曲面の変分問題の解の大域解析

小磯　深幸

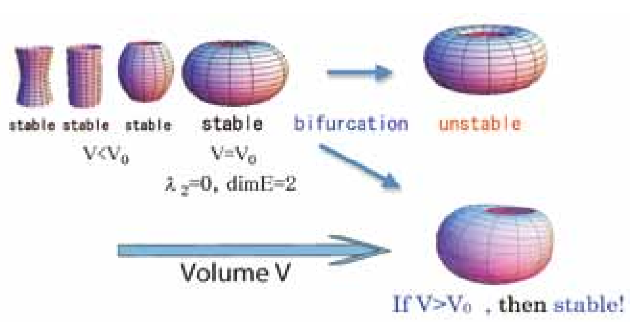
学位: 理学博士（大阪大学）
専門分野: 微分幾何学

　幾何学における重要な研究課題の一つとして、幾何学的変分問題の解についての研究がある。私は、主として定曲率リーマン多様体内の超曲面に対する変分問題の解の存在と一意性、安定性、幾何学的性質、解空間の構造についての研究を行っている。

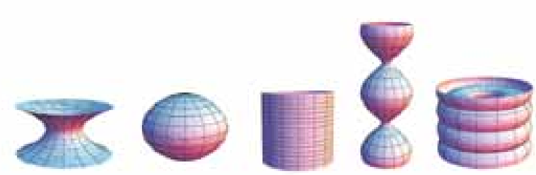
　まず、基本的な研究対象について説明する。この種の問題で古くから研究されているものの中に、極小曲面と平均曲率一定曲面(constant mean curvature surface. 以下、CMC曲面と略記する)がある。前者は面積の臨界点、後者は「囲む体積が一定」なる付加条件のもとでの面積の臨界点である。そのため、これらはそれぞれ、石鹸膜、シャボン玉の数学的抽象化と言われることがある。一方、たとえば結晶のように異方性を持つ物質の形状については、エネルギーとして面積汎関数を考えるだけでは十分でなく、より一般の、エネルギー密度が表面の方向に依存するようなものを考える必要がある。曲面上の各点におけるこのようなエネルギー密度の曲面全体での和(積分)を非等方的表面エネルギーと呼ぶ。これは、結晶やある種の液晶の表面エネルギーの数学的モデルを与える。物理的にも自然な変分問題は、「囲む体積が一定」なる条件のもとでの非等方的表面エネルギーの臨界点を研究することである。その解は非等方的平均曲率一定(constant anisotropic mean curvature.　以下、CAMCと記す)曲面と呼ばれるものになる。通常、面積汎関数（等方的な表面エネルギー）も非等方的表面エネルギーの特別な場合と考えるので、CAMC曲面は極小曲面やCMC曲面の一般化となっている。一般に、変分問題の解は、対応するエネルギー汎関数の第2変分が非負であるときに安定であるといわれる。特に、エネルギー極小解は安定である。物理的に実現されるのは安定な解だけであり、安定解について研究することは、理論·応用の両観点から重要である。

　さて、約10年前から、主として、Bennett Palmer氏（米国·アイダホ州立大学教授)と共同で、CMC曲面を含む変分問題の解のクラス、主にCAMC曲面についての研究を行ってきた。CAMC曲面は、近年、数学では、微分幾何学、幾何学的測度論、凸解析、微分方程式論、確率論その他の分野で研究されており、物理学や工学を始めとする他分野でも基礎·応用の両観点から研究されている。曲面の非等方性は形態形成に重要な役割を果たすため、非等方的曲率流方程式の研究が学際的に取り上げられているが、CAMC曲面はこの方程式の解の極限を与える候補ともなり、その性質を研究することは、この意味でも重要である。Koiso-Palmerは、CAMC曲面の幾何学的性質、表現公式、安定性、ガウス写像及びその除外集合問題、自由境界問題の安定解の存在と一意性等について多くの研究成果を得た。

　最近の研究成果としては、3次元ユークリッド空間内の種数0のCAMC閉曲面はWulff図形またはその相似に限ることを証明した。大雑把に言えば、非等方性を持つ物質で穴のないものの形状を決定したということである。また、現在は、付加条件の変化に応じ、安定解の対称性が崩壊していく現象の解明についての幾何解析的方法を構築しつつある。今後は、さらに、境界条件の変動を許した時の解全体の成す集合に適切な幾何構造を定義し、無限次元空間の幾何構造の解明へとつながる研究に発展させたい。また、そのような抽象的な理論の構築を進める一方で、計算機を用いた数値実験により、理論を応用してさまざまな具体例の観察を試みたいと考えている。



平行な二円を張る曲面の，「体積一定」の条件下での面積の臨界点．安定解の対称性の崩壊現象



ある種の液晶をモデルとする回転体たち