可積分系の理論の展開

梶原　健司

学位: 博士(工学)(東京大学)
専門分野: 可積分系の理論、離散微分幾何

ソリトンと呼ばれる、粒子性をあわせ持つ非線形波動の研究に端を発する「可積分系」の研究を軸に研究活動を行っています。ソリトンはカオス·フラクタルと並んで非線形現象を特徴づける基本モードとして広く認識されていますが、その存在は物理的にも数理的にも「奇跡」によって支えられています。物理的には、ソリトンは非線形性と分散性の微妙なバランスの上に存在していると理解されており、また数理的には、ソリトンを記述する基礎方程式(ソリトン方程式)は非線形偏微分方程式であるにもかかわらず、厳密に解けるという顕著な性質を持っています。現在、それらの奇跡の背後には「無限自由度の対称性によって支えられた無限次元の空間」の数理があることがわかっており、その数理を共有する函数方程式の族を「可積分系」と呼びます。背後の数理を深く理解することによって、可積分系は多くの分野への応用がなされています。以下、3つの例を挙げます。

1. 離散化と超離散化:ソリトン方程式の可積分性を保存したまま独立変数を離散化し、可積分な差分方程式を構成したり、従属変数まで離散化してセルオートマトンを構成する方法(「超離散化」)が構築されています。図1の左は典型的なソリトンの相互作用を表し、左からやってきた大きく速いソリトンが小さく遅いソリトンを追い抜いています。相互作用の前後で波の振幅·速度·形は変化しませんが、非線形である証拠に各々の波の位置がずれます。一方図1の右はソリトンを記述するセルオートマトンです。1次元の箱の列と玉があるとし、各時刻で左から玉を右の最も近い空箱に移し、全ての玉を移動したら時刻を1進めることとします。この単純なモデルがソリトンを記述し、超離散化の手続きで偏微分方程式と直接の対応がつくのです。離散化·超離散化は数値解析や交通流など広範な分野に応用され、大きな成功を収めています。また、超離散系の背後の幾何学的構造が最近急速に発達している「トロピカル幾何学」でよく記述されることがわかってきて、トロピカル幾何学の発達も促しています。

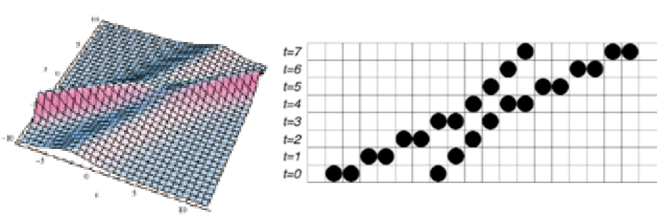

図1

2. 離散パンルヴェ方程式と楕円曲線:離散パンルヴェ方程式と呼ばれる可積分な2階常差分方程式の族は、さまざまなアフィンワイル群対称性を許容するなど背後に極めて豊富な構造があります。離散パンルヴェ方程式はソリトン方程式と密接な関係があり、特殊解としてベッセル函数などの超幾何型特殊函数やその拡張が現れます。これらの頂点に$E_8^{(1)}$型の対称性を持つ「楕円パンルヴェ方程式」があり、複素射影平面上の動く3次曲線上の加法定理として定式化されます(図2)。また、楕円パンルヴェ方程式の特殊解として楕円テータ函数の級数として表示される「楕円超幾何函数」が現れ、この函数は超幾何型特殊函数の頂点に位置するものと考えられています。このようにして可積分系は代数幾何学など純粋数学とも密接に関連します。 なお、離散パンルヴェ方程式は最近確率論や組合せ論と密接な関わりがあることが明らかになってきています。

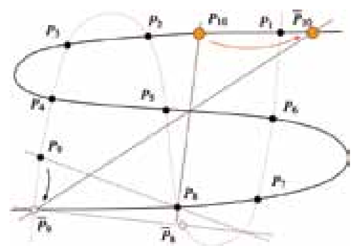

図2

3. 離散可積分系と離散微分幾何学:空間中の曲線·曲面やそのダイナミクスを記述する基礎方程式としてさまざまな可積分系が現れることが知られており、可積分性と幾何的オブジェクトの整合性が対応しています。最近、離散可積分系の理論と整合する曲線·曲面論の構築が進み、私も離散可積分系の理論をベースに積極的に研究の展開を図っています。図3はサイン·ゴルドン方程式と呼ばれるソリトン方程式の解から作られる曲面と、その離散化である離散サイン·ゴルドン方程式の解から作られる離散曲面です。図4は、ごく最近得られた、離散modified　KdV方程式で記述される平面離散曲線のダイナミクスを表します。

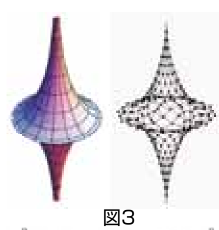

図3

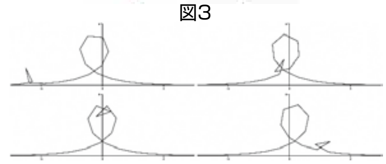

図4

以上のようにさまざまな側面をもつ可積分系の理論を、厳密に解析可能な対象に対する方法論としてさらに磨きをかけ、MI研究所の活動に貢献していく所存です。