\delta x) + p(x + (N - 1)\delta x) = \delta x^2 f(x + N\delta x)$$

格子法による計算

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{\text{外力}} \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{\text{移流}} \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{\text{粘性}} \mathbf{u}^3(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{\text{圧力}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t + \delta t)$$

の各ステップで以下を離散化した方程式を用いる

- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}$: 外力
- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$: 移流
- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{u}$: 粘性
- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$: 圧力

以上は簡単のためレギュラー格子を用いた

- レギュラー格子: 速度と圧力をセルの頂点に配置

他に次のような格子がある

- コロケート格子: 速度と圧力をセルの中心に配置
- スタッガード格子: 速度をセルの面, 圧力をセルの中心に配置

粒子法

粒子を用いた離散化

物理量を持つ粒子 P_i ($i = 1, \dots, N$) を用いて方程式を離散化

- \mathbf{u}_i : 速度
- \mathbf{x}_i : 位置
- p_i : 圧力

速度 \mathbf{u} が自身の流れに乗って変化すると

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0$$

粒子の視点で考えた Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$$

ただし $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} := \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$: ラグランジュ微分

粒子の視点に立った Navier-Stokes 方程式の離散化は

$$\frac{\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}}{\delta t} = \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$$

以下では MPS(Moving Particle Semi-implicit) 法を用いて離散化

重み関数

以下, 煩雑さを避けるため時間の記号は省略

2つの粒子の影響を表す重み関数は

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & (0 < r < r_e) \\ 0 & (r \geq r_e) \end{cases}$$

r は2つの粒子の距離, r_e は影響の範囲を表す

- $0 < r < r_e$: 2つの粒子が近くなので影響を与える
 - r が0に近い \implies 影響は大きい
- $r > r_e$: 2つの粒子が遠くなので影響を与えない

粒子 P_i の周りの粒子の多さを表す粒子数密度を次で定義

$$n_i = \sum_{j \neq i} w(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|)$$

特に粒子数密度の基準値 n を

$$n = \text{"中心"} \text{にある粒子の粒子数密度}$$

微分演算子の離散化

∇f の粒子 P_i の位置 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ での近似値

$$\langle \nabla f \rangle_i := \frac{d}{n} \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) w(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|) \right\}$$

Δf の粒子 P_i の位置 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ での近似値

$$\langle \Delta f \rangle_i := \frac{2d}{\lambda n} \sum_{j \neq i} (f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i)) w(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|)$$

ただし

- d : 空間の次元
- λ : "中心"にある粒子 P_i の周りの粒子との距離の平均値

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i} |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2 w(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|)}{\sum_{j \neq i} w(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|)}$$

これを用いて粘性項, 圧縮項を離散化

微分演算子の離散化: 差分法との比較

1次元で粒子が $\mathbf{x}_{-1} = x - \delta$, $\mathbf{x}_0 = x$, $\mathbf{x}_1 = x + \delta x$ に存在する場合は

$$n = \sum_{j=-1,1} w(\delta x) = 2w(\delta x), \quad \lambda = \frac{\sum_{j=-1,1} \delta x^2 w(\delta x)}{\sum_{j=-1,1} w(\delta x)} = \delta x^2$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla f \rangle_0 &= \frac{1}{2w(\delta x)} \sum_{j=-1,1} \left\{ \frac{f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_0)}{\delta x^2} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0) w(\delta x) \right\} \\ &= \frac{1}{2\delta x^2} \{ (f(x - \delta x) - f(x))(-\delta x) + (f(x + \delta x) - f(x))\delta x \} \\ &= \frac{f(x + \delta x) - f(x - \delta x)}{2\delta x} \sim \frac{\partial f}{\partial x} = \nabla f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta f \rangle_0 &= \frac{2}{2w(\delta x)\delta x^2} \sum_{j=-1,1} (f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_0))w(\delta x) \\ &= \frac{1}{\delta x^2} \{ (f(x - \delta x) - f(x)) + (f(x + \delta x) - f(x)) \} \\ &= \frac{f(x + \delta x) - 2f(x) + f(x - \delta x)}{\delta x^2} \sim \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \Delta f \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{u}_i & \xrightarrow{\text{外力}} & \mathbf{u}_i^1 & & \xrightarrow{\text{粘性}} & \mathbf{u}_i^2 & & \xrightarrow{\text{圧力}} & \mathbf{u}_{i,+} \\ \mathbf{x}_i & & \mathbf{x}_i^1 = \mathbf{x}_i + \delta t \mathbf{u}_i^1 & & & \mathbf{x}_i^2 = \mathbf{x}_i^1 + \delta t \mathbf{u}_i^2 & & & \mathbf{x}_{i,+} = \mathbf{x}_i^2 + \delta t \mathbf{u}_{i,+} \end{array}$$

の各ステップで以下を離散化した方程式を用いる

- $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f}$: 外力
- $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nu \Delta \mathbf{u}$: 粘性
- $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$: 圧力

ただし、圧力 p については粒子法の場合と同様にポアソン方程式を解いて求める

$$\Delta p = \frac{\rho}{\delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}$$

速度 \mathbf{u}_i と同時に位置 \mathbf{x}_i も更新するので移流項が不要

関数 $f(\mathbf{x})$ の近似として粒子 P_j の質量 m_j , 密度 ρ_j を用いて

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) w_h(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|)$$

関数 $f(\mathbf{x})$ の微分の近似は $w_h(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|)$ の微分を利用

SPH 法

- 圧縮性流体の計算手法
- 陽解法を使用 (ポアソン方程式を解かない)

MPS 法

- 非圧縮性流体の計算手法
- 半陰解法を使用 (ポアソン方程式を解く)

以上は様々な拡張があり, とともに圧縮性, 非圧縮性への適用が考えられている

PIC/FLIP

格子法, 粒子法の利点

- 格子法: 移流項以外の計算が得意
- 粒子法: 移流項の計算が得意

PIC, FLIP, PIC/FLIP

- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$: 格子を用いて計算
- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$: 粒子を用いて計算

違いは格子と粒子のデータのやり取り

次において提案

- PIC (Particle-In-Cell): F. H. Harlow (1955)
- FLIP (FLuid-Implicit-Particle): J. U. Brackbill and H. M. Ruppel (1986)
- PIC/FLIP: Y. Zhu and R. Bridson (2005)

PIC のアルゴリズム

1. 粒子の速度 \mathbf{u}_p を格子 \mathbf{u}_g に移す演算子を $M_{p \rightarrow g}$ とすると

$$\mathbf{u}_g = M_{p \rightarrow g} \mathbf{u}_p$$

2. 移流項以外 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$ を格子法で計算し、格子の速度 \mathbf{u}_g を新たな速度 $\mathbf{u}_{g,+}$ に更新
3. 格子の速度を粒子に移す演算子を $M_{g \rightarrow p}$ とすると

$$\mathbf{u}_{p,+}^P = M_{g \rightarrow p} \mathbf{u}_{g,+}$$

4. 粒子の速度を用い、粒子を移動

$M_{p \rightarrow g}$, $M_{g \rightarrow p}$ は例えば次のような (必ずしも正方ではない) 行列

- $M_{g \rightarrow p}$: 粒子の速度の (重み付き) 平均を表す行列
- $M_{p \rightarrow g}$: 格子の速度の線形補間を表す行列

結果として得られるのは粘度の高い流体

- $M_{p \rightarrow g}$, $M_{g \rightarrow p}$: (おおよそ) 平均を取る演算子 \implies 粘度

FLIP のアルゴリズム

1. 粒子の速度 \mathbf{u}_p を格子 \mathbf{u}_g に移す

$$\mathbf{u}_g = M_{p \rightarrow g} \mathbf{u}_p$$

2. 移流項以外 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$ を格子法で計算し、格子の速度 \mathbf{u}_g を新たな速度 $\mathbf{u}_{g,+}$ に更新
3. 格子の速度の変化量を粒子の速度に加える

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{p,+}^F &= \mathbf{u}_p + M_{g \rightarrow p} (\mathbf{u}_{g,+} - \mathbf{u}_g) \\ &= (I - M_{g \rightarrow p} M_{p \rightarrow g}) \mathbf{u}_p + M_{g \rightarrow p} \mathbf{u}_{g,+} \\ &= \mathbf{u}_p - M_{g \rightarrow p} M_{p \rightarrow g} \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_{p,+}^P \end{aligned}$$

PIC での速度 $\mathbf{u}_{p,+}^P$ に

もとの速度 \mathbf{u}_p - 平均化した速度 $M_{g \rightarrow p} M_{p \rightarrow g} \mathbf{u}_p$

を追加 (“高周波成分”)

4. 粒子の速度を用い、粒子を移動

結果として得られるのはノイズが減衰しない流体

- 高周波成分は移流項のみで時間発展
- その他の項、特に拡散項の影響がは考えられていない

PIC/FLIP

- PIC と FLIP を混ぜ合わせて良い粘度の流体を作成

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{p,+}^{PF} &= \alpha \mathbf{u}_{p,+}^P + (1 - \alpha) \mathbf{u}_{p,+}^F \\
 &= \alpha M_{g \rightarrow p} \mathbf{u}_{g,+} + (1 - \alpha) \{ \mathbf{u}_p + M_{g \rightarrow p} (\mathbf{u}_{g,+} - \mathbf{u}_g) \} \\
 &= (1 - \alpha) (I - M_{g \rightarrow p} M_{p \rightarrow g}) \mathbf{u}_p + M_{g \rightarrow p} \mathbf{u}_{g,+}
 \end{aligned}$$

- α としては動粘性係数 ν で表されるものが用いられる

$$\alpha = \frac{6\delta t}{\delta x^2} \nu$$

- $\alpha = 0$: PIC, $\alpha = 1$: FLIP

- Robert Bridson, Fluid Simulation for Computer Graphics (2nd ed), A K Peters/CRC Press.
- Jos Stam, Stable fluids, Proc. ACM SIGGRAPH.
- Yongning Zhu and Robert Bridson, Animating sand as a fluid, ACM Trans. Graph. 24.

- 安東遼一, Chapter 13 ベクタ形式で出力可能な美しいマール模様の生成法 (Computer Graphics Gems JP 2012), ボーンデジタル.
- 安東遼一, Chapter 14 FLIP 法による格子&粒子のハイブリッド流体シミュレーション (Computer Graphics Gems JP 2012), ボーンデジタル.
- 河村哲也, 流体解析の基礎, 朝倉書店.
- 桑原邦郎, 河村哲也, 流体計算と差分法, 朝倉書店.
- 越塚誠一, 粒子法 (計算力学レクチャーシリーズ), 丸善出版.
- 越塚誠一, 柴田和也, 室谷浩平, 粒子法, 丸善出版.